Rappels Python et programmation dynamique

ITC PC

M. Charles

23/09/2024

Introduction

Fibonacci

Écrire une fonction Python de signature `fib(n: int) -> int` qui prend en paramètre un nombre n et renvoie F_n défini par :

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Fibonacci

Écrire une fonction Python de signature `fib(n: int) -> int` qui prend en paramètre un nombre n et renvoie F_n défini par :

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Deux solutions :

```python
def fib(n: int) -> int:
    if n == 0:
        return 0
    elif n == 1:
        return 1
    else:
        return fib(n-1) + fib(n-2)
```

Fibonacci

Écrire une fonction Python de signature `fib(n: int) -> int` qui prend en paramètre un nombre n et renvoie F_n défini par :

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Deux solutions :

```python
def fib(n: int) -> int:
    if n == 0:
        return 0
    elif n == 1:
        return 1
    else:
        return fib(n-1) + fib(n-2)
```

```python
def fib(n: int) -> int:
    if n == 0:
        return 0
    u = 0
    v = 1
    for i in range(n-1):
        temp = u + v
        u = v
        v = temp
    return v
```

Fibonacci

Sur quels critères comparer ces deux solutions ? L'une est-elle meilleure que l'autre ?

Fibonacci

Sur quels critères comparer ces deux solutions ? L'une est-elle meilleure que l'autre ?

- Complexité en temps :
  - Solution 1 : $O(F_n)$!
  - Solution 2 : $O(n)$

Fibonacci

Sur quels critères comparer ces deux solutions ? L'une est-elle meilleure que l'autre ?

- Complexité en temps :
  - Solution 1 : $O(F_n)$!
  - Solution 2 : $O(n)$
- Complexité en espace :
  - Solution 1 : $O(F_n)$ également…
  - Solution 2 : $O(1)$

Fibonacci

Sur quels critères comparer ces deux solutions ? L'une est-elle meilleure que l'autre ?

- Complexité en temps :
  - Solution 1 : $O(F_n)$!
  - Solution 2 : $O(n)$
- Complexité en espace :
  - Solution 1 : $O(F_n)$ également…
  - Solution 2 : $O(1)$

Quelle différence de fonctionnement explique une telle différence ?

Programmation dynamique

Définition

On considère des problèmes qui vérifient les conditions suivantes :

- le problème peut être décomposé en sous-problèmes plus simples ;
- une solution (optimale) au problème peut s'obtenir à partir de solutions (optimales) aux sous-problèmes ;
- les sous-problèmes ne sont pas indépendants entre eux (on parle de *chevauchement* ou de *recouvrement*).

Définition

On considère des problèmes qui vérifient les conditions suivantes :

- le problème peut être décomposé en sous-problèmes plus simples ;
- une solution (optimale) au problème peut s'obtenir à partir de solutions (optimales) aux sous-problèmes ;
- les sous-problèmes ne sont pas indépendants entre eux (on parle de *chevauchement* ou de *recouvrement*).

Dans ce cas, on peut faire de la programmation dynamique :

La **programmation dynamique** est une méthode algorithmique dans laquelle on décompose le problème en sous-problèmes plus simples et on stocke les résultats intermédiaires de calculs (on parle de *mémoïsation*).

Retour sur Fibonacci

Le calcul des termes de la suite de Fibonacci est un exemple de problème propice à la résolution par programmation dynamique :

- pour calculer F_n, on peut d'abord calculer F_{n-1} et F_{n-2} qui sont tout deux plus simples ;
- connaître F_{n-1} et F_{n-2} permet de retrouver F_n ;
- les calculs de F_{n-1} et F_{n-2} se recouvrent.

Un exemple plus compliqué

Écrire une fonction python d'en-tête `C(n: int, k: int) -> int` qui calcule le coefficient binomiale $\binom{n}{k}$ en utilisant la formule de Pascal.

Solution naïve

```python
def C(n: int, k: int) -> int:
    if k == 0 or k == n:
        return 1
    else:
        return C(n-1,k) + C(n-1,k-1)
```

Solution naïve

```
def C(n: int, k: int) -> int:
    if k == 0 or k == n:
        return 1
    else:
        return C(n-1,k) + C(n-1,k-1)
```

Problème(s) ?

Solution avec mémoïsation

Comment peut-on stocker les résultats intermédiaires ?

Solution avec mémoïsation

Comment peut-on stocker les résultats intermédiaires ?

Solution : dictionnaires !

Solution avec mémoïsation

```python
M = {}

def C(n: int, k: int) -> int:
    if k == 0 or k == n:
        return 1
    elif (n,k) in M:
        return M[n,k]
    else:
        M[n,k] = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)
        return M[n,k]
```

Un code plus propre

```python
def C(n: int, k: int) -> int:
    M = {}

    def C_rec(n: int, k: int) -> int:
        if k == 0 or k == n:
            return 1
        elif (n,k) in M:
            return M[n,k]
        else:
            M[n,k] = C_rec(n-1,k) + C_rec(n-1,k-1)
            return M[n,k]

    return C_rec(n,k)
```

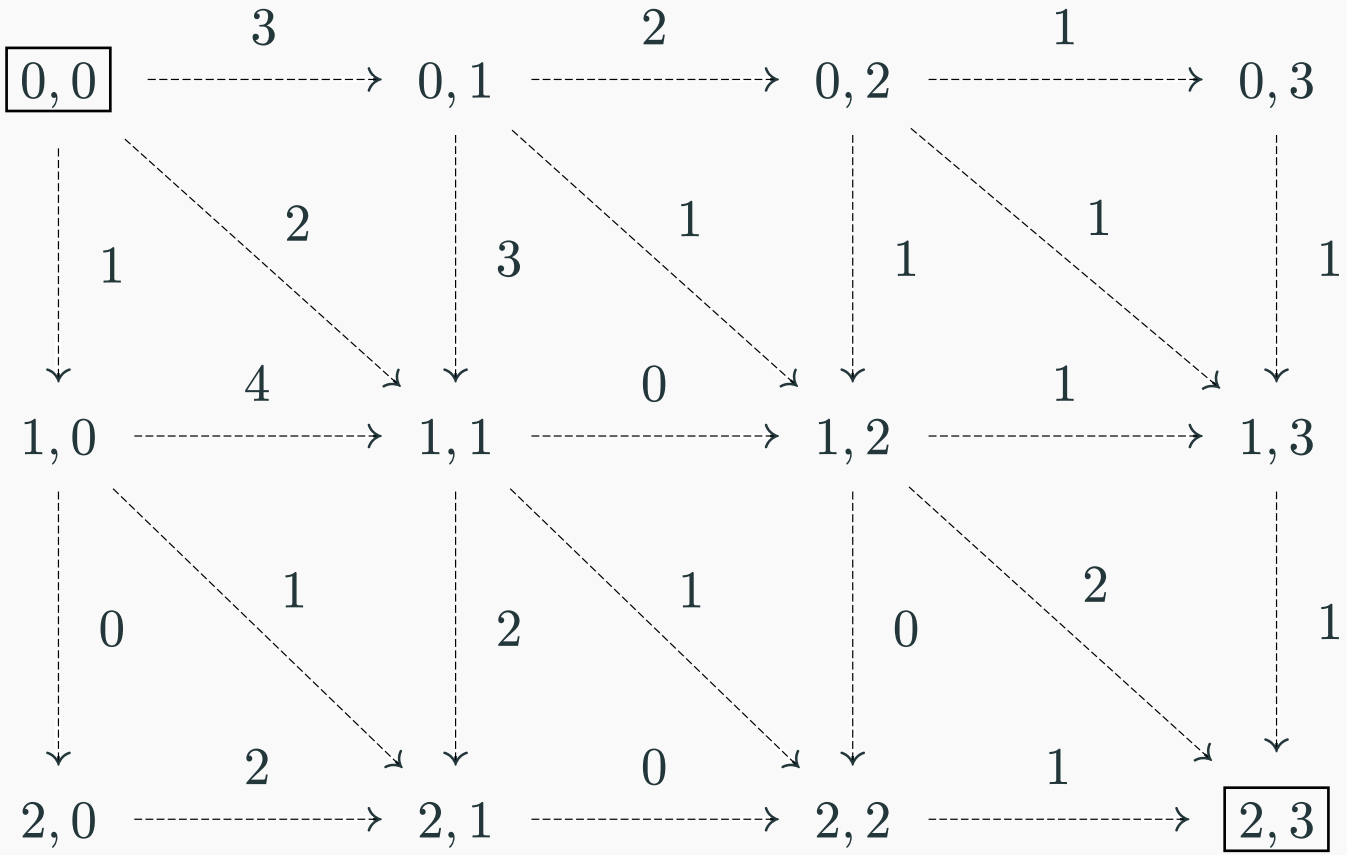
```python
def C(n: int, k: int, M = {}) -> int:
    if k == 0 or k == n:
        return 1
    elif (n,k) in M:
        return M[n,k]
    else:
        M[n,k] = C(n-1,k, M) + C_rec(n-1,k-1, M)
        return M[n,k]
```

Exercice

On dispose d'une grille rectangulaire de $(n+1) \times (m+1)$ cellules, réliées par des arc pondérés positivement dans seulement trois directions : S, E, SE.

Le but est de trouver la longueur d'un plus court chemin de $(0,0)$ à (n,m).

Exercice : diagramme



Exercice : solution

```python
def D(n, m, poids: dict) -> int:
    dist = {}

    def D_rec(n, m) -> int:
        if (n,m) in dist:
            return dist[(n,m)]

        if m == 0 and n == 0:
            dist[(0,0)] = 0
        elif m == 0:
            dist[(n,0)] = D_rec(n-1, 0) + poids[(n-1,0), (n, 0)]
        else if n == 0:
            dist[(0,m)] = D_rec(0,m-1) + poids[(0,m-1), (0,m)]
        else:
            dist[(n,m)] = min(
                D_rec(n-1, m-1) + poids[(n-1, m-1), (n, m)],
                D_rec(n-1, m) + poids[(n-1, m), (n, m)],
                D_rec(n, m-1) + poids[(n, m-1), (n, m)]
            )

        return dist[(n,m)]

    return D_rec(n,m,poids)
```

Approche dite **top-bottom**.

Exercice : une autre solution

```python
def D(n, m, poids: dict) -> int:
  dist = np.zeros((n+1, m+1)) # valeur initiale arbitraire

  dist[0, 0] = 0
  for i in range(1, n+1):
      dist[i, 0] = dist[i-1, 0] + poids[(i-1, 0), (i, 0)]
  for j in range(1, m+1):
      dist[0, j] = dist[0, j-1] + poids[(0, j-1), (0, j)]

  for i in range(1, n+1):
      for j in range(1, m+1):
          dist[i, j] = min(
              dist[i-1, j-1] + poids[(i-1, j-1), (i, j)],
              dist[i-1, j] + poids[(i-1, j), (i, j)],
              dist[i, j-1] + poids[(i, j-1), (i, j)]
          )

  return dist[n, m]
```

Approche dite **bottom-up**.

Exercie : remarque

Remarque. La méthode précédente est centrale dans l'algorithme de calcul de la **distance d'édition de Levenshtein**, qui a par exemple pour applications :

- comparaison de deux fichiers texte ($\approx$ Unix : `diff`)
  - gestion de versions
  - détection de plagiat
- correction orthographique

Un peu d'histoire

La paternité de la méthode de programmation dynamique est attribuée à Richard Bellman (1920-1984) qui l'a conceptualisée vers 1952.

- Algorithme de Bellman-Ford pour les plus courts chemins dans un graphe.
- La relation de récurrence liant solution au problème principal et solutions aux sous-problèmes intermédiaires est parfois appelée ***équation de Bellman*** (revoir par exemple F_n et $\binom{n}{k}$).

Problèmes typiquement éligibles

- Problèmes du rendu de monnaie, du sac à dos
- Comparaison de chaînes de caractères
  - plus longue sous-suite commune
  - distance d'édition (de Levenshtein)
- Plus courts chemins dans un graphe
  - Bellman-Ford ($\approx$ Dijkstra mais avec poids de signe quelconque)
  - Floyd-Warshall ($\approx$ Bellman-Ford mais plus efficace dans un graphe dense)

Deux approches possibles

- Calcul de haut en bas (*top-down*)
  Typiquement récursif, avec mémoire passée en argument. On part du problème principal et on descend.
- Calcul de bas en haut (*bottom-up*)
  Typiquement itératif. On part des sous-problèmes les plus élémentaires et on remonte.

Top-down, schéma général

Version avec fonction interne :

```
def f(objet):
    memoire = {...}
    def f_rec(objet intermédiaire):
        if objet intermédiaire not in memoire:
            calculer f_rec sur les sous-objets nécessaires
            combiner les valeurs pour obtenir le résultat
            stocker le résultat dans memoire
        return memoire[objet intermédiaire]
    return f_rec(objet)
```

Top-down, schéma général

Version sans fonction interne mais avec argument optionnel :

```
def f(objet, memoire={...}):
    if objet not in memoire:
        calculer f sur les sous-objets nécessaires
        combiner les valeurs pour obtenir le résultat
        stocker le résultat dans memoire
    return memoire[objet]
```

Bottom-up, schéma général

On aborde les objets intermédiaires par ordre croissant de complexité. Cela suppose de fixer un ordre de parcours pertinent sur les sous-problèmes.

```
def f(objet):
    memoire = {}
    for o in sous_objets_par_ordre_croissant(objet):
        calculer f(o) grâce aux valeurs précédentes
        stocker le résultat dans memoire
    return memoire[objet]
```

Éléments de comparaison des deux approches

- En top-down, on ne résout que les sous-problèmes nécessaires ; en bottom-up, on résout tous les sous-problèmes, mais on ne risque en contrepartie pas de saturer la pile de récursion (limitée à 1000 en Python).
- En bottom-up, on doit concevoir un ordre de parcours sur les sous-problèmes. C'est parfois facile, parfois moins.

Mémoire : dictionnaire ou tableau ?

- **Dictionnaires :** clés plus générales que des entiers ou des uplets, ne prendront que la taille mémoire nécessaire.

  Exemple : coefficients binomiaux, distance de Levenshtein.

- **Tableaux :** nécessitent en principe de savoir à l'avance de quel espace on a besoin en mémoire.

  Exemple : F_n.

Dictionnaires en Python

Un dictionnaire est :

- une collection non ordonnée d'objets : les **valeurs**,
- chacune étant associée à une **clé**, les clés n'ayant pas de type particulier (ex. : couples de couples).

Exemple :

```
>>> d = {'a': 'lettre', 2: 'nombre', (1, 2): 'couple'}
>>> type(d)
<class 'dict'>
```

Cahier des charges

- On veut pouvoir **insérer, modifier ou supprimer** des valeurs arbitraires.

```
>>> d[2] = ...
```

```
>>> del d[2]
```

- On veut pouvoir **tester l'appartenance** d'une clé dans le dictionnaire. (Autrement dit, savoir s'il y a ou non une valeur associée.)

```
>>> ... in d
```

- On veut pouvoir **compter les clés** d'un dictionnaire.
- On veut pouvoir effectuer une **copie indépendante** d'un dictionnaire.

```
>>> len(d)
```

```
>>> e = d.copy()
>>> # modifier e, observer d
```

- Enfin, toutes ces opérations doivent pouvoir être faites **en temps constant** (en $O(1)$).

Différences avec les tableaux ou les listes

Listes ou tableaux :

- accès et modification par position, donc clés doublement pas de type arbitraire ;
- insertion, suppression en $O(n)$ et pas en $O(1)$.

Remarques : techniquement, l'insertion dans un dictionnaire a une complexité au pire de $O(n)$. Mais dans la plupart des cas, la complexité sera en fait $O(1)$.

Méthodes complémentaires : parcours

En Python, on dispose de méthodes permettant de convertir un dictionnaire en un *itérable* sur lequel on pourra faire tourner une boucle.

- Méthode **`keys`** : écrire

  ```
  for k in d.keys()
  ```

  permet de parcourir les clés de `d`.
- Méthode **`items`** : écrire

  ```
  for (k, v) in d.items()
  ```

  permet de parcourir les couples (clé, valeur) de `d`.

On ne connaît a priori pas l'ordre dans lequel Python va effectuer ces parcours.

Exercice

On donne un dictionnaire prérempli `d`. Les clefs sont des noms de villes et les valeurs le nombre d'habitants dans chaque ville.

Écrire une fonction qui prend en paramètre le dictionnaire `d` et qui renvoit le nom de la ville ayant le plus d'habitants.

Exercice : solution

```python
def max_habitant(d: dict) -> str:
    nom_min = ""
    nb_habitants = 0
    for (ville,nb) in d.items():
        if nb >= nb_habitants:
            nom_min = ville
            nb_habitants = nb
    return nom_min
```

Fonctionnement interne par tables de hachage

Fonctions de hachage

Un cas d'utilisation des fonctions de hachage : mots de passe et authentification en ligne.

Fonctions de hachage

Un cas d'utilisation des fonctions de hachage : mots de passe et authentification en ligne.

Fonction de hachage : fonction

$$h : K \to E$$

avec

- K : espace des clés (très grand)
- E : espace des empreintes (pas trop grand)
- h « presque injective » (en quel sens ?)

Fonctions de hachage

- Protocoles notables : MD5, puis SHA-1, et tous les SHA-*
- En Python :
  - fonction native `hash` (mais plusieurs inconvénients)
  - `from hashlib import md5, sha1, blake2s`

```
def h(k):
    return blake2s(k, digest_size=8).hexdigest()

h(b"Ceci est une clé secrète")
```

Tables de hachage pour construire un dictionnaire

Idée :

- on choisit une fonction de hachage

$$h : K \to [\![0, m-1]\!] \ ;$$

- on initialise un tableau T de taille m ;
- la valeur associée à la clé k sera stockée dans le tableau T dans la case numéro $h(k)$.

Ainsi toutes les opérations se font essentiellement en temps constant.

Problème des collisions

Les collisions :

- sont par construction difficiles à générer volontairement (ce serait une faille de sécurité de la fonction de hachage) ;
- mais se produisent avec une probabilité très élevée (paradoxe des anniversaires).

On peut par exemple s'en sortir en stockant dans la case numéro $h(k)$ la liste de tous les couples (k, v).

Contraintes induites en pratique

Il n'existe pas de fonctions de hachage toute faite dans Python pour tous les objets. En pratique, un critère simple est que les objets soient de tailles fixes.

Donc on ne peut pas utiliser de liste comme clefs :

```
>>> d = {[0]: 0, [1, 2, 3]: 2, [0, 1]: None}
```