Ce document donne, pour chaque exercice de la fiche, le résultat attendu et une indication de méthode, sans rédaction complète. L'objectif est de permettre de débloquer une question sans donner la solution rédigée. Essayez d'abord de chercher seul(e). Si vous bloquez, lisez la piste (sans la réponse), retentez, puis seulement ensuite comparez avec la réponse. Les pistes ne sont pas des rédactions : à vous de justifier proprement.

Exercice 1

Réponse(s) :

1) $\chi_A = -X(X-1)(X+1)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, -1\}$ avec $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$, $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

2) $D = \mathrm{diag}(0, 1, -1)$ et $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3) Commutant de D : les matrices diagonales. Commutant de A : $\{P\Delta P^{-1}\,;\,\Delta \text{ diagonale}\} = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$, de dimension 3.

4) $N^2 = D$, N est diagonale, et il n'existe *aucune* racine carrée réelle et il en existe quatre complexes: le nombre de matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est 0 et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, il y en a 4.

Pistes en cas de blocage :

1) Calculer $\det(A - \lambda I_3)$, en commençant par exemple par $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$.

2) Les vecteurs propres obtenus forment une base car famille libre (vecteurs propres assoiciés à des valeurs propres distinctes). La matrice P a pour colonnes ces vecteurs, D contient les valeurs propres *dans le même ordre.*

3) Poser Δ avec ses coefficients et résoudre le système $D\Delta = \Delta D$
Pour A : $AM = MA \iff .... \iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D$.

4) -a- $N^2 = P^{-1}M^2P$. De plus N commute avec $N^2 = D$; appliquer la question 3. Écrire ensuite l'équation $N^2 = D$ sur chaque coefficient diagonal.

Exercice 2

Réponse(s) :

1) $\mathrm{rg}\, A = 1$; $\chi_A = X^2(X+7)$.

2) $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -7\}$; $E_0 = \{(x, y, z)\,;\, x + 2y - 3z = 0\}$ (plan, dimension 2) ; $E_{-7} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right)$.

Pistes en cas de blocage :

1) Les colonnes de A sont proportionnelles. Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, A = 2$: que dit cela de la multiplicité de 0 comme racine de χ_A ? Utiliser $\mathrm{Tr}(A)$ pour la dernière valeur propre.

2) $E_0(A) = \mathrm{Ker}\, A$: une seule équation. Pour E_{-7} : repérer une relation de liaison sur les colonnes.

Exercice 3

Réponse(s) : $\mathrm{Sp}(A) = \{0, n\}$; 0 est de multiplicité $n-1$ et n de multiplicité 1.

$E_n(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\right)$; $E_0(A) = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} ; x_1 + \cdots + x_n = 0\right\}$ (hyperplan).

Pistes en cas de blocage :

1) Rang de A ? Que dit le théorème du rang sur $\dim \mathrm{Ker}\, A$? Comparer à la multiplicité de 0 dans χ_A. Pour l'autre valeur propre, utiliser la trace.

2) $E_0 = \mathrm{Ker}\, A$: une équation. Pour E_n, utiliser la multiplicité de n pour calculer sa dimension et repérer une relation de liaison.

Exercice 4

Réponse(s) : $\chi_A = (X - a + b)^{n-1}\big(X - a - (n-1)b\big)$.

Pistes en cas de blocage :

- **Méthode 1** : retirer à A la matrice αI avec α bien choisi pour obtenir une matrice qui n'est pas de rang n.
- **Méthode 2** : calculer $\det(\lambda I_n - M)$ directement. Dans le déterminant, ajouter toutes les colonnes à la première ($C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$), factoriser le terme commun, puis soustraire la première ligne aux autres pour faire apparaître une matrice triangulaire.

Exercice 5

Réponse(s) : Pour $n \geq 2$: 0 (de multiplicité $n-2$ pour $n \geq 3$) et les deux racines de $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$, à savoir $\dfrac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}$.

Pistes en cas de blocage :

- Que vaut le rang de la matrice? et donc la dimension du noyau ? Quelle valeur propre obtient-on, avec quelle multiplicité?
- Pour les autres valeurs propres : utiliser $\mathrm{Tr}(M)$ et $\mathrm{Tr}(M^2)$. Si λ est valeur propre de M quelle valeur propre obtient-on pour M^2?
- Alternative : $\lambda \neq 0$, écrire $MX = \lambda X$ par coordonnées : les lignes 2 à n donnent $x_i = x_1/\lambda$; la première ligne donne alors une équation du second degré en λ.

Exercice 6

Réponse(s) : Si $b = 0$: $A = aI_{2n}$.

Si $b \neq 0$: $\mathrm{Sp}(A) = \{a+b,\, a-b\}$; $E_{a-b} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\ 0\\-1\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1\\-1\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\right)$, $E_{a+b} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\ 0\\1\end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1\\1\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\right)$ chacun de dimension n.

Pistes en cas de blocage :

- Pour les valeurs propres, calculer le polynôme caractéristique en sommant les colonnes symétriques.
  Ou bien, repérer directement, que $A - \lambda\,\mathrm{i}$ n'est pas de rang $2n$ avec des valeurs judicieuses de λ.
- Pour les sous-espaces propres, repérer des relations de liaison sur les colonnes.

Exercice 7

Réponse(s) :

1) $P = (X-1)(X-4) = X^2 - 5X + 4$.
2) $A^n = \dfrac{4^n - 1}{3} A + \dfrac{4 - 4^n}{3} I_3$.

Pistes en cas de blocage :

1) Calculer A^2,...
2) Méthode classique, écrire la division euclidienne de X^n par P, $X^n = Q\,P + \alpha X + \beta$ (reste de degré ≤ 1). Évaluer en les racines de P pour obtenir un système 2×2 en (α, β). Substituer A dans l'égalité. (Conseil : vérifier avec $n = 0, 1$).

Exercice 8

Réponse(s) : Non : A et B ont le même polynôme caractéristique $(X-1)(X-2)^2$, mais les sous-espaces propres associés à la valeur propre 2 n'ont pas même dimension, elles ne peuvent donc pas être la matrice d'un même endomorphisme.

Pistes en cas de blocage :

- Calculer χ_A et χ_B.
- Si les polynômes caractéristiques diffèrent, c'est fini. Ici ils sont égaux : comparer les **dimensions des sous-espaces propres** en calculant le rang.

Exercice 9

Réponse(s) :

1) $\chi_A = (X+1)^3$.
2) $\dim \operatorname{Ker}(A + I_3) = 1$.
3) Par exemple $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4) $A^k = PT^kP^{-1}$ et T^k calculé grâce à $T = -I_3 + N$ et la formule du binôme.

$$T^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & -k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} A^k = e^{-x} P \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Pistes en cas de blocage :

1) Par exemple, commencer par $C_3 \leftarrow C_2 + C_3$.
2) Calculer le rang de $A + I_3$ puis le théorème du rang.
3) Méthode classique maintenant. Passer par l'endomorphisme f canoniquement associé à A, on cherche une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ vérifiant....
4) Utiliser $A^k = PT^kP^{-1}$. Et calculer T^k à l'aide de la formule du binôme.
5) Calculer la somme coeff par coeff et utiliser la série exponentielle $\sum \dfrac{(-x)^k}{k!}$.

Exercice 10

Réponse(s) :

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

2) $\chi_A = (X-2)(X+3)$.

3) $u_n = \alpha\, 2^n + \beta\,(-3)^n$ avec $\alpha = \dfrac{3u_0+u_1}{5}$ et $\beta = \dfrac{2u_0-u_1}{5}$.

Pistes en cas de blocage :

1) $X_{n+1} = (u_{n+1}, u_{n+2})^T$: exprimer u_{n+2} avec la relation.

2) Déterminer deux vecteurs propres associés aux deux valeurs propres distinctes 2 et -3. On trouve $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

3) $X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$: le terme général est une combinaison linéaire de 2^n et $(-3)^n$. Déterminer les deux coefficients avec u_0 et u_1 (système 2×2).

Exercice 11

Réponse(s) : $\chi_C = \chi_{A+B} \cdot \chi_{A-B}$.

Pistes en cas de blocage :

- Écrire $\chi_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda I - A & -B \\ -B & \lambda I - A \end{pmatrix}$.
- Opérations par blocs (comme pour un déterminant) : ajouter le deuxième bloc de lignes au premier ; puis, dans le déterminant obtenu, soustraire le premier bloc de colonnes au second. Vous obtenez une matrice triangulaire par blocs.
- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs = produit des déterminants des blocs diagonaux.

Exercice 12

Réponse(s) : $\chi_{M^T} = \chi_M$, donc M et M^T ont mêmes valeurs propres.

Pistes en cas de blocage :

- Écrire $\lambda I_n - M^T = (\lambda I_n - M)^T$.
- Utiliser $\det(N^T) = \det(N)$.
- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

Exercice 13

Réponse(s) : $\mathrm{Tr}(A) = -m$ où m est un entier naturel (multiplicité de j comme valeur propre de A).

Pistes en cas de blocage :

- $X^3 + X^2 + X = X(X^2+X+1) = X(X-j)(X-j^2)$ est annulateur de A : ses racines complexes sont 0, j, j^2. Les valeurs propres complexes de A sont donc parmi celles-ci.
- A est réelle, donc χ_A est à coefficients réels : j et $\bar{j} = j^2$ ont *même multiplicité* m dans χ_A.
- La trace est la somme des valeurs propres complexes avec multiplicité : calculer $m\,j + m\,j^2$ en rappelant que $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice 14

Réponse(s) : $\det A > 0$.

Pistes en cas de blocage :

- Le déterminant est le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité.
- $P = X^3 - X - 1$ est annulateur de A. Étudier les racines de P : une seule racine réelle r (étudier les variations de P, ou son discriminant) et deux racines complexes conjuguées $z, \bar{z}$.
- Montrer que $r > 0$: $P(x) < 0$ pour tout $x \leq 0$ (étudier le signe de $x^3 - x - 1$ sur $]-\infty, 0]$).
- $\det A$ est le produit des valeurs propres complexes avec multiplicité. Comme A est réelle, z et $\bar{z}$ ont la même multiplicité b ; donc $\det A = r^a \, |z|^{2b}$ avec $r > 0$, et ce nombre est strictement positif (il est non nul puisque $A(A^2 - I_n) = I_n$).

Exercice 15

Réponse(s) : $M = 0_n$.

Pistes en cas de blocage :

- $X^3 - 4X^2 + 4X = X(X-2)^2$ est annulateur de M : les valeurs propres complexes de M sont dans $\{0, 2\}$.
- Écrire $\mathrm{Tr}(M) = 2m$ où m est la multiplicité de 2 dans χ_M. Que dit $\mathrm{Tr}(M) = 0$ sur m ? Donc 2 n'est pas valeur propre.
- Alors $M - 2I_n$ est inversible. Dans $M(M - 2I_n)^2 = 0$, multiplier par l'inverse de $(M - 2I_n)^2$.

Exercice 16

Réponse(s) :

1) Projecteur p : valeurs propres dans $\{0, 1\}$; $E_1(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, p$ et $E_0(p) = \mathrm{Ker}\, p$.
2) Symétrie s : valeurs propres dans $\{-1, 1\}$; $E_1(s) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $E_{-1}(s) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$, avec $E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)$.

Pistes en cas de blocage :

1) Polynôme annulateur de p?
2) Polynôme annulateur de s?

Exercice 17

Réponse(s) : $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 1, \ldots, n\}$ (valeurs propres simples) et $E_k(f) = \mathrm{Vect}\left((X-1)^k\right)$.

Pistes en cas de blocage :

- On peut résoudre l'équation aux éléments propres $f(P) = \lambda P$ qui se ramène à la résolution de l'équation différentielle $(x-1)y' = \lambda y$ où y doit être une fonction polynomiale de degré au plus n.
  La solution générale de l'équation différenielle est : $x \mapsto \alpha(x-1)^\lambda$.

Exercice 18

Réponse(s) : Finalement un peu difficile sans indication...Ou alors très calculatoire. Exercice pas si intéressant en l'état... f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. Pour $a \neq b$: f admet $2n+1$ valeurs propres distinctes

$$\lambda_k = (k-n)(a-b) - c, \qquad k \in [\![0, 2n]\!],$$

et $E_{\lambda_k} = \mathrm{Vect}\left((X-a)^k (X-b)^{2n-k}\right)$. (Si $a = b$: seule valeur propre $-c$, avec $E_{-c} = \mathrm{Vect}\left((X-a)^{2n}\right)$.)

Pistes en cas de blocage :

- *Endomorphisme* : la linéarité est immédiate. Pour la stabilité, regarder le degré : si $\deg P = d$, quel est le coefficient de X^{d+1} dans $f(P)$? Que se passe-t-il pour $d = 2n$?
- *Éléments propres* : comme l'exercice en précédent, résoudre l'équation aux éléments propres, qui donne une équation différentielle. Beaucoup plus de calculs...

Exercice 19

Réponse(s) :

1) $X^2 - 1$ est annulateur de f ($f \circ f = \mathrm{Id}$).
2) $\mathrm{Sp}(f) = \{1, -1\}$ pour $n \geq 2$; $E_1(f) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (matrices symétriques, dimension $\frac{n(n+1)}{2}$) ; $E_{-1}(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (anti-symétriques, dimension $\frac{n(n-1)}{2}$).
3) $\mathrm{Tr}\, f = n$ et $\det f = (-1)^{n(n-1)/2}$.

Pistes en cas de blocage :

1) Calculer $f(f(M))$.
2) Les valeurs propres sont racines du polynôme annulateur. $M \in E_{-1} \iff ...$, $M \in E_1 \iff ....$ Rappeler que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
3) Choisir une base adaptée à $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$: la matrice de f y est diagonale, avec 1 sur $\dim \mathcal{S}_n$ coefficients et -1 sur $\dim \mathcal{A}_n$ coefficients. Trace = somme, déterminant = produit.

Exercice 20

Réponse(s) :

1) $f^2 = 2f - \mathrm{Id}$, donc $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ est annulateur.
2) $\chi_f = (X-1)^{n^2}$.
3) Faute d'énoncé, on demandait plutôt $E_1(f)$: $E_1(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$, de dimension $n^2 - 1$.

Pistes en cas de blocage :

1) Calculer $\mathrm{Tr}(f(M))$ en utilisant $\mathrm{Tr}(A) = 0$, puis $f(f(M))$ en fonction de M et $f(M)$.
2) Les valeurs propres sont parmi les racines d'un polynôme annulateur. La seule valeur propre possible est 1. La dimension de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est n^2.
3) Pour E_1 : résoudre $f(M) = M$, c'est-à-dire $\mathrm{Tr}(M)A = 0$ c'est-à-dire $\mathrm{Tr}(M) = 0$

Exercice 21

Réponse(s) : $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1, 2\}$.

$$E_1(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} (\dim 2), \qquad E_2(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \right\} (\dim 2).$$

Pistes en cas de blocage :

- **Méthode 1** : écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on obtient : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis méthode classique (polynôme caractéristique...)

- **Méthode 2** : calculer les valeurs propres de A : 1 et 2.
Écrire M en colonnes $(C_1\ C_2)$: alors $AM = (AC_1\ AC_2)$. L'équation $AM = \lambda M$ revient à $AC_j = \lambda C_j$ pour chaque colonne.

- Les colonnes de M appartiennent donc à $E_\lambda(A)$. Déterminer $E_1(A)$ et $E_2(A)$, puis décrire les matrices dont les deux colonnes sont dans ce sous-espace.

Exercice 22

Réponse(s) :

1) Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, la matrice M dont les colonnes sont $X, 0, \dots, 0$ vérifie $\varphi(M) = \lambda M$.

2) $E_\lambda(\varphi) = \{M\,;$ toutes les colonnes de M sont dans $E_\lambda(A)\}$, et $\dim E_\lambda(\varphi) = n \cdot \dim E_\lambda(A)$.

Pistes en cas de blocage :

1) Construire une matrice non nulle dont chaque colonne est un multiple (éventuellement nul) de X, et calculer AM colonne par colonne.

2) Même raisonnement qu'à l'exercice 21 : $AM = \lambda M \iff AC_j = \lambda C_j$ pour toute colonne C_j. L'application $M \mapsto (C_1, \dots, C_n)$ est un isomorphisme de $E_\lambda(\varphi)$ sur $E_\lambda(A)^n$.

Exercice 23

Réponse(s) : f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathrm{Sp}(f) = \{a^3, b^3, c^3\}$, et

$$E_{a^3} = \mathrm{Vect}\big((X-b)(X-c)\big), \quad E_{b^3} = \mathrm{Vect}\big((X-a)(X-c)\big), \quad E_{c^3} = \mathrm{Vect}\big((X-a)(X-b)\big).$$

Pistes en cas de blocage :

1) Le reste d'une division euclidienne par un polynôme de degré 3 est de degré ≤ 2. La linéarité vient de l'unicité de la division euclidienne : le reste de $X^3(\alpha P + Q)$ est $\alpha f(P) + f(Q)$.

2) Écrire $X^3 P = S \cdot (X-a)(X-b)(X-c) + f(P)$ et évaluer en a, b, c. Si $f(P) = \lambda P$: $(a^3 - \lambda)P(a) = 0$, etc. Si λ est différent de a^3, b^3, c^3, que dire de P ? Pour $\lambda = a^3$ (les cubes sont distincts car $x \mapsto x^3$ est injective), que dire de $P(b), P(c)$? Combien de racines a P ?

3) Prendre $P = (X-b)(X-c)$ et montrer que $f(P)$ et $a^3 P$ coïncident en a, b, c ; deux polynômes de degré ≤ 2 égaux en trois points sont égaux.

Exercice 24

Réponse(s) : u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ avec $u(X^k) = (k+1)X^k$; $\mathrm{Sp}(u) = \mathbb{N}^*$ et $E_{k+1}(u) = \mathrm{Vect}(X^k)$.

Pistes en cas de blocage :

- Linéarité de la dérivation et du produit par X ; $\deg(XP' + P) \leq \deg P$, donc u envoie $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.

- On peut résoudre l'équation aux éléments propres $f(P) = \lambda P$ qui se ramène à la résolution de l'équation différentielle $xy' + y = \lambda y$ où y doit être une fonction polynomiale (ce qui imposera des conditions sur λ).

Suppléments

Exercice 25

Réponse(s) :

1) f est diagonalisable.
2) **Question difficile**. Tout sous-espace stable non nul est engendré par une sous-famille de $\mathcal{B}$.
3) Il y a exactement 2^n sous-espaces stables par f (y compris $\{0\}$ et E).

Pistes en cas de blocage :

1) Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre (résultat du cours). Compter : n vecteurs libres en dimension n.
2) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f. Le polynôme caractéristique de f est $\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.
   On pose $g = f_{|F}$ l'endomorphisme induit par f sur F alors χ_g divise χ_f donc $\mathrm{Sp}(g) \subset \mathrm{Sp}(f)$.
   Soit λ_k une valeur propre de g (elle l'est alors pour f). Un vecteur propre de g est aussi un vecteur propre de f, or $E_{\lambda_k}(f)$ est de dimension 1 donc $e_k \in E_{\lambda_k}(g) \subset G$.
   Donc pour les p vp de g les vecteurs e_k correspondant sont dans G, ils forment une famille libre de bon cardinal donc une base G.
3) Réciproquement, tout sous-espace $\mathrm{Vect}(e_i; i \in I)$ est stable. Les sous-espaces stables sont donc en bijection avec les parties I de $[\![1, n]\!]$.

Exercice 26

Réponse(s) :

1) f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
2) $f(L_i) = A(a_i)\, L_i$.
3) $\mathrm{Sp}(f) = \{A(a_0), \dots, A(a_n)\}$.

Pistes en cas de blocage :

1) Le reste de la division par B (de degré $n+1$) est de degré $\leq n$; la linéarité vient de l'unicité de la division euclidienne.
2) Écrire $AL_i = QB + f(L_i)$ et évaluer en chaque a_j (racines de B) : $f(L_i)(a_j) = A(a_j)L_i(a_j) = A(a_j)\delta_{ij}$. Un polynôme de degré $\leq n$ est déterminé par ses valeurs en $n+1$ points distincts.
3) La matrice de f dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ est diagonale. Lire le spectre sur la diagonale.

Exercice 27

Réponse(s) : u est un endomorphisme de E et u n'a pas de valeur propre.

Pistes en cas de blocage :

- *Endomorphisme* : linéarité immédiate. $x \mapsto f(2x)$ est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$, donc $u(f) \in E$.
- *Pas de valeur propre* : raisonner par l'absurde, supposer $f(2x) = \lambda f(x)$ pour tout x, avec $f \neq 0$. Choisir x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. Exprimer $f(2^n x_0)$ et $f(x_0/2^n)$ avec λ^n, λ^{-n}.
- Dans un premier temps, éliminer $\lambda = 0$. Puis : le comportement en $+\infty$ (ou $-\infty$) impose $|\lambda| < 1$; le comportement en 0 (continuité de f en 0, donc f bornée au voisinage de 0) impose $|\lambda| \geq 1$. Contradiction.

Exercice 28

Réponse(s) :

1) $G(f)(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt + x\int_x^1 f(t)\,dt$; $G(f)$ est de classe C^1 (même C^2), et $G(f)'(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$, $G(f)'' = -f$.

2) $\operatorname{Ker} G = \{0\}$; $\operatorname{Im} G = \{g \in C^2([0,1],\mathbb{R})\,;\, g(0) = 0,\ g'(1) = 0\}$.

3) $\operatorname{Sp}(G) = \left\{\dfrac{4}{(2k+1)^2\pi^2}\,;\, k \in \mathbb{N}\right\}$, avec $E_{\lambda_k} = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2}\right)$.

Pistes en cas de blocage :

1) Séparer l'intégrale selon que $t \le x$ ou $t \ge x$: $\min(x,t) = t$ pour $t \le x$ et x pour $t \ge x$. Les deux intégrales sont des fonctions continues de x. Dériver (théorème fondamental de l'analyse) deux fois.

2) *Noyau* : si $G(f) = 0$, alors $G(f)' = 0$, donc $\int_x^1 f = 0$ pour tout x ; dériver encore.
Image : les conditions $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$ sont nécessaires (que valent $G(f)(0)$ et $G(f)'(1)$?). Pour la réciproque, étant donné g, poser $f = -g''$ et calculer $G(-g'')$ par intégrations par parties.

3) Comme $\operatorname{Ker} G = \{0\}$, 0 n'est pas valeur propre.
Si $G(f) = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$, alors $f = G(f)/\lambda$ est de classe C^2 et on obtient le problème

$$\lambda f'' + f = 0, \qquad f(0) = 0, \quad f'(1) = 0.$$

Distinguer $\lambda < 0$ (solutions en sinh / exponentielles : aucune solution non nulle) et $\lambda > 0$ (solutions en $\sin(\omega x)$ avec $\omega = 1/\sqrt{\lambda}$: la condition $f'(1) = 0$ impose $\cos\omega = 0$). Pour la réciproque, vérifier que $G(f_k) = \lambda_k f_k$ avec les conditions aux bords et $-g'' = f_k$.