PC Lycée Pierre Corneille
2026/2027

Programme de colle de mathématiques
Semaine 6 - Du 9 au 14 Novembre 2026

IV. Espaces probabilisés

- **Révisions PCSI** Résumé des techniques de dénombrement.
- Ensembles dénombrables. $\mathbb{Z}$ est dénombrable. Produit cartésien d'ensembles dénombrables, réunion au plus dénombrable d'ensembles dénombrables.
- Familles sommables de réels positifs. Sommation par paquets. Théorème de Fubini.
- Familles sommables de complexes. Linéarité, croissance, sommation par paquets.
- Tribus. Propriétés des opérations ensemblistes.
- Espaces probabilisés. Propriétés calculatoires sur les opérations ensemblistes. Continuité monotone (croissante et décroissante).
- Variables aléatoires discrètes. Loi d'une variable aléatoire. Image d'une variable aléatoire.
- Probabilités conditionnelles. Définition. Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.
- Indépendance.
- **Pour le moment, pas de lois usuelles, pas d'espérance, pas de variance.**

V. Fonctions intégrables

- Convergence absolue des intégrales. Intégrabilité.
- Fonctions intégrables usuelles : $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$, $t \mapsto \ln(t)$.
- Théorème de comparaison avec les quatre outils de comparaison $\leqslant$, o, O, $\sim$ pour l'intégrabilité et adaptation à la convergence d'intégrales dans le cas de fonctions positives.
- Plein d'exemples du cours à savoir refaire.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Formule des probabilités totales.
- Exemple d'expérience aléatoire conduisant à l'étude d'une suite arithmético-géométrique (chaîne de Markov à deux état). Exemple du cours : "professeur énervé" p_{n+1} en fonction de p_n ou exercice 8 du TD.
- Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
- On pose $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Domaine de définition de Γ. Déterminer pour $x > 0$ une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.
- Sur des exemples, intégrales de Bertand. On a fait : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^{1/3}}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.