Exercice 1. (♡♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de A et une base des sous-espaces propres associés.
2) En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible que l'on déterminera telles que $D = P^{-1}AP$.
3) **Commutant.** Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec D. En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A.
4) **Recherche de racines carrées.**
   -a- Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$ et $N = P^{-1}MP$.
   Calculer N^2, en déduire N.
   -b- Déterminer le nombre de matrices M telles que $M^2 = A$.

Exercice 2. (♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le rang de A. En déduire sans le calculer, le polynôme caractéristique de A.
2) Déterminer les éléments propres de A (valeurs propres et sous-espaces propres).

Exercice 3. (♡♡) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice constituée uniquement de 1.

1) Déterminer les valeurs propres de A et leur multiplicité sans calculer le polynôme caractéristique.
2) Déterminer les sous espaces propres de A.

Exercice 4 Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Par deux méthodes déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$.

Exercice 5. (∗) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. (∗) Déterminer valeurs propres et sous espaces propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & b \\ 0 & a & \ldots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \ldots & a & 0 \\ b & 0 & \ldots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Exercice 7. (♡) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer un polynôme annulateur P de A de degré 2.
2) En effectuant la division euclidienne de X^n par P. Calculer A^n (on exprimera A^n en fonction de A et I_3).

Exercice 8. (♡♡) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables?

Exercice 9. (♡♡) On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer χ_A.
2) Calculer $\dim(\mathrm{Ker}(A + I_3))$.
3) On pose $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$.
4) Calculer A^k pour tout entier naturel k.
5) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} A^k$.

Exercice 10. (♡♡) Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
3) En déduire le terme général de la suite (u_n).

Exercice 11. (∗) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ en fonction de ceux de $A + B$ et $A - B$.

Exercice 12. (♡♡) Montrer que M et $M^\top$ ont mêmes valeurs propres

Exercice 13. (♡♡) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Z}_-$.

Exercice 14. (∗) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 15. (∗) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(M) = 0$ et $M^3 - 4M^2 + 4M = 0_n$. Montrer que $M = 0_n$.

Exercice 16. (♡♡) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit p un projecteur de E.
   -a- Montrer que toute valeur propre λ de p vérifie, $\lambda^2 - \lambda = 0$.
   -b- En déduire que p a au plus deux valeurs propres que l'on déterminera.
   -c- Quels sont les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres?
2) Soit s une symétrie de E.
   -a- Montrer que toute valeur propre λ de s vérifie, $\lambda^2 - 1 = 0$.
   -b- En déduire que s a au plus deux valeurs propres que l'on déterminera.
   -c- Quels sont les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres?

Exercice 17. (∗) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = (X - 1)P'$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 18. (∗) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et f définie sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ par $f(P)(X) = (X-a)(X-b)P'(X) - (2nX - n(a+b) + c)P(X)$.
Montrer que f est un endomorphisme, dont on déterminera les éléments propres (vecteurs propres et valeurs propres).

Exercice 19. (♡♡) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = M^\top$.

1) Déterminer un polynome annulateur de f.
2) Déterminer les valeurs et les sous espaces propres de f.
3) Calculer la trace de f et son déterminant.

Exercice 20. (∗) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Posons $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall\ M \in E,\ f(M) = M + \text{tr}(M)A$.

1) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de f.
2) En déduire le polynôme caractéristique de f.
3) Déterminer la dimension de $E_0(f)$.

Exercice 21. (♡♡) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\phi(M) = AM$.
Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de ϕ.

Exercice 22. (∗) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(M) = AM$.

1) Montrer que toute valeur propre de A est une valeur propre de φ.
2) Caractériser le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi)$ et en déduire sa dimension en fonction de celle de $E_\lambda(A)$.

Exercice 23. (∗)
Soient a, b, c trois réels distincts. On considère l'application f de $\mathbb{R}_2[X]$ qui, à chaque polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, associe son reste dans la division euclidienne de X^3P par $(X-a)(X-b)(X-c)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Démontrer que, si λ est valeur propre de f, alors $\lambda \in \{a^3, b^3, c^3\}$. Pour chacune de ces possibilités, quels sont les seuls vecteurs propres possibles ?
Indication : on pourra faire évaluer l'égalité $f(P) = \lambda P$ en a, b, c.
3) Démontrer que les trois réels a^3, b^3, c^3 sont effectivement valeurs propres de f et identifier les vecteurs propres associés.

Exercice 24. (∗) On note $u : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto XP' + P \end{cases}$.

1) Montrer que u est un endomorphisme.
2) En préciser les valeurs propres.

Suppléments 5/2

Exercice 25. (∗∗) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.

1) Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E composée de vecteurs propres de f.
2) Soit F un sous espace de E, stable par f, de dimension non nulle. Montrer que F admet une base composée de vecteurs de $\mathcal{B}$.
3) Déterminer le nombre de sous espaces vectoriels de E stables par f.

Exercice 26. (∗∗) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $B \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n+1$, scindé à racines simples.
On note $(a_0, \cdots, a_n)$ les racines de B et $(L_0, \ldots, L_n)$ la base de $\mathbb{K}_n[X]$ composée des polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux points $a_0, \ldots, a_n$.
Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et f l'application qui, à $P \in \mathbb{K}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
2) Déterminer, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $f(L_i)$.
3) En déduire le spectre de f.

Exercice 27. (∗∗) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions ayant une limite nulle en $\pm\infty$.
Soit u définie sur E par $u(f)(x) = f(2x)$.
Montrer que u est un endomorphisme, puis que u n'a pas de valeurs propres.

Exercice 28. $(***)$ Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $G(f)$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad G(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt$$

1) Montrer que G est bien défini et est un endomorphisme de E.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(G)$ et $\mathrm{Im}(G)$.
3) Déterminer les éléments propres de G.