# INTERROGATION DE COURS

## 1 S1, Fonctions réelles d'une variable réelle

1. Soient $I$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $a$ un réel élément de $I$ ou extrémité de $I$. Donner une définition quantifiée de la convergence de $f$ vers 0 en $a$.
2. Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables et soient $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Sous réserve d'existence, donner une expression des cinq fonctions $(\lambda f + \mu g)'$, $(f \cdot g)'$, $(f/g)'$, $(f^\lambda)'$ et $(g \circ f)'$.
3. Soient $I$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Énoncer les hypothèses et les conclusions du théorème de la bijection pour $f$ sur $I$. Quelle est la régularité de $f^{-1}$ ?
4. Soient $I$ et $J$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction bijective. Sous quelles conditions peut-on affirmer que $f^{-1}$ est $\mathcal{C}^k$ ?
5. Soient $a$ et $b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Énoncer avec ses hypothèses une inégalité des accroissements finis pour $f$ sur $[a, b]$.
6. Soit $f$ une fonction réelle. Définir le caractère $\mathscr{C}^1$ de $f$.
7. Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction *non supposée dérivable*. Définir la convexité de $f$.
8. Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose de classe $\mathscr{C}^2$. Caractériser la convexité de $f$.
9. Soient $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction *non supposée dérivable*. Définir la croissance de $f$.

## 2 S1, Calcul différentiel et intégral

1. Énoncer la relation de Chasles pour l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
2. Énoncer la linéarité de l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
3. Énoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
4. Énoncer la positivité et la croissance de l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
5. Énoncer la formule d'intégration par parties pour l'intégrale des fonctions continues sur un segment.
6. Qu'est-ce qu'une somme de Riemann ? Sous quelles hypothèses peut-on affirmer qu'elle converge vers une intégrale ?
7. Soit $f : t \mapsto t^\alpha$, où $\alpha$ est un scalaire différent de $-1$. Donner une expression d'une primitive $F$ de $f$.
8. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$. Donner une expression d'une primitive $F$ de $f$.
9. Soit $f : t \mapsto e^{\alpha t}$, où $\alpha$ est un scalaire non nul. Donner une expression d'une primitive $F$ de $f$.
10. Soit $f : t \mapsto \ln(t)$. Donner une expression d'une primitive $F$ de $f$.

## 3 S1, Applications, point de vue ensembliste

1. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications, et soit $x \in E$. Définir $(g \circ f)(x)$.
2. Soit $f : E \to F$ une application. Définir l'injectivité de $f$.
3. Soit $f : E \to F$ une application. Définir la surjectivité de $f$.
4. Soit $f : E \to F$ une application. Définir la bijectivité de $f$ en une expression quantifiée sans passer par l'injectivité et la surjectivité.

## 4 S1, Informatique

1. Écrire en Python une fonction prenant en argument une liste de nombres et renvoyant cette même liste triée dans l'ordre croissant, sans faire appel aux fonctions natives dédiées.
2. Quel est le coût asymptotique d'un tri à bulles sur une liste de longueur $n$ ?
3. Quel est le coût asymptotique d'un tri par sélection sur une liste de longueur $n$ ?
4. Quel est le coût asymptotique d'un tri fusion sur une liste de longueur $n$ ?
5. Écrire en Python une fonction prenant en argument une liste de nombres et renvoyant la plus grande valeur de cette liste, sans faire appel aux fonctions natives dédiées.

## 5 S2, Espaces vectoriels

1. Former la combinaison linéaire de $x_1$, $x_2$ et $x_3$, affectés des coefficients $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$.
2. Donner un exemple d'espace vectoriel non nul, avec sa dimension et un exemple de vecteur non nul.
3. Soit $E$ un espace vectoriel. Définir ce qu'est un sous-espace vectoriel de $E$.
4. Soient $x_1, \dots, x_n$ et $y$ des éléments d'un espace vectoriel. Définir la phrase « $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ ».
5. Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments d'un espace vectoriel $E$. Définir la phrase « $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de $E$ ».
6. Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments d'un espace vectoriel. Définir la phrase « $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre ».
7. Si $x$ est un élément d'un espace vectoriel $E$, comment montrer *le plus simplement possible* que la famille réduite au seul vecteur $x$ est libre ?
8. Si $x$ et $y$ sont deux éléments d'un espace vectoriel $E$, comment montrer *le plus simplement possible* que la famille $(x, y)$ est libre ?
9. Si $x$, $y$ et $z$ sont trois éléments d'un espace vectoriel $E$, comment montrer que la famille $(x, y, z)$ est libre ?
10. Si l'on connait la dimension d'un espace vectoriel $E$, comment prouve-t-on le plus fréquemment qu'une famille donnée en est une base ?
11. Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments d'un espace vectoriel $E$. Définir la phrase « $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de $E$ ».
12. Définir la dimension d'un espace vectoriel.
13. Définir le rang d'une famille de vecteurs.
14. Définir le rang d'une matrice.

## 6 S2, Applications linéaires

1. Définir ce qu'est une application linéaire entre deux espaces $E$ et $F$.
2. Donner, en le détaillant, un exemple non nul d'application linéaire entre deux espaces vectoriels.
3. Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, soit $u : E \to F$ une application linéaire, soit $x$ un élément de $E$, et soit $y$ un élément de $F$. Donner les définitions de : $x \in \mathrm{Ker}\, u$ et $y \in \mathrm{Im}\, u$.
4. Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, et soit $u : E \to F$ une application linéaire. Montrer que si $u$ est injective, alors $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$.
5. Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, et soit $u : E \to F$ une application linéaire. Montrer que si $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$, alors $u$ est injective.
6. Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels. Définir ce qu'est un endomorphisme de $E$, un automorphisme de $E$, un isomorphisme entre $E$ et $F$.
7. Soient $E$ un espace vectoriel et $f$ une application au départ de $E$. Comment vérifie-t-on que $f$ est un endomorphisme de $E$ ?
8. Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels, soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base finie de $E$, et soit $u : E \to F$ une application linéaire. Décrire $\mathrm{Im}\, u$.
9. Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et soit $u : E \to F$ une application linéaire. Définir le rang de $u$.
10. Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et soit $u : E \to F$ une application linéaire. Énoncer le théorème du rang pour $u$ dans ce contexte.

# 7 S2, Matrices et déterminants

1. Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées de taille $n$. Définir $(A\,B)_{i,j}$.
2. Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$. Définir $(A^\top)_{i,j}$.
3. Donner une expression de $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

# 8 S2, Espaces préhilbertiens réels

1. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Donner les cinq conditions définissant la phrase « $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$ ».
2. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, rappeler la définition de $\langle x, y \rangle$.
3. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Soit $E$ un espace euclidien. Nommer un procédé permettant de convertir une base quelconque de $E$ en une base orthonormée.

# 9 S2, Analyse asymptotique

1. Soit $a$ un point de $\overline{\mathbb{R}}$, et soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $a$. Que signifie $o(1)$ ? Et « $f(t) \underset{t \to a}{=} o(g(t))$ ».
2. Soit $a$ un point de $\overline{\mathbb{R}}$, et soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $a$. Définir la phrase « $f(t) \underset{t \to a}{\sim} g(t)$ »en termes de $f(t) - g(t)$.
3. Soit $a$ un point de $\overline{\mathbb{R}}$, et soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $a$. Définir la phrase « $f(t) \underset{t \to a}{\sim} g(t)$ »en termes de $f(t)/g(t)$.
4. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels strictement positifs. Énoncer les $3 \times 2$ relations de négligeabilité usuelles entre $1/t^\alpha$, $t^\beta$, $\ln t$, $e^t$ quand $t \to +\infty$.
5. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels strictement positifs. Énoncer les $3 \times 2$ relations de négligeabilité usuelles entre $1/t^\alpha$, $t^\beta$, $\ln t$, $e^t$ quand $t \to 0$.
6. Soit $a$ un nombre réel et soit $f$ une fonction d'une variable réelle définie au voisinage de $a$. Énoncer *avec son hypothèse* la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour $f$ en $a$.
7. Donner le développement limité à l'ordre 2 lorsque $h \to 0$ de $e^h$, $\ln(1+h)$ et $(1+h)^\alpha$

# 10 S2, Séries

1. Soit $u$ une suite réelle. Définir la somme partielle de rang $n$ de la série $\sum_{k \geqslant 0} u_k$.
2. Soit $u$ une suite réelle. Définir la convergence et la somme éventuelle de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.
3. Soit $u$ une suite réelle. Définir la convergence *absolue* de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.
4. Soit $q$ un nombre réel. Caractériser la convergence et exprimer la somme éventuelle des séries $\sum_{n \geqslant 0} q^n$, $\sum_{n \geqslant 1} n\, q^{n-1}$ et $\sum_{n \geqslant 2} n\,(n-1)\, q^{n-2}$.
5. Soit $x$ un nombre réel. Caractériser la convergence et exprimer la somme éventuelle de la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$.
6. Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ telle ques $u_n \sim v_n$. Énoncer les hypothèses et la conclusion du théorème de comparaison des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

# 11 S2, Informatique

1. Dessiner un graphe orienté à trois sommets et cinq arêtes, puis écrire une matrice d'adjacence associée.

## 12 Séries numériques

1. Soit $E$ un ensemble. Donner une définition de la phrase « $E$ est dénombrable ».
2. Soit $I$ un ensemble dénombrable, et soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille indexée par $I$ d'éléments de $[0,+\infty]$. Définir $\sum\limits_{i\in I} x_i$.
3. Soit $I$ un ensemble dénombrable, et soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille indexée par $I$ d'éléments de $[0,+\infty]$. Définir la phrase « $(x_i)_{i\in I}$ est sommable ».
4. Donner la formule du produit de Cauchy pour le produit de séries à termes positifs.
5. Donner les étapes principales d'une comparaison série-intégrale.
6. Énoncer la formule de Stirling.
7. Énoncer la règle de d'Alembert.
8. Énoncer le théorème spécial des séries alternées, avec bornage et signe du reste de rang $n$.

## 13 Compléments sur les espaces vectoriels

1. Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel $E$. Définir $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$.
2. Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel $E$. Quand dit-on que $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ est une somme directe ?
3. Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel $E$. Donner une inégalité sur $\dim \sum\limits_{i=1}^{n} F_i$. À quelle condition a-t-on égalité ?
4. Soient $E$ un espace vectoriel, $u$ un endomorphisme de $E$, et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Quand dit-on que $F$ est stable par $u$ ?
5. Montrer que si $u$ et $v$ sont deux endomorphismes d'un même espace vectoriel $E$ tels que $u\circ v = v\circ u$, alors $\operatorname{Ker} u$ est stable par $v$.
6. Soit $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Définir $\operatorname{tr} A$.
7. Énoncer la propriété de la trace vis-à-vis du produit.
8. Que signifie « la trace est un invariant de similitude » ? Prouver que c'en est un.
9. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, où $E$ est un espace vectoriel de dimension finie. Définir $\operatorname{tr} u$.
10. Donner une expression des polynômes interpolateurs élémentaires de Lagrange $L_1,\dots,L_{n+1}$ en $n+1$ scalaires deux à deux distincts $a_1,\dots,a_{n+1}$.
11. Donner une expression du déterminant de Vandermonde associé à $n+1$ scalaires $a_1,\dots,a_{n+1}$.

## 14 Normes

1. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donner les quatre conditions définissant la phrase « $N$ est une norme sur $E$ ».
2. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Définir la distance sur $E$ associée à $\|\cdot\|$.
3. Soit $E=\mathbb{K}^n$ et soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in E$. Définir $\|x\|_1$.
4. Soit $E=\mathbb{K}^n$ et soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in E$. Définir $\|x\|_2$.
5. Soit $E=\mathbb{K}^n$ et soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in E$. Définir $\|x\|_\infty$.
6. Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et soit $x\in E$. Définir $\|x\|_2$.
7. Soit $f: D\to\mathbb{K}$ une fonction bornée. Définir $\|f\|_{\infty,D}$.
8. Soient $E=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $f_n: t\mapsto t^n\in E$. Donner la valeur de $\|f_n\|_{\infty,[0,1]}$ et $\|f_n\|_2$, où $\|\cdot\|_2$ est associée au produit scalaire intégral usuel.
9. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $E$, et soit $\ell\in E$. Définir la convergence de $(x_n)$ vers $\ell$ au sens de $\|\cdot\|$.
10. Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur un espace vectoriel $E$. Définir la phrase « $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes ».
11. Quels caractères des suites dans un espace vectoriel normé sont préservés lorsqu'on remplace une norme par une autre norme équivalente ?

## 15 Suites et séries de fonctions

1. Si $(f_n)$ est une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbb{K}$ et si $f$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$, définir : « $(f_n)$ converge simplement vers $f$ ».
2. Si $(f_n)$ est une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbb{K}$ et si $f$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$, définir : « $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ ».
3. Si $(f_n)$ est une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbb{K}$ et si $f$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$, définir : « $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers $f$ ».
4. Si $(f_n)$ est une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbb{K}$ et si $f$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$, définir : « $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément vers $f$ ».
5. Si $(f_n)$ est une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbb{K}$ et si $f$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{K}$, définir : « $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement vers $f$ ».
6. Quels sont les modes de convergence possibles pour une suites de fonctions ? Quelles sont les implications entre ces différents modes ?
7. Quels sont les modes de convergence possibles pour une séries de fonctions ? Quelles sont les implications entre ces différents modes ?
8. Énoncer le théoèrme de la continuité pour la limite d'une suite de fonctions.
9. Énoncer le théoèrme de la continuité pour la limite d'une séries de fonctions.
10. Énoncer le théorème de la double limite pour une série.
11. Énoncer le théorème d'interversion limite-intégrale pour une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
12. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions définies sur un intervalle $I$.
13. Énoncer le théorème de dérivabilité continue de la limite d'une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$.

## 16 Réduction

1. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Définir la phrase « $A$ est semblable à $B$ ».
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Définir la phrase « $A$ est diagonalisable ».
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Définir la phrase « $X$ est un vecteur propre de $A$ ».
4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $\lambda$ un scalaire. Définir la phrase « $\lambda$ est une valeur propre de $A$ ».
5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et soit $\lambda$ un scalaire. Définir le sous-espace propre de $A$ associé à $\lambda$.
6. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$, et soit $x$ un élément de $E$. Définir la phrase « $x$ est un vecteur propre de $u$ ».
7. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
   Définir la phrase « $\lambda$ est une valeur propre de $u$ ».
8. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Définir le sous-espace propre de $u$ associé à $\lambda$.
9. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$. Définir la phrase « $u$ est diagonalisable ».
10. Soit $A$ une matrice carrée. Définir $\chi_A$.
11. Quelle relation lie les valeurs propres d'une matrice (ou d'un endomorphisme) et son polynôme caractéristique ?
12. Définir la multiplicité d'une valeur propre d'une matrice (ou d'un endomorphisme).
13. Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice (ou d'un endomorphisme).
14. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$. Définir la phrase « $u$ est trigonalisable ».
15. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Définir la phrase « $A$ est trigonalisable ».
16. Donner une condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité d'une matrice (ou d'un endomorphisme).

## 17 Intégrales généralisées

1. Tracer l'allure du graphe d'une fonction continue par morceaux, mais non continue, sur un intervalle.
2. Définir $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $f$ continue par morceaux sur l'intervalle *semi-ouvert* $[a, b[$.
3. Soit $\alpha$ un réel. Caractériser en fonction de la valeur de $\alpha$ la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
4. Soit $\beta$ un réel. Caractériser en fonction de la valeur de $\beta$ la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^\beta \mathrm{d}t$.
5. Énoncer *avec son hypothèse-clé* le théorème de convergence par majoration pour les intégrales généralisées.
6. Énoncer la formule d'intégration par parties pour l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un intervalle ouvert $]a, b[$.
7. Énoncer la positivité et la croissance de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un intervalle $I$.
8. Que signifie la phrase « $f$ est intégrable sur $I$ » ?
9. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Définir $L^1(I, \mathbb{K})$.

## 18 Endomorphismes des espaces euclidiens

1. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. Donner une définition de la phrase « $u$ est une isométrie ».
2. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. Caractériser le fait que $u \in \mathrm{O}(E)$ en termes de produits scalaires.
3. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. Caractériser le fait que $u \in \mathrm{O}(E)$ en termes de l'image par $u$ des bases orthonormées.
4. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. Caractériser le fait que $u \in \mathrm{O}(E)$ en termes de sa matrice dans une base orthonormée.
5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une définition de la phrase « $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ».
6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Caractériser le fait que $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ en termes de la famille de ses colonnes.
7. Définir $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
8. Quand dit-on que deux bases d'un même espace vectoriel ont la même orientation ?
9. Qu'est-ce qu'une rotation vectorielle d'un plan euclidien ?
10. Donner la classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.
11. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. Donner une définition de la phrase « $u$ est autoadjoint ».
12. Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. Caractériser le fait que $u \in \mathscr{S}(E)$ en termes de sa matrice dans une base orthonormée.
13. Donner un énoncé du théorème spectral.
14. Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $E$. Définir la phrase « $u$ est positif ».
15. Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $E$. Définir la phrase « $u$ est défini positif ».
16. Soit $A$ une matrice symétrique réelle de taille $n$. Définir la phrase « $A$ est positive ».
17. Soit $A$ une matrice symétrique réelle de taille $n$. Définir la phrase « $A$ est définie positive ».

## 19 Séries entières

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Définir son rayon de convergence.
2. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum z^n$.
3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. Décrire la nature de la série numérique $\sum a_n z^n$ en fonction de la position de $z$ dans le plan complexe.
4. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectif $R_a$ et $R_b$.
   Que dire si $a_n \underset{n\to\infty}{=} O(b_n)$ ? Et si $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ ?
5. Énoncer la règle de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$.
6. Sur quel domaine la somme d'une série entière est-elle toujours de classe $\mathscr{C}^\infty$ ?

7. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S$.
Exprimer $a_n$ en termes des valeurs en 0 des dérivées successives de $S$.
8. Donner le développement en série entière d'exp en en précisant le rayon de convergence.
9. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ en en précisant le rayon de convergence.
10. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Donner le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en en précisant le rayon de convergence.
11. Donner le développement en série entière d'arctan en en précisant le rayon de convergence.

## 20 Polynômes annulateurs

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Quel lien y a-t-il entre les valeurs propres de $A$ et les polynômes annulateurs de $A$ ?
2. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
3. Donner un polynôme annulateur non trivial pour un projecteur, pour une symétrie.
4. On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet pour polynôme annulateur $P = X^3 - X + 2$.
Montrer que $A$ est inversible et exprimer $A^{-1}$ comme un polynôme en $A$.
5. Énoncer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice carrée en termes de polynômes annulateurs.

## 21 Espaces probabilisés

1. Soit $\Omega$ un ensemble et soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ un ensemble de parties de $\Omega$. Définir la phrase « $\mathscr{A}$ est une tribu ».
2. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et soit $\mathbb{P}$ une fonction définie sur $\mathscr{A}$. Définir la phrase « $\mathbb{P}$ est $\sigma$-additive ».
3. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et soit $\mathbb{P}$ une fonction définie sur $\mathscr{A}$.
Définir la phrase « $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité ».
4. Énoncer la continuité croissante d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
5. Énoncer la continuité décroissante d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
6. Définir ce qu'est un système quasi-complet d'évènements dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
7. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $A \in \mathscr{A}$ un évènement.
Énoncer une formule des probabilités totales pour $\mathbb{P}(A)$.
8. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $A \in \mathscr{A}$ un évènement non négligeable.
Définir la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$.
9. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A$ et $B$ deux évènements de $\mathscr{A}$.
Énoncer une formule des probabilités composées pour $\mathbb{P}(A \cap B)$.
10. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A$ et $B$ deux évènements de $\mathscr{A}$.
Définir l'indépendance de $A$ et $B$.
11. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie d'évènements de $\mathscr{A}$.
Définir l'indépendance mutuelle des $A_i$.

## 22 Intégrales à paramètres

- Énoncer le théorème de convergence dominée à paramètre continu pour une intégrale à paramètre de la forme $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
- Énoncer le théorème de continuité pour une intégrale à paramètre de la forme $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
- Énoncer le théorème sur la classe $\mathscr{C}^1$ pour une intégrale à paramètre de la forme $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
- Énoncer le théorème sur la classe $\mathscr{C}^k$ $(k \geqslant 2)$ pour une intégrale à paramètre de la forme $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.