**Ce document donne, pour chaque exercice de la fiche, le résultat attendu et une indication de méthode, sans rédaction complète. L'objectif est de permettre de débloquer une question sans donner la solution rédigée. Essayez d'abord de chercher seul(e). Si vous bloquez, lisez la piste (sans la réponse), retentez, puis seulement ensuite comparez avec la réponse. Les pistes ne sont pas des rédactions : à vous de justifier proprement.**

## Exercice 1

**Réponse(s) :** Les trois applications sont des normes sur $\mathbb{K}^n$. On a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leq n\,\|x\|_\infty .$$

Les trois normes sont donc équivalentes (ce qui est le cas de toutes les normes en dimension finie).

**Pistes en cas de blocage :**

1) Pour chaque norme, vérifier les trois axiomes : séparation, homogénéité, inégalité triangulaire.
   - *Séparation* : une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls ; pour $\|\cdot\|_\infty$, un sup de réels positifs est nul ssi chacun l'est.
   - *Inégalité triangulaire pour* $\|\cdot\|_1$ : inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ pour chaque coordonnée, puis sommer.
   - *Pour* $\|\cdot\|_\infty$ : pour tout $i$, $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, puis passer au sup.
   - *Pour* $\|\cdot\|_2$ : développer $\|x+y\|_2^2$ et utiliser l'inégalité de Cauchy–Schwarz (ou reconnaître la norme associée au produit scalaire usuel, hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
2) - $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$ : Cauchy–Schwarz appliqué aux vecteurs $(1, \dots, 1)$ et $(|x_1|, \dots, |x_n|)$.
   - $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$ : majorer chaque $|x_i|^2$ par $\|x\|_\infty^2$.
   - $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ : chaque $|x_i|$ est majoré par la somme de tous les $|x_j|$.

   Pour conclure, enchaîner les inégalités pour encadrer chaque norme par un multiple d'une autre dans les deux sens, c'est la définition de l'équivalence.

## Exercice 2

**Réponse(s) :** $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $E$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$, mais les deux normes ne sont *pas* équivalentes. Contre-exemple possible : $f_n(t) = t^n$, avec $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$.

**Pistes en cas de blocage :**

1) L'homogénéité et l'inégalité triangulaire découlent de la linéarité et de la croissance de l'intégrale. Pour la *séparation*, c'est ici qu'intervient la continuité : une fonction **continue** et **positive** d'intégrale nulle sur un segment est identiquement nulle.
2) Majorer $|f(t)|$ par $\|f\|_\infty$ pour tout $t$, puis intégrer sur $[0, 1]$.
3) **Attention** : l'indication de l'énoncé est écrite dans le mauvais sens. Comme $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$, on ne peut pas avoir $\|f_n\|_\infty \to 0$ sans que $\|f_n\|_1 \to 0$. Il faut chercher une suite avec $\|f_n\|_1 \to 0$ alors que $\|f_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 : par exemple, une fonction qui vaut 1 en 1 mais très petite ailleurs ($t \mapsto t^n$), ou une fonction « pic » étroite de hauteur 1. Conclure : s'il existait $C > 0$ avec $\|f\|_\infty \leq C\,\|f\|_1$ pour tout $f$, cela contredirait la suite choisie.

## Exercice 3

**Réponse(s) :** $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$ et $\|f\|_\infty \leq \|f\|$, mais il n'existe pas de constante $K$ avec $\|f\| \leq K\,\|f\|_\infty$. Contre-exemple possible : $f_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{n}$, avec $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ et $\|f_n\| = 1$.

**Pistes en cas de blocage :**

1) Les axiomes d'homogénéité et d'inégalité triangulaire viennent de ceux de la valeur absolue, de $\|\cdot\|_\infty$ et de la linéarité de la dérivation. Pour la séparation : si $\|f\| = 0$, que valent $f(0)$ et $f'$ ? En déduire que $f$ est constante, puis nulle.

2) Écrire $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\,ds$ (théorème fondamental de l'analyse, $f$ étant de classe $C^1$), puis majorer en valeur absolue : $|f(t)| \leq |f(0)| + t\,\|f'\|_\infty$ avec $t \in [0,1]$.

3) Raisonner par l'absurde, ou montrer directement que le rapport $\|f_n\| \,/\, \|f_n\|_\infty$ n'est pas borné. Pour $f_n(t) = \sin(nt)/n$ : calculer $f_n(0)$, $f_n'(t) = \cos(nt)$, donc $\|f_n'\|_\infty$ (attention à l'intervalle $[0,1]$ : le sup est atteint en $t = 0$). Les oscillations rapides rendent la dérivée grande alors que la fonction reste petite.

## Exercice 4

**Réponse(s) :** $N(P)$ existe pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, et $N$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

**Pistes en cas de blocage :**

1) Une fonction polynomiale est continue, donc $|P|$ est continue sur le segment $[0,1]$ : elle est intégrable.

2) Homogénéité et inégalité triangulaire : comme à l'exercice 2. Pour la séparation, si $N(P) = 0$, on obtient que $P$ s'annule sur $[0,1]$ (même argument que l'exercice 2). Un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

## Exercice 5

**Réponse(s) :** L'intégrale $N(P)$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et $N$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

**Pistes en cas de blocage :**

1) L'intégrale est généralisée en $+\infty$. Deux approches :

   - écrire $|P(t)|\,e^{-t} \leq \sum_k |a_k|\,t^k e^{-t}$ et montrer que chaque $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$ converge (récurrence par intégration par parties, valeur $k!$) ;
   - ou utiliser les croissances comparées : $|P(t)|e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, puis comparaison avec une intégrale de Riemann.

2) Même structure que l'exercice 4. Pour la séparation, la fonction $t \mapsto |P(t)|e^{-t}$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0,+\infty[$ : elle est donc nulle. Comme $e^{-t} \neq 0$, $P$ s'annule sur $[0,+\infty[$, donc $P = 0$.

## Exercice 6

**Réponse(s) :** $M^2 = M$, donc $M$ est la matrice d'un projecteur.

**Pistes en cas de blocage :**

- On sait que $A^k \to M$. La suite extraite $(A^{2k})_k$ converge aussi vers $M$ (sous-suite d'une suite convergente).
- Par ailleurs $A^{2k} = (A^k)^2$. On écrit les coefficients de $A^k$ : $a_{ij}^k$.

  On utilise la formule du produit de matrice, les coefficients de $A^k \times A^k$ sont : $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} a_{il}^k a_{lj}^k$.

  On utilise le fait que la suites de matrices $(A^k)$ converge si et seulement si les suites des coefficients convergent.
  Ici : $\forall i,j,\ a_{ij}^k \to m_{ij}$
  Plus tard dans l'année on utilisera que l'application $X \mapsto X^2$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (dimension finie : les coefficients de $X^2$ sont des polynômes en ceux de $X$ ou bien par bilinéarité du produit matriciel). Donc $A^{2k} \to M^2$.
- Unicité de la limite : $M^2 = M$. Conclure sur la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

## Exercice 7

**Réponse(s) :** $(BA)^n \to O_p$.

**Pistes en cas de blocage :**

- Chercher une relation entre $(BA)^{n+1}$ et $(AB)^n$ : vérifier que $(BA)^{n+1} = B\,(AB)^n\,A$ (récurrence, ou développer en regroupant les facteurs).
- L'application $X \mapsto BXA$ est linéaire sur $\mathrm{Mat}\,p(\mathbb{R})$ (de dimension finie), donc continue. Passer à la limite : $(BA)^{n+1} \to B\,O_p\,A = O_p$.
- Conclure : la suite $((BA)^n)_n$ est la même que $((BA)^{n+1})_n$ décalée d'un rang.

## Exercice 8

**Réponse(s) :** $A$ est inversible et $A^{-1} = B$.

**Pistes en cas de blocage :**

- Partir de $A_n A_n^{-1} = I_p$ pour tout $n$.
- On démontre que $A_n A_n^{-1} \to AB$. Pour cela, utiliser la formule du produit de matrice, les coefficients de $A_n \times A_n^{-1}$ sont : $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^n \alpha_{kj}^n$.
  On utilise le fait que les suites de matrices $(A_n)$ et $(A_n^{-1})$ convergent si et seulement si les suites des coefficients convergent.
  Ici : $\forall i, j,\ a_{ij}^n \to a_{ij}$ et $\alpha_{ij}^n \to b_{ij}$.
  Plus tard on utilisera que le produit matriciel est continu car "linéaire en dimension finie", donc $A_n A_n^{-1} \to AB$. Unicité de la limite : $AB = I_p$.
- Rappel : pour des matrices carrées, $AB = I_p$ suffit pour affirmer que $A$ est inversible d'inverse $B$ (par exemple par déterminant : $\det A \det B = 1$).

## Exercice 9

**Réponse(s) :**

1) On pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Dans la base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_2 = (2, 0, -1)$, $\varepsilon_3 = (1, -2, -1)$, on a $f(\varepsilon_1) = \frac{1}{2}\varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2$, $f(\varepsilon_3) = 0$. Donc $A = PTP^{-1}$ avec $P$ matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2) $T^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & n\,2^{-(n-1)} & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to O_3$, d'où $A^n = PT^nP^{-1} \to O_3$.

**Pistes en cas de blocage :**

1) On pose $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. On cherche une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que $f(\varepsilon_1) = \frac{1}{2}\varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2$, $f(\varepsilon_3) = 0$. Il suffit donc de :
   - résoudre $(A - \frac{1}{2}I)X = 0$ pour trouver $\varepsilon_1$ ;
   - résoudre $(A - \frac{1}{2}I)X = f_1$ pour trouver $\varepsilon_2$ ;
   - résoudre $AX = 0$ pour trouver $\varepsilon_3$ ;
   - vérifier que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre (déterminant non nul).
2) Écrire $T = D + N$ avec $D = \mathrm{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ et $N = E_{12}$. Vérifier que $DN = ND$ et que $N^2 = 0$, puis utiliser la formule du binôme : $T^n = D^n + nD^{n-1}N$. La suite $n\,(1/2)^{n-1}$ tend vers 0 (croissances comparées). Enfin, $X \mapsto PXP^{-1}$ est continue car...

## Exercice 10

**Réponse(s) :**

1) $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

2) $f(u) = u$ et $f(v) = (p-q)v$, donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{pmatrix}$.

3) $A^n = PD^nP^{-1}$ converge car $|p-q| < 1$ : $D^n \to \mathrm{diag}(1,0)$.

4) $U_n = A^{n-1}U_1$ converge.

5) $L = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

**Pistes en cas de blocage :**

1) Écrire $Z_{n+1} = Z_n X_{n+1}$ avec $X_{n+1}$ indépendante de $Z_n$. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet $\{Z_n = 1\}, \{Z_n = -1\}$ : $P(Z_{n+1} = 1) = P(Z_n = 1)\,p + P(Z_n = -1)\,q$, et de même pour l'autre événement.

2) Calculer $f(u)$ et $f(v)$. Pour la base : deux vecteurs non colinéaires dans $\mathbb{R}^2$ forment une base (déterminant non nul).

3) Formule de changement de base : $A = PDP^{-1}$, donc $A^n = PD^nP^{-1}$. Pour la convergence de $D^n$, il faut justifier que $|p-q| < 1$ : utiliser $p \in ]0,1[$ pour encadrer $p - q = 2p - 1 \in ]-1,1[$.

4) $U_{n+1} = AU_n$ donne $U_n = A^{n-1}U_1$ ; l'application $M \mapsto MU_1$ est continue car....

5) Passer à la limite dans $U_{n+1} = AU_n$ pour avoir $L = AL$. Résoudre $(A-I)L = 0$ : $L$ est colinéaire à $u = (1,1)$. Pour fixer la constante, utiliser que $P(Z_n = 1) + P(Z_n = -1) = 1$ pour tout $n$, et passer à la limite.

## Exercice 11

**Réponse(s) :**

1) $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

2) On peut prendre $k = \frac{5}{6}$.

3) $L = \begin{pmatrix} 25/38 \\ 7/19 \end{pmatrix}$.

4) $\|X_n - L\|_\infty \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \|X_0 - L\|_\infty$, donc $X_n \to L$.

**Pistes en cas de blocage :**

1) Lire les coefficients des deux équations de récurrence : la partie « linéaire en $u_n, v_n$ » donne $A$, la partie constante donne $B$.

2) Calculer la $i$-ème ligne de $AX$ et utiliser $|x_j| \leq \|X\|_\infty$ pour majorer. Prendre le maximum des deux sommes $\sum_j |a_{ij}|$ ; il doit être strictement inférieur à 1.

3) Deux voies : (a) montrer que $I - A$ est inversible en calculant son déterminant, puis $L = (I-A)^{-1}B$ ; (b) montrer l'unicité avec la question 2 : si $X = AX$, alors $\|X\|_\infty \leq k\,\|X\|_\infty$ avec $k < 1$, donc $X = 0$ ; l'injectivité entraîne la bijectivité en dimension finie. Vérifier $L$ en reportant dans $X = AX + B$.

4) Soustraire $X_{n+1} = AX_n + B$ et $L = AL + B$ : $X_{n+1} - L = A(X_n - L)$. Appliquer la question 2, puis une récurrence.

### Suppléments

## Exercice 12

**Réponse(s) :** $N$ est une norme sur $E$ si et seulement si $f$ est injective (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$).

**Pistes en cas de blocage :**

- *Condition nécessaire* : si $N$ est une norme, que dit l'axiome de séparation pour un $x \in \mathrm{Ker}\, f$ ?
- *Condition suffisante* : supposer $f$ injective. Séparation : $N(x) = 0 \Rightarrow \|f(x)\| = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Homogénéité et inégalité triangulaire : utiliser la **linéarité** de $f$ puis les propriétés de $\|\cdot\|$.

## Exercice 13

**Réponse(s) :** $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

**Pistes en cas de blocage :**

- **Stratégie** : en dimension finie, le théorème du rang pour $f - \mathrm{Id}_E$ donne $\dim \mathrm{Ker} + \dim \mathrm{Im} = \dim E$. Il suffit donc de montrer que l'intersection $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ est réduite à $\{0\}$.
- Soit $x$ dans l'intersection : $f(x) = x$ et il existe $a$ tel que $x = f(a) - a$.
- Montrer par récurrence que $f^{n+1}(a) - f^n(a) = x$ pour tout $n$ (utiliser $f^n(x) = x$ car $f(x) = x$).
- Sommer ces égalités pour $k$ de 0 à $n-1$ (télescopage) : $f^n(a) = a + nx$.
- Utiliser l'hypothèse $\|f(y)\| \leq \|y\|$ : par récurrence, $\|f^n(a)\| \leq \|a\|$. Donc $\|a + nx\| \leq \|a\|$ pour tout $n$.
- Minorer $n\|x\| = \|(a + nx) - a\| \leq \|a + nx\| + \|a\| \leq 2\|a\|$ pour tout $n$ : que peut-on en conclure sur $x$ ?
- Conclure avec le théorème du rang : somme directe de dimension $\dim E$, donc égale à $E$.