TD0A- Révisions algèbre

1 Sous-espaces et bases

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) vérifiant $\begin{cases} x + 3y - 2z + 5t &= 0 \\ x + 2y &= 3z - 4t \end{cases}$ est un sous espace vectoriel. En donner une base ainsi que sa dimension.

Exercice 2. Soit E l'ensemble des matrices $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a - 2b \end{pmatrix}$ lorsque (a, b) décrivent $\mathbb{R}^2$.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Que vaut $\dim(E)$?
2. E est-il stable par multiplication ? Par passage à l'inverse ?

Exercice 3. Soit les ensembles

$$E = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0\right\},$$
$$E_1 = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} + x_n = 0\right\},$$
$$E_2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E et donner une base de chacun d'eux.
3. (a) Soit $(x_n) \in E$, on pose pour tout entier n, $u_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$, $v_n = x_n + x_{n+1}$, $w_n = x_{n+1} + x_{n+2}$. Démontrer que $\big((u_n), (v_n), (w_n)\big) \in E_1 \times E_2 \times E_2$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}w_n$.
   (b) En déduire que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E. Donner une base de E.

Exercice 4. Soit E l'ensemble des fonctions f, définies et continues sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles et vérifiant la propriété suivante : il existe un réel $A > 0$, un réel $C > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\text{pour } t \geq A,\ \ |f(t)| \leq Ct^n.$$

Montrer que, muni des opérations usuelles, E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles.

Exercice 5. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la dérivation est un endomorphisme de E.
2. Soit $(f_0, \ldots, f_n) \in E^n$ des fonctions fixées. Montrer que l'application suivante est un endomorphisme :
$$\text{pour } y \in E,\ \ \phi(y) = y^{(n)} f_n + \cdots + y' f_1 + y f_0.$$
3. En déduire que les solutions d'une équation différentielle linéaire $y^{(n)} f_n + \cdots + y' f_1 + y f_0 = 0$ forment un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6. Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit la forme linéaire suivante :

$$\varphi_k : P \mapsto P^{(k)}(0)$$

Montrer que la famille $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Exercice 7 (des familles libres ?)**.**

1. Soit $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ des réels. Montrer que la famille de fonctions $\big(x \mapsto e^{a_i x}\big)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Soit $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ des réels. Montrer que la famille de fonctions $\big(x \mapsto |x - a_i|\big)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2 Applications linéaires

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\phi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que φ est un isomorphisme. Donner une expression simple de l'isomorphisme réciproque.
2. Déterminer la matrice U de φ dans la base canonique. Calculer le rang de φ.
3. Déterminer U^{-1} sans la question 2.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est nilpotent s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^r = 0$. Le plus petit r tel que $u^r = 0$ est appelé « indice de nilpotence » de u.

1. Montrer que si : pour tout $x \in E$, il existe r tel que $u^r(x) = 0$ alors u est nilpotent.
2. On suppose u nilpotent d'indice r, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\big(u^{r-1}(x), \dots, u(x), x\big)$ soit une famille libre.
3. Montrer que si $r = n$ alors il existe une base B telle que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Montrer que les applications suivantes sont linéaires (des endomorphismes le cas échéant), et construire leurs matrices (dans les bases canoniques) :

1. $\Phi_1 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $\Phi_1(P) = \frac{1}{2}\big(P(X+1) - P(X-1)\big)$. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi_1)$ et $\mathrm{Im}(\Phi_1)$.
2. $\Phi_2 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $\Phi_2(P) = 3XP(X) - (X^2-1)P'(X)$.
3. $\Phi_3 : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$, $\Phi_3(P) = \big(P(0), P(1), P(-1)\big)$. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi_3)$ et $\mathrm{Im}(\Phi_3)$.

Exercice 11 (pour 5/2)**.** Soit $E = \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\text{pour tout } x \in [0,1], \;\; T(f)(x) = \int_0^1 \phi(x-t) f(t) \mathrm{d}t.$$

Montrer que T est un endomorphisme de E.

Exercice 12. Soit $E = \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\text{pour tout } x \in [0,1], \;\; u(f)(x) = \int_0^x \sin(t-x) f(t) \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E (*Indication : Se ramener à une intégrale sans paramètre*).
2. L'endomorphisme u est-il surjectif ?

Exercice 13 (quelques résultats théoriques sur les endomorphismes)**.** Soient u et v deux endomorphismes de l'espace vectoriel E.

1. Montrer que $u \circ v = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(u \circ v) = u\big(\mathrm{Im}(v)\big)$ et $v\big(\mathrm{Ker}(u \circ v)\big) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Si v est surjective, montrer que $v\big(\mathrm{Ker}(u \circ v)\big) = \mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 14. Soit f, $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et $F_\lambda(f) = \mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$g\big(E_\lambda(f)\big) \subset E_\lambda(f) \qquad \text{et} \qquad g\big(F_\lambda(f)\big) \subset F_\lambda(f).$$

En particulier (si on prend $\lambda = 0$) on a $g\big(\mathrm{Ker}(f)\big) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $g\big(\mathrm{Im}(f)\big) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u)$ puis que $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{\vec{0}\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$ puis que $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u) = E$.
3. On suppose E de dimension finie. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\text{(a)}\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \qquad \text{(b)}E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \qquad \text{(c)}\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$$

On pourra procéder par double implications et doubles inclusions.

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec tous les endomorphismes de E :

$$\text{pour tout } g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f$$

1. Soit $u \in E \setminus \{0\}$. Montrer que la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u)$ possède un supplémentaire dans E, que l'on notera H_u. On précisera la dimension de H_u. *Nous noterons p_u le projecteur sur* $\mathrm{Vect}(u)$ *parallèlement à* H_u.
2. Montrer qu'il existe un scalaire λ_u tel que $f(u) = \lambda_u u$ (*Indication : utiliser le projecteur p_u*).
3. Soit $v \in E$, non nul et colinéaire au vecteur u. On note λ_v le scalaire tel que $f(v) = \lambda_v v$. Montrer que $\lambda_u = \lambda_v$.
4. Soit $v \in E$ non colinéaire au vecteur u. Montrer que $\lambda_u = \lambda_v$.
5. En déduire quels sont les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E.

Exercice 17 (CCP 2012 (ODLT))**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de n formes linéaires. Montrer qu'elle est libre si et seulement si $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_k) = \{\vec{0}\}$ (*Indication : considérer* $\phi : x \in E \mapsto \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) \in \mathbb{K}^n$).

3 Rang

Exercice 18. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, f et $g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathcal{GL}(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$.

Exercice 19. Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E alors $\dim\big(f(H)\big) = \dim(H) - \dim\big(H \cap \mathrm{Ker}(f)\big)$.

Exercice 20. Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - \dim(F) \leq \mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min\big(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\big).$$

On pourra considérer la restriction de u à $\mathrm{Ker}(v \circ u)$ pour démontrer l'inégalité de gauche.

Exercice 21 (d'après Centrale-Supélec PC)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
   (a) Montrer que n est pair et déterminer le rang de f en fonction de n.
   (b) Montrer que $f \circ f = 0$.
2. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = 0$ et $n = 2\mathrm{rg}(f)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. En déduire que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
   (b) Montrer qu'il existe une base B de E telle que $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$, où $p = \mathrm{rg}(f)$.

4 Matrices

Exercice 22. Calculer les inverses (s'ils existent) des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1-2i & -i \\ 1+2i & 1+i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \; ; \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,33 \\ 0,5 & 0,33 & 0,25 \\ 0,33 & 0,25 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Exercice 23. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ supposée non inversible. Montrer l'existence de B non nulle dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = 0$.

Exercice 24. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : AM = MA\}$ le commutant de A.

1. Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un espace vectoriel.
2. Déterminer le commutant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 25 (puissances d'une matrice)**.** On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les premières puissances de M, en déduire M^n à l'aide d'une conjecture que l'on établira.
2. (a) Calculer N^n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En posant $M = I_3 + N$, calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $M^{-n} = (M^n)^{-1}$ est donné par la même formule (en remplaçant n par $-n$, bien sûr...)..
3. (a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$.
   (b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n et b_n telles que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
   (d) Faire de même avec $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 26.

1. Calculer les puissances successives de la matrice suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Donner la forme des puissances successives d'une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est nulle.

Exercice 27. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base $B_3 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Donner une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivant : $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$.
2. En déduire une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice D représentant l'endomorphisme u soit diagonale.
3. Exprimer A en fonction de D.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^{2n+1} = A$ et $A^{2n+2} = A^2$.
5. Déterminer les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= & -y_n & +z_n \\ y_{n+1} &= x_n & +2y_n & -3z_n \\ z_{n+1} &= x_n & +y_n & -2z_n \end{cases} \quad \text{et } x_0 = 1, \; y_0 = 2, \; z_0 = 3$$

Exercice 28 (matrices à diagonale dominante, matrices stochastiques)**.**

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout i, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.
2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout i, $\sum_j |a_{i,j}| < 1$. Montrer que l'équation $X = AX + B$, où $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est fixé, admet une solution unique $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
3. Soit P une matrice stochastique, c'est-à-dire une matrice à coefficients réels positifs vérifiant $\sum_j p_{i,j} = 1$ pour tout i. Montrer que $\sup\left\{|\lambda| \text{ tel que } (P - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible}\right\} = 1$ et que ce sup est atteint. Montrer que les puissances d'une matrice stochastique sont stochastiques.

Exercice 29 (CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2)**.** Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un espace vectoriel, et donner sa dimension.

5 Déterminants

Exercice 30. Calculer les déterminants suivants (sous la forme la plus simple possible) :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ -2 & -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 2 \end{vmatrix} \left[\begin{array}{c} \text{Trouver une} \\ \text{relation} \\ \text{de récurrence} \end{array}\right], \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & & & & (0) \\ a & 1+a^2 & a & & & \\ & a & 1+a^2 & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & & & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

$$D_6 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & & (0) \\ 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3 \\ (0) & & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Exercice 31. Soient a, b, $c \in \mathbb{K}$.

On considère le déterminant de taille n : $D = \begin{vmatrix} a & c & c & \dots & c \\ b & a & c & \dots & c \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$. Soit $f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & a+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & b+x & a+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & b+x & \dots & b+x & a+x \end{vmatrix}$

pour $x \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que f est une fonction de la forme $f(x) = \alpha x + \beta$.
2. Calculer D en supposant d'abord $b \neq c$, puis $b = c$.

Exercice 32. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont désignées par $(C_1, \dots, C_n)$. Calculer en fonction de $\det(A)$, le déterminant de la matrice B dont les colonnes sont désignées par $(D_1, \dots, D_n)$ dans les deux cas suivants :

1. $D_j = \sum_{k \neq j} C_k$
2. $D_j = C_j + 2\sum_{k \neq j} C_k$.

Exercice 33. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétrique. Montrer que si n est impair alors A est non inversible.

Exercice 34.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(P_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \big(\mathbb{K}_p[X]\big)^{n^2}$ une famille de polynômes de degré au plus p. Soit
$$f : x \in \mathbb{K} \mapsto \det\Big(\big(P_{i,j}(x)\big)_{1\leq i,j\leq n}\Big) \in \mathbb{K}.$$
Montrer que la fonction f est polynomiale de degré au plus np.
2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que
$$f : x \in \mathbb{K} \mapsto \det\big(xI_n - A\big) \in \mathbb{K}$$
est une fonction polynomiale unitaire de degré n.

Exercice 35 (théorème de Cayley-Hamilton)**.**

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ et $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ définie par
$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & a_{p-2} \\ & & & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, calculer $\det(\lambda I_p - A)$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Soit $x \in E$ non nul, et $p \in \mathbb{N}^*$ le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{F}_p = \big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ soit libre. Justifier que p existe, puis qu'il existe $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $u^p(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{p-1}u^{p-1}(x)$.
   (b) On note $F = \mathrm{Vect}\big(\mathcal{F}_p\big)$, montrer que F est stable par u, puis donner la matrice M dans la base $\mathcal{F}_p$ de l'endomorphisme de F induit par u.
   (c) On complète la famille $\mathcal{F}_p$ en une base B de E. Donner la forme de la matrice de u dans la base B (*on utilisera la matrice M*).
   (d) En déduire que le polynôme $P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_1 X - a_0$ divise le polynôme caractéristique χ_u de u, défini par
$$\chi_u : \lambda \in \mathbb{K} \mapsto \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u)$$
   (*c'est bien un polynôme, voir l'exercice précédent*).
   (e) (Pour 5/2) En déduire que $\chi_u\big(u\big)(x) = \vec{0}$.

   On vient donc de montrer que pour tout $x \in E$ (*a priori* non nul, mais pour $x = \vec{0}$ c'est direct), on a $\chi_u\big(u\big)(x) = \vec{0}$, donc $\chi_u(u) = 0$ (l'endomorphisme nul).

6 Produit scalaire

Exercice 36. Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et notons pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, Φ_A l'application :
$$\Phi_A : (X, Y) \in E^2 \mapsto X^\top A Y \in \mathrm{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

1. Montrer que Φ_A est bilinéaire.
2. Montrer que Φ_A est symétrique si et seulement si A est une matrice symétrique.
3. Montrer que si A est non inversible, Φ_A n'est pas un produit scalaire (même si A est symétrique).
4. Montrer que si Φ_A est un produit scalaire, toute valeur propre réelle de A est strictement positive.
5. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, est-ce que Φ_A est un produit scalaire ?
6. Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, exprimer $\Phi_A(X, Y)$ en fonction des coefficients de X et Y.

Remarque. Quand on aura vu le théorème spectral, on saura montrer que Φ_A est un produit scalaire si et seulement si A est symétrique avec $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, autrement dit si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 37. Soit $(n+1)$ réels, distincts ou non, notés a_0, a_1, …, a_n. Pour $j \in \mathbb{N}$, $P^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j du polynôme P. Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(a_j)Q^{(j)}(a_j)$ définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 38. Démontrer que l'application Φ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(A,B) \mapsto \mathrm{tr}(A^\top B)$$

est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 39.

1. Montrer que pour tous réels a et b, $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, puis $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$.
2. (a) Montrer que l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) Montrer que si u_n est le terme d'une série absolument convergente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
   (c) Donner un exemple simple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ tel que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
3. Soit $\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par, $\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $\forall v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\Phi(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.
   (a) Montrer que pour tout $(u,v) \in E^2$, $\Phi(u,v)$ existe, puis que Φ est un produit scalaire sur E.
   (b) Pour $i \in \mathbb{N}$, soit e_i la suite (élément de E) dont tous les termes sont nuls, sauf le i-ième qui vaut 1. Montrer que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée.

7 Cauchy-Schwarz

Exercice 40. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec $0 < a < b$. Montrer que :

$$\frac{b^3-a^3}{3}\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \geq \left(\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t\right)^2$$

Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Exercice 41.

1. Soit $\omega \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}_+^*\big)$, montrer que pour tout f, $g \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, on a :

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g^2(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right)$$

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$f^2(x) \leq x\left(\int_0^1 \big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t\right).$$

3. Soit n réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que : $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 42. Soit E l'ensemble des fonctions : $[a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ continues et $\phi : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$.
Montrer que $\min_{f\in E} \phi(f) = (b-a)^2$ et chercher les fonctions réalisant le minimum.

8 Projeté orthogonal

Exercice 43. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 2z = 0\}$. Le but est de déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p_F de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique) sur F, de trois façons différentes :

1. D'abord en cherchant une base orthonormée de F, puis...
2. Ensuite, en déterminant directement les valeurs $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en fonction de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ telles que $(x,y,z) = p_F(a,b,c)$, grâce au fait que $(x,y,z) \in F$ et $(x,y,z) - (a,b,c) \in F^\perp$...
3. Enfin, en cherchant une base orthonormée de $F^\perp$, puis d'utiliser que $p_F + p_{F^\perp} = ...$

Exercice 44. Calculer la valeur minimum de $I_{a,b} = \int_0^1 \big(t\ln(t) - at - b\big)^2 \mathrm{d}t$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 45. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$. Soit p un projecteur de E. Montrer l'équivalence entre :

1. Le noyau de p et l'image de p sont orthogonaux (*autrement dit, p est un projecteur orthogonal*).
2. Pour tout vecteur x de E, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 46. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (donc A n'est a priori pas carrée !), on munit $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^\top) = \mathrm{Im}(A)^\perp$ (l'orthogonal de $\mathrm{Im}(A)$ dans $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A)$, et en déduire que $A^\top A$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = p$.
   On suppose cette condition vérifiée pour la suite.
3. Montrer que la matrice (dans la base canonique) K du projecteur orthogonal de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Im}(A)$ est $K = A\big(A^\top A\big)^{-1}A^\top$.
4. Soit $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que AX est le projeté orthogonal de B sur $\mathrm{Im}(A)$. Montrer : $\|B - AX\|^2 = B^\top(I_n - K)B$.

Application à la méthode des moindres carrées : si $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$ (de rang 2 si les x_i ne sont pas tous égaux entre eux, ce que l'on supposera), alors (a,b) minimise l'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(y_k - (ax_k + b)\big)^2$ si et seulement si AX est le projeté orthogonal de B sur $\mathrm{Im}(A)$, donc si et seulement si $X = \big(A^\top A\big)^{-1}A^\top B$. La droite $y = ax + b$ est alors la droite de régression linéaire du nuage de points $\big((x_k, y_k)\big)_{k \in [\![1,n]\!]}$.

9 Bases orthonormées

Exercice 47. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire sur $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i)$ [resp. $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$].

1. Montrer que l'on a bien un produit scalaire.
2. Chercher une base orthonormée de E.

Exercice 48. Soit E un espace vectoriel euclidien, $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des vecteurs unitaires de E tels que :

$$\text{pour tout } x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2.$$

Montrer que la famille des (e_i) forment une base orthonormé de E.

10 Divers

Exercice 49. Soit E un espace euclidien, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une famille de E vérifiant

$$\text{pour tous } i,\ j \in [\![1,p]\!], i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j\rangle < 0$$

1. Montrer que : $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{p} |\lambda_k| e_k = 0$.

2. Montrer que toute sous-famille de $p-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 50. Soit E un espace euclidien et ϕ une forme linéaire sur E (*i.e.* une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$). On souhaite montrer qu'il existe un unique $a \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $\phi(x) = \langle a \rangle x$.

1. Étudier le cas où ϕ est nulle.
   On suppose dans la suite ϕ non nulle.
2. On note $H = \mathrm{Ker}(\phi)$. Montrer qu'il existe $b \in E$ de norme 1 tel que $H^\perp = \mathrm{Vect}(b)$.
3. Trouver $a \in H^\perp$ tel que pour tout $x \in E$, $\phi(x) = \langle a \rangle x$, puis conclure.

Exercice 51 (CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2)**.** Soient F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E. Montrer que

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp \qquad (F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

Exercice 52 (CCP 2009 Officiel de la Taupe - exo 2)**.** On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} a_k b_k$, où les a_k et b_k sont les coefficients de P et Q respectivement.
Donner la dimension et une base de l'ensemble H des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(1) = 0$. Donner une base orthonormale de H.

Solutions

Exercice 1. Notons F l'ensemble considéré.
Pour tout $(x,y,z,y) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+3y-2z+5t & = & 0 \\ x+2y & = & 3z-4t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3y=2z-5t \\ x+2y=3z-4t \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} x+3y & = & 2z-5t \\ -y & = & z+t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5z-2t \\ y=-z-t \end{array}\right.$$

Donc

$$(x,y,z,t) \in F \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y,z,t) = (5z-2t, -z-t, z, t) = z(5,-1,1,0) + t(-2,-1,0,1),$$

c'est-à-dire

$$F = \Big\{ z(5,-1,1,0) + t(-2,-1,0,1),\ \ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \Big\} = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(5,-1,1,0)}_{=u}, \underbrace{(-2,-1,0,1)}_{=v} \big),$$

ce qui reprouve que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, car engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. De plus, (u,v) est une famille génératrice de F.
Puis, (u,v) est libre. En effet, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $au+bv=\vec{0}$, alors

$$(5a-2b, -a-b, a, b) = (0,0,0,0), \qquad \text{et donc} \qquad \begin{cases} 5a-2b=0 \\ -a-b=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases},$$

puis $a=b=0$.
Donc (u,v) est une base de F, formée de deux vecteurs, donc

$$\boxed{\dim(F)=2}.$$

Exercice 2.

1. • Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
   Méthode 1 :
   ⋆ Tout d'abord, on a clairement $E \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
   ⋆ La matrice nulle est bien dans E (prendre $a=b=0$).
   ⋆ Soit M_1 et $M_2 \in E$, alors il existe $(a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4$ avec $M_1 = M(a,b)$ et $M_2 = M(a',b')$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \lambda M_1 + M_2 & = & \lambda M(a,b) + M(a',b') \\ & = & \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ 3b' & a'-2b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & -\lambda b - b' \\ 3\lambda b + 3b' & \lambda(a-2b) + (a'-2b') \end{pmatrix} \\ & = & M(\lambda a + a', \lambda b + b') \in E \end{array}$$

   Donc E est stable par combinaison linéaire.
   ⋆ Donc E est bien un sous -espace vectoriel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
   Méthode 2 : Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$M(a,b) = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=I_2} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{=A}$$

   Donc

$$E = \big\{ M(a,b),\ \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \big\} = \big\{ aI_2 + bA,\ \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \big\} = \mathrm{Vect}(I_2, A).$$

   Comme I_2 et A sont deux matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ (en tant qu'espace vectoriel engendré par une famille d'éléments de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$), et que (I_2, A) est une famille génératrice de E.

• Puis, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $aI_2 + bA = 0_2$, alors

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{et donc} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ -b = 0 \\ 3b = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases},$$

donc $a = b = 0$. Donc (I_2, A) est libre.
Donc (I_2, A) est une base de E, est formée de deux vecteurs, donc

$$\boxed{\dim(E) = 2}.$$

2. • Est-ce que E est stable par produit ?
Méthode 1 : Soit M_1 et $M_2 \in E$, alors il existe $(a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4$ avec $M_1 = M(a,b)$ et $M_2 = M(a',b')$, puis

$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 &= M(a,b) \times M(a',b') \\ &= \begin{pmatrix} aa' - 3bb' & -ab' - b(a'-2b') \\ 3ba' + 3(a-2b)b' & -3bb' + (a-2b)(a'-2b') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa' - 3bb' & -ab' - ba' + 2bb' \\ 3ba' + 3ab' - 6bb' & aa' - 2(ab' + ba') + bb' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En posant $\alpha = aa' - 3bb'$ et $\beta = ab' + ba' - 2bb'$. On a :

$$M_1 \times M_2 = M(a,b) \times M(a',b') = M(\alpha, \beta) \in E.$$

Donc E est stable par produit.

Remarque. On remarque que l'expression définissant α et β est symétrique en a et a', et en b et b', autrement dit

$$M(a,b) \times M(a',b') = M(\alpha,\beta) = M(a',b') \times M(a,b).$$

Donc les éléments de E commutent entre-eux.

Méthode 2 : Soit M_1 et $M_2 \in E$, alors il existe $(a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4$ avec

$$M_1 = M(a,b) = aI_2 + bA \qquad \text{et} \qquad M_2 = M(a',b') = a'I_2 + b'A.$$

Alors

$$M_1 \times M_2 = M(a,b) \times M(a',b') = (aI_2 + bA)(a'I_2 + b'A) = aa'I_2 + (a'b + ab')A + bb'A^2.$$

Or, on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = M(-3,-2) \in E,$$

$A \in E$ et $I_2 \in E$, et E est stable par combinaison linéaire, donc

$$aa'I_2 + (a'b + ab')A + bb'A^2 \in E,$$

soit $M_1 \times M_2 = M(a,b) \times M(a',b') \in E$. Donc E est stable par produit.
• Est-ce que E est stable par passage à l'inverse ?
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\det\big(M(a,b)\big) = a^2 - 2ab + 3b^2 = (a-b)^2 + 2b^2,$$

donc

$$\det\big(M(a,b)\big) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ 2b^2 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = 0$$

(car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul).

Donc, si $(a,b) \neq (0,0)$, alors la matrice $M(a,b)$ est inversible, et

$$M(a,b)^{-1} = \frac{1}{(a-b)^2+2b^2}\begin{pmatrix} a-2b & b \\ -3b & a \end{pmatrix} = M(\alpha,\beta) \in E$$

avec

$$\alpha = \frac{a-2b}{(a-b)^2+2b^2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-b}{(a-b)^2+2b^2}.$$

Donc E est stable par passage à l'inverse.

Exercice 3. 1) • $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
• La suite nulle est dans E. En effet, notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite nulle, autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0 - 0 - 0 + 0 = 0,$$

donc on a bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
• Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $z = \lambda x + y = (\lambda x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} z_{n+3} - z_{n+2} - z_{n+1} + z_n &= (\lambda x_{n+3} + y_{n+3}) - (\lambda x_{n+2} + y_{n+2}) - (\lambda x_{n+1} + y_{n+1}) + (\lambda x_n + y_n) \\ &= \lambda(x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n) + y_{n+3} - y_{n+2} - y_{n+1} + y_n \\ &= \lambda \times 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

car x et y sont dans E. Donc $z \in E$. Donc E est stable par combinaisons linéaires.
• Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2) On peut faire de même pour E_1 et E_2. La seule chose qui change, c'est de vérifier l'inclusion $E_1 \subset E$ et $E_2 \subset E$.
Autre façon :

$$E_1 = \big\{\text{ suites } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ géométriques de raison } -1\big\} = \Big\{\big(x_0(-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}, x_0 \in \mathbb{R}\Big\} = \mathrm{Vect}\Big(\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$$

(donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).
On vérifie que la suite $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(-1)^{n+3} - (-1)^{n+2} - (-1)^{n+1} + (-1)^n = (-1)^n\big((-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1\big) = 0.$$

Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de E (en tant qu'espace engendré par un vecteur de E). De plus,

$$\Big(\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$$

est une famille génératrice de E_1, et libre car c'est une famille formée d'un seul vecteur qui n'est pas le vecteur nul. Donc c'est une base de E_1. Puis,

$$\begin{aligned} E_2 &= \big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique } r^2 - 2r + 1 = 0, \textit{ i.e. } (r-1)^2 = 0\big\} \\ &= \big\{(a+bn)_{n\in\mathbb{N}}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \mathrm{Vect}\big((1)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \end{aligned}$$

La suite $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E, car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E, car, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+3) - (n+2) - (n+1) + n = 0.$$

Donc E_2 est un sous-espace vectoriel de E (en tant qu'espace engendré par deux vecteurs de E). De plus,

$$\big((1)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$$

est une famille génératrice de E_2. Et c'en est une base, car c'est aussi une famille libre : pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si

$$a(1)_{n\in\mathbb{N}} + b(n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}},$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a + bn = 0.$$

En particulier, pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui donne

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 \end{cases},$$

donc $a = b = 0$.

3a) • On a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n + u_{n+1} = x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0,$$

donc

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_1.$$

• De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0,$$

donc

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_2.$$

• Idem pour $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à un décalage d'indice près : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = x_{n+4} - x_{n+3} - x_{n+2} + x_{n+1} = x_{(n+1)+3} - x_{(n+2)+1} - x_{(n+1)+1} + x_{n+1} = 0$$

(car la relation vérifiée par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donc en $n+1$ au lieu de n, puisque $n+1 \in \mathbb{N}$), donc

$$(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_2.$$

• Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}w_n = \frac{1}{4}(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) + \frac{3}{4}(x_n + x_{n+1}) - \frac{1}{4}(x_{n+1} + x_{n+2}) = x_n.$$

3b) • Montrons

$$E_1 \cap E_2 \subset \{\vec{0}\},$$

autrement dit, montrons que E_1 et E_2 sont en somme directe. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_1$, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{k+1} = -x_k.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut poser $k = n + 1$ (c'est bien un entier), et on a

$$x_{n+2} = -x_{n+1} = -(-x_n) = x_n.$$

Or, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi dans E_2, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0,$$

mais $x_{n+2} = x_n$ et $x_{n+1} = -x_n$, ce qui donne

$$4x_n = 0, \qquad \text{donc} \qquad x_n = 0.$$

C'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}},$$

c'est bien la suite nulle.

• Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, alors (avec les notations de la question précédente),

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \underbrace{\frac{1}{4}\underbrace{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in E_1}}_{\in E_1} + \underbrace{\frac{3}{4}\underbrace{(v_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in E_2} - \frac{1}{4}\underbrace{(w_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in E_2}}_{\in E_2}$$

donc

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_1 \oplus E_2.$$

Donc

$$E \subset E_1 \oplus E_2.$$

L'inclusion réciproque provient de ce que $E_1 \subset E$ et $E_2 \subset E$. On a donc bien

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

• Comme $\left(\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de E_1 et $\left((1)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ une base de E_2, et $E_1 \oplus E_2 = E$, on a

$$\boxed{\left(\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\right)}$$

base de E. Autrement dit, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'équation caractéristique $r^3 - r^2 - r + 1$ si et seulement s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = a(-1)^n + b + cn.$$

Exercice 4. $\star$ E est inclus dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ par définition.
$\star$ La fonction nulle

$$f : t \in [0, +\infty[\mapsto 0 \in \mathbb{R}$$

est dans E car elle est continue, et pour $A = 0$, $C = 0$ et $n = 0$, on a bien pour tout $t \geq A$,

$$|f(t)| = 0 \leq Ct^n = 0.$$

$\star$ Soit f et g dans E, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + g$ est continue sur $[0, +\infty[$ (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont). De plus, on sait qu'il existe A, A', C et C' dans $\mathbb{R}_+^*$, n et p dans $\mathbb{N}$ avec :

$$\text{pour } t \geq A,\ |f(t)| \leq Ct^n \qquad \text{et} \qquad \text{pour } t \geq A',\ |f(t)| \leq C't^p.$$

Alors, si on pose

$$A'' = \max(1, A, A') \geq 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad k = \max(n, p) \in \mathbb{N},$$

on a : pour $t \geq A''$,

$$|f(t)| \leq Ct^n \leq Ct^k \qquad \text{et} \qquad |g(t)| \leq C't^p \leq C't^k$$

(car $t \geq 1 \Rightarrow t^n \leq t^k$ si $n \leq k$), et par inégalité triangulaire,

$$|\lambda f(t) + g(t)| \leq |\lambda||f(t)| + |g(t)| \leq |\lambda|Ct^n + C't^p \leq |\lambda|Ct^k + C't^k = C''t^k$$

en posant

$$C'' = |\lambda|C + C'.$$

Comme $C > 0$, $|\lambda|C \geq 0$, et comme $C' > 0$, on a bien par addition $C'' > 0$. Donc on a bien tout vérifié pour pouvoir affirmer $\lambda f + g \in E$.
• Donc E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles.

Exercice 5. 1) La dérivation est linéaire : pour tout $(f,g) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

De plus, si $f \in E$, alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, donc la fonction f' aussi, donc $f' \in E$. Donc la dérivation est bien un endomorphisme de E.
2) • Soit y dans E, alors (d'après la question précédente, et en itérant), pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a

$$y^{(k)} \in E$$

aussi. Comme les fonctions $f_0, \ldots, f_n$ sont dans E, et que (d'après le cours) E est stable par produit et combinaison linéaire, on en déduit bien que

$$\phi(y) \in E.$$

• L'application ϕ est linéaire : pour tout $(y_1, y_2) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi(\lambda y_1 + y_2) &= (\lambda y_1 + y_2)^{(n)} f_n + \cdots + (\lambda y_1 + y_2)' f_1 + (\lambda y_1 + y_2) f_0 \\ &= (\lambda y_1^{(n)} + y_2^{(n)}) f_n + \cdots + (\lambda y_1' + y_2') f_1 + (\lambda y_1 + y_2) f_0\end{aligned}$$

(car la dérivation est linéaire, donc par composition, la dérivée k-ième aussi), et en développant et regroupant :

$$\phi(\lambda y_1 + y_2) = \lambda\big(y_1^{(n)} f_n + \cdots + y_1' f_1 + y_1 f_0\big) + y_2^{(n)} f_n + \cdots + y_2' f_1 + y_2 f_0 = \lambda\phi(y_1) + \phi(y_2).$$

• Donc ϕ est bien un endomorphisme de E.
3) C'est le noyau de l'application linéaire ϕ, donc est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 6. On a

$$\dim\big(\mathcal{L}(E,\mathbb{R})\big) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = n+1.$$

La famille $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est formée de $(n+1)$ éléments de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre pour montrer que c'est une base de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.
Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, si on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \phi_k = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})},$$

alors pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \phi_k(P) = 0.$$

Prenons $P = 1$, d'où

$$0 = \lambda_0 \underbrace{\phi_0(P)}_{=1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\phi_k(P)}_{=0} = \lambda_0.$$

Puis en testant avec $P = X$ (et car $\lambda_0 = 0$), on a

$$0 = \lambda_1 \underbrace{\phi_1(P)}_{=1} + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \underbrace{\phi_k(P)}_{=0} = \lambda_1$$

car

$$\phi_1(P) = P'(0) = 1,$$

d'où $\lambda_1 = 0$. On continue ainsi avec X^2, X^3 ...
On a donc en réitérant le procédé, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_k = 0$. Donc la famille $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ est libre, ce qui conclut.
Si on veut être plus rigoureux, soit on rédige une récurrence, soit on fait un raisonnement par l'absurde, que l'on va détailler ci-dessous :

Supposons donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$. On peut donc considérer r, le plus petit entier de $[\![0, n]\!]$ tel que $\lambda_r \neq 0$. On a alors $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, r-1]\!]$, et donc, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\sum_{k=r}^{n} \lambda_k \phi_k(P) = 0.$$

Prenons $P = X^r$ (c'est possible car $r \in [\![0, n]\!]$), alors pour $k \in \mathbb{N}$,

$$(X^r)^{(k)} = \begin{cases} r(r-1)\dots(r-k+1)X^{r-k} = \frac{r!}{(r-k)!}X^{r-k} & \text{si } k \leq r \\ 0 & \text{si } k > r \end{cases},$$

et donc

$$\phi_r(X^r) = r! \qquad \text{et, pour } k \in [\![r+1, n]\!], \qquad \phi_k(X^{r+1}) = 0.$$

Donc

$$0 = \sum_{k=r}^{n} \lambda_k \phi_k(X^r) = \lambda_r r! + \sum_{k=r+1}^{n} \lambda_k \cdot 0 = \lambda_r r!,$$

ce qui donne $\lambda_r = 0$, contradiction. Donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$, et donc $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ est libre, ce qui conclut.

Remarque. Ceci fait penser à la formule de Taylor pour les polynômes (et d'ailleurs, c'est relié...).

Exercice 7.

1. Notons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
$$f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{a_i x}.$$
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, si on a
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0,$$
alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{a_k x} = 0.$$
Multiplions cette dernière égalité par $e^{-a_n x}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{(a_k - a_n)x} = 0.$$
En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient
$$0 = \lim_{x \to +\infty} 0 = \lambda_n \underbrace{\lim_{x \to +\infty} e^{0 \cdot x}}_{=1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\lim_{x \to +\infty} e^{(a_k - a_n)x}}_{=0} = \lambda_n,$$
car $a_k - a_n < 0$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a donc
$$\lambda_n = 0 \qquad \text{puis} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i = 0.$$
On réitère ce principe (ou on rédige une récurrence). On a ainsi, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_j = 0$.
Ainsi la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
2. L'idée ici est que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, mais pas en 0. Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction
$$f_i : x \mapsto |x - a_i|$$
est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a_i\}$, mais pas en a_i.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, si on a
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0,$$
alors
$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i = -\lambda_n f_n,$$
or le terme de gauche est dérivable en a_n (par combinaison linéaire de fonctions qui le sont, car $a_i \neq a_n$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$), donc celui de droite aussi, ce qui n'est possible que si $\lambda_n = 0$.
On a donc
$$\lambda_n = 0 \qquad \text{puis} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i = 0.$$
On réitère ce principe (ou on rédige une récurrence). On a ainsi, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_j = 0$.
Ainsi la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 8.

1. • Pour tout $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a
$$\phi(M) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$
car $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est stable par produit (et car $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$).
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M, N) \in \big(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$, alors (par bilinéarité du produit matriciel) :
$$\phi(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda\phi(M) + \phi(N).$$
Donc ϕ est linéaire.
Donc ϕ est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
• Soit $M \in \mathrm{Ker}(\phi)$, alors
$$0_2 = \phi(M) = AM.$$
Or, la matrice A est inversible (car $\det(A) = -2 \neq 0$), donc en multipliant l'égalité précédente par A^{-1} à gauche, on a
$$0_2 = A^{-1} \times 0_2 = A^{-1} \times AM = I_2 M = M.$$
Donc
$$\mathrm{Ker}(\phi) \subset \{0_2\}.$$
Comme de plus ϕ est linéaire, on en déduit que ϕ est injective.
Puis, ϕ est linéaire injective, son espace de départ et d'arrivée ont **même dimension <u>finie</u>** (à savoir 4), donc ϕ est bijective.
Donc ϕ est un isomorphisme (et même un automorphisme).
• Enfin, pour tout $(M, B) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})^2$,
$$\phi(M) = B \qquad \Leftrightarrow \qquad AM = B \qquad \Leftrightarrow \qquad A^{-1}AM = A^{-1}B \qquad \Leftrightarrow \qquad M = A^{-1}B,$$
car la matrice A est inversible. Alors on a
$$\boxed{\phi^{-1} : B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto A^{-1}B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})}.$$

2. La base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ (où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui sur la ligne i et colonne j, qui vaut 1).
Pour avoir la matrice de ϕ, il suffit de calculer $\phi(E_{11})$, $\phi(E_{12})$, $\phi(E_{21})$ et $\phi(E_{22})$ et de les exprimer dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
$$\phi\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_{1,0} + 3 \cdot E_{2,1}.$$
$$\phi\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_{1,2} + 3 \cdot E_{2,2}.$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot E_{1,1} + 4 \cdot E_{2,1}.$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot E_{1,2} + 4 \cdot E_{2,2}.$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\mathrm{Mat}(\phi) = U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}}.$$

Comme ϕ est un isomorphisme, on a

$$\boxed{\mathrm{rg}(\phi) = \dim\big(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})\big) = 4}.$$

3. ★ Première méthode de calcul de U^{-1} : par pivot de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1\ ,\ L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftarrow -\tfrac{1}{2}L_3 \ \ L_4 \longleftarrow -\tfrac{1}{2}L_4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_1 - 2L_3\ ,\ L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_4 \quad \boxed{U^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

★ Deuxième méthode : U^{-1} est la matrice de ϕ^{-1}, il suffit de calculer $\phi^{-1}(E_{11})$, $\phi^{-1}(E_{12})$, $\phi^{-1}(E_{21})$ et $\phi^{-1}(E_{22})$ et de l'exprimer dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
On a

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

puis

$$\phi^{-1}(E_{1,1}) = -2E_{1,1} + \frac{3}{2}E_{2,1}, \qquad \phi^{-1}(E_{1,2}) = -2E_{1,2} + \frac{3}{2}E_{2,2}, \qquad \phi^{-1}(E_{2,1}) = E_{1,1} - \frac{1}{2}E_{2,1}, \qquad \phi^{-1}(E_{2,2}) = E_{1,2} -$$

et on retrouve bien la même expression pour U^{-1}.

Exercice 9.

1. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe r_i tel que $f^{r_i}(e_i) = 0$. Notons $r = \max(r_i)$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$f^r(e_i) = f^{r-r_i}\big(f^{r_i}(e_i)\big) = f^{r-r_i}(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Montrons que $f^r = 0$.

Soit $x \in E$. Comme B est une base, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, puis

$$f^r(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i f^r(e_i) = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

par linéarité de f. Donc

$$f^r = 0.$$

2. On veut que $\big(u^{r-1}(x), \dots, u(x), x\big)$ soit une famille libre de E, donc en particulier on doit avoir $u^{r-1}(x) \neq \vec{0}$. Choisissons $x \in E$ tel que $u^{r-1}(x) \neq \vec{0}$ (c'est possible car $u^{r-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$), montrons que $\big(u^{r-1}(x), \dots, u(x), x\big)$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) \in \mathbb{K}^r$ tels que
$$\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i(x) = 0.$$
En appliquant u^{r-1}, on a alors, par linéarité :
$$\vec{0} = u^{r-1}(\vec{0}) = u^{r-1}\left(\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i(x)\right) = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^{i+r-1}(x) = \lambda_0 u^{r-1}(x) + \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \underbrace{u^{i-1}\big(u^r(x)\big)}_{=\vec{0}} = \lambda_0 u^{r-1}(x),$$
car, pour $i \in \mathbb{N}^*$,
$$u^{r-1+i}(x) = u^{i-1}\big(u^r(x)\big) = u^{i-1}(\vec{0}) = \vec{0}.$$
Comme $u^{r-1}(x) \neq \vec{0}$, on a $\lambda_0 = 0$. On applique alors ensuite u^{r-2}, on obtient que $\lambda_1 = 0$... En réitérant ce procédé (ou en rédigeant une récurrence), on obtient que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$. Donc on a bien une famille libre.
Autre démonstration : par l'absurde. Supposons $(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}) \neq (0, \dots, 0)$. On peut donc considérer j, le plus petit entier de $[\![0, r-1]\!]$ tel que $\lambda_j \neq 0$. On a alors $\lambda_k = 0$ pour $k \in [\![0, j-1]\!]$, et donc
$$\sum_{i=j}^{r-1} \lambda_i u^i(x) = \vec{0}.$$
En appliquant u^{r-j-1} (c'est possible car $r - j - 1 \geq 0$), on a alors, par linéarité :
$$\vec{0} = u^{r-j-1}(\vec{0}) = u^{r-j-1}\left(\sum_{i=j}^{r-1} \lambda_i u^i(x)\right) = \sum_{i=j}^{r-1} \lambda_i u^{i+r-j-1}(x) = \lambda_j u^{r-1}(x) + \sum_{i=j+1}^{r-1} \lambda_i \underbrace{u^{i+r-j-1}(x)}_{=\vec{0}} = \lambda_j u^{r-1}(x),$$
car, pour $i \geq j+1$,
$$u^{i+r-j-1}(x) = u^{i-j-1}\big(u^r(x)\big) = u^{i-j-1}(\vec{0}) = \vec{0}.$$
Comme $u^{r-1}(x) \neq \vec{0}$, on a $\lambda_j = 0$, contradiction. Donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}) = (0, \dots, 0)$, et la famille est bien libre.
3. $B = \big(u^{n-1}(x), \dots, u(x), x\big)$ est une base de E, car c'est une famille libre d'après la question 2 et
$$\mathrm{Card}\big(u^{n-1}(x), \dots, u(x), x\big) = n = \dim(E).$$
En écrivant u dans la base B, on obtient la matrice voulue.

Exercice 10. ATTENTION : $P(X+1)$ est une abréviation pour $P \circ (X+1)$, et <u>ce n'est pas un produit</u>!. Le produit est $(X+1)P$.
1) • Pour tout $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}_3[X]\big)^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}
\Phi_1(\lambda P + Q) &= \tfrac{1}{2}\big((\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X-1)\big) \\
&= \lambda \tfrac{1}{2}\big(P(X+1) - P(X-1)\big) + \tfrac{1}{2}\big(Q(X+1) - Q(X-1)\big) \\
&= \lambda \Phi_1(P) + \Phi_1(Q)
\end{aligned}$$
donc Φ_1 est linéaire.
Puis, si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, par composition et combinaison linéaire de polynômes, $\Phi_1(P) \in \mathbb{R}[X]$. Il ne reste plus qu'à regarder le degré. Or, les règles

$$\boxed{\text{« } \deg(P+Q) \leq \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big) \text{ »}}$$

et

$$\boxed{\text{« } \deg(\lambda P) = \deg(P) \text{ pour } \lambda \neq 0 \text{ »}}$$

(valables pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$) donnent :

$$\deg\big(\Phi_1(P)\big) \leq \max\left(\deg\left(\frac{1}{2}P(X+1)\right), \deg\left(-\frac{1}{2}P(X-1)\right)\right) = \max\Big(\deg\big(P(X+1)\big), \deg\big(P(X-1)\big)\Big).$$

Puis, la règle

$$\boxed{\text{« } \deg\big(P \circ Q\big) = \deg(P) \times \deg(Q) \text{ »}}$$

valable pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul et $Q \in \mathbb{R}[X]$ <u>non constant</u>, donne

$$\deg\big(P(X+1)\big) = \deg(P) \times \deg(X+1) = \deg(P) \qquad \text{et} \qquad \deg\big(P(X-1)\big) = \deg(P) \times \deg(X-1) = \deg(P).$$

En reportant, on a alors

$$\deg\big(\Phi_1(P)\big) \leq \max\big(\deg(P), \deg(P)\big) = \deg(P) \leq 3.$$

Donc $\Phi_1(P) \in \mathbb{R}_3[X]$: Φ_1 laisse stable $\mathbb{R}_3[X]$.
Donc Φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
• La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$. Puis,

$$\Phi_1(1) = 0, \qquad \Phi_1(X) = 1, \qquad \Phi_1(X^2) = 2X \qquad \text{et} \qquad \Phi_1(X^3) = 3X^2 + 1,$$

donc

$$\boxed{A := \mathrm{Mat}(\Phi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, alors

$$X \in \mathrm{Ker}(A) \qquad \Leftrightarrow \qquad AX = 0_{4,1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} y + t = 0 \\ 2z = 0 \\ 3t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = z = t = 0,$$

donc

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Or, le polynôme qui a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme matrice-colonne coordonnée dans la base canonique est le polynôme constant égal à 1. Donc,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi_1) = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]}.$$

Remarquons que (1) est une famille formée d'<u>un seul</u> vecteur <u>non nul</u>, donc c'est une famille libre, donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(\Phi_1)\big) = 1$.

• Le théorème du rang appliqué à Φ_1 donne alors

$$\dim\big(\mathrm{Im}(\Phi_1)\big) = \dim\big(\mathbb{R}_3[X]\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(\Phi_1)\big) = 4 - 1 = 3.$$

Comme $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de l'espace de départ de Φ_1, on sait

$$\mathrm{Im}(\Phi_1) = \mathrm{Vect}\big(\Phi_1(1), \Phi_1(X), \Phi_1(X^2), \Phi_1(X^3)\big) = \mathrm{Vect}\big(0, 1, 2X, 3X^2+1\big) = \boxed{\mathrm{Vect}\big(1, 2X, 3X^2+1\big)}.$$

Donc, $\big(1, 2X, 3X^2+1\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\Phi_1)$, formée de trois vecteurs, et $\dim\big(\mathrm{Im}(\Phi_1)\big) = 3$, donc c'en est une base.

Remarque. Comme 1, $2X$ et $3X^2+1$ sont dans $\mathbb{R}_2[X]$ et que $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel, on a $\mathrm{Im}(\Phi_1) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Et comme $\dim\big(\mathrm{Im}(\Phi_1)\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$, on a une inclusion et l'égalité des dimension. Donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(\Phi_1) = \mathbb{R}_2[X]}$$

2) Pour tout $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}_3[X]\big)^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\lambda P + Q) &= 3X(\lambda P + Q)(X) - (X^2-1)(\lambda P + Q)'(X) \\
&= \lambda 3XP(X) + \lambda Q(X) - (X^2-1)(\lambda P' + Q')(X) \\
&= \lambda\big(3XP(X) - (X^2-1)P'(X)\big) + 3XQ(X) - (X^2-1)Q'(X) \\
&= \lambda\Phi_2(P) + \Phi_2(Q)
\end{aligned}$$

donc Φ_2 est linéaire.
Puis, si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, par composition et combinaison linéaire de polynômes, $\Phi_2(P) \in \mathbb{R}[X]$. Il ne reste plus qu'à regarder le degré. Ici cependant, les règles sur le degré (celles utilisées à la question précédente, plus

$$\boxed{\text{« } \deg(P') \leq \deg(P) - 1 \text{ »}},$$

valable pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$) ne suffisent pas à conclure (si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on obtient juste $\deg\big(\Phi_2(P)\big) \leq 4$).
Il **n'est donc pas évident** que Φ_2 laisse stable $\mathbb{R}_3[X]$. Une façon simple de le voir est de dire que c'est la restriction de l'endomorphisme $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto 3XP(X) - (X^2-1)P'(X) \in \mathbb{R}[X]$ (c'est linéaire comme ci-dessus, et là c'est évident que $\mathbb{R}[X]$ est laissé stable) à $\mathbb{R}_3[X]$, et donc, puisque $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$,

$$\mathrm{Im}(\Phi_2) = \mathrm{Vect}\big(\Phi_2(1), \Phi_2(X), \Phi_2(X^2), \Phi_2(X^3)\big),$$

et il suffit de vérifier que ces quatre polynômes sont bien dans $\mathbb{R}_3[X]$ pour avoir $\mathrm{Im}(\Phi_2) \subset \mathbb{R}_3[X]$.
Cela se fait par un calcul direct, qui en plus donne la matrice :

$$\Phi_2(1) = 3X, \qquad \Phi_2(X) = 2X^2 + 1, \qquad \Phi_2(X^2) = X^3 + 2X \qquad \text{et} \qquad \Phi_2(X^3) = 3X,$$

ce sont bien des vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$, donc Φ_2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, et on a

$$\boxed{A = \mathrm{Mat}(\Phi_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Remarque.

1. On peut cependant montrer « à la main » que Φ_2 est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$: pour cela, on considère $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme <u>quelconque</u> de $\mathbb{R}_3[X]$, et on calcule :

$$\begin{aligned}
\Phi_2(P) &= 3X(aX^3 + bX^2 + cX + d) - (X^2-1)(3aX^2 + 2bX + c) \\
&= \cancel{3aX^4} + 3bX^3 + 3cX^2 + 3dX - \cancel{3aX^4} - 3bX^3 - cX^2 + 3aX^2 + 2bX + c
\end{aligned}$$

et sous cette forme, il est direct que $\Phi_2(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Donc Φ_2 va bien de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Pour ceux qui ne savent pas lire un énoncé, et qui cherchent le noyau et l'image de Φ_2, alors que c'est pas demandé : la recherche de $\mathrm{Ker}(A)$ (comme à la question 1) donne $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{4,1}\}$, donc A est inversible, donc Φ_2 est bijective, donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi_2) = \{0\}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{Im}(\Phi_2) = \mathbb{R}_3[X]}.$$

3) Φ_3 va bien dans $\mathbb{R}^3$ car $P(0)$, $P(1)$ et $P(-1)$ sont des réels.
• Pour tout $(P,Q) \in \big(\mathbb{R}_3[X]\big)^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Phi_3(\lambda P + Q) &= \big(\lambda P(0) + Q(0), \lambda P(1) + Q(1), \lambda P(-1) + Q(-1)\big)\\ &= \lambda\big(P(0), P(1), P(-1)\big) + \big(Q(0), Q(1), Q(-1)\big)\\ &= \lambda\Phi_3(P) + \Phi_3(Q)\end{aligned}$$

donc Φ_3 est linéaire.
• La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$, et celle de $\mathbb{R}^3$ est $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$. Remarquons que, pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1),$$

donc la matrice-colonne des coordonnées de (a,b,c) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
Puis, $\Phi_3(1) = (1,1,1)$, $\Phi_3(X) = (0,1,-1)$, $\Phi_3(X^2) = (0,1,1)$ et $\Phi_1(X^3) = (0,1,-1)$, donc

$$\boxed{A = \mathrm{Mat}(\Phi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

• Cherchons $\mathrm{Ker}(\Phi_3)$.

Méthode 1 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, alors

$$X \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow AX = 0_{4,1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ y + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \\ z = \\ y = \end{cases}$$

donc

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Or, le polynôme qui a $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme matrice-colonne coordonnée dans la base canonique est le polynôme $X^3 - X$.
Donc,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi_3) = \mathrm{Vect}(X^3 - X)}.$$

Remarquons que $(X^3 - X)$ est une famille formée d'<u>un seul</u> vecteur <u>non nul</u>, donc c'est une famille libre, donc

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(\Phi_3)\big) = 1.$$

Méthode 2 : Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors

$$\begin{aligned}
P \in \mathrm{Ker}(\Phi_3) &\Leftrightarrow \Phi_3(P) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \big(P(0), P(1), P(-1)\big) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow 0,\ 1 \text{ et } -1 \text{ sont racines de } P \\
&\Leftrightarrow (X-0)(X-1)\big(X-(-1)\big) = X^3 - X \text{ divise } P \qquad \text{(car 0, 1 et } -1 \text{ sont deux à deux différents)} \\
&\Leftrightarrow \text{Il existe } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ avec } P = (X^3 - X).Q
\end{aligned}$$

Mais $P \in \mathbb{R}_3[X]$, donc si $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P = (X^3 - X).Q$, alors

$$3 \geq \deg(P) = \deg(X^3 - X) + \deg(Q) = 3 + \deg(Q)$$

donne $\deg(Q) \leq 0$, donc Q est constant. Donc

$$P \in \mathrm{Ker}(\Phi_3) \Leftrightarrow \text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ avec } P = \lambda(X^3 - X)$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi_3) = \{\text{multiples de } X^3 - X\} = \mathrm{Vect}\big(X^3 - X\big)}$$

Remarquons que $(X^3 - X)$ est une famille formée d'<u>un seul</u> vecteur <u>non nul</u>, donc c'est une famille libre, donc

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(\Phi_3)\big) = 1.$$

• Le théorème du rang appliqué à Φ_3 donne alors

$$\dim\big(\mathrm{Im}(\Phi_3)\big) = \dim\big(\mathbb{R}_3[X]\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(\Phi_3)\big) = 4 - 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Or, $\mathrm{Im}(\Phi_3) \subset \mathbb{R}^3$. On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions, donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(\Phi_3) = \mathbb{R}^3}.$$

Exercice 11. • Soit $f \in E$. Soit $x \in [0,1]$, alors : ϕ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction

$$t \in [0,1] \mapsto \phi(x - t)$$

est continue (par composition). La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc par produit, la fonction

$$t \mapsto \phi(x-t)f(t)$$

est continue sur $[0,1]$, et donc l'expression $T(f)(x)$ existe.
• Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction

$$x \mapsto \phi(x - t)$$

est continue sur $[0,1]$ (par composition de la fonction ϕ continue sur $\mathbb{R}$, avec un polynôme), donc par produit avec une constante, la fonction

$$x \mapsto \phi(x-t)f(t)$$

est continue sur $[0,1]$
• La fonction ϕ est continue sur $[-1,1]$, $[-1,1]$ est un segment, donc la fonction ϕ est bornée sur ce segment (théorème des bornes atteintes) : il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u \in [-1,1]$,

$$|\phi(u)| \leq K.$$

Or, pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \in [0,1]$, on a $x - t \in [-1,1]$, donc

$$|\phi(x-t)f(t)| \leq K|f(t)|.$$

Or, la fonction

$$t \mapsto K|f(t)|$$

est continue sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur ce segment. On a donc domination.
• Donc, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, on en déduit que la fonction $T(f)$ est continue sur $[0,1]$. Donc T va de E dans E.
• Enfin, pour tout $(f,g) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$T(\lambda f + g)(x) = \int_0^1 \phi(x-t)(\lambda f + g)(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 \phi(x-t)f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \phi(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

par linéarité de l'intégrale convergente. Cela étant vrai pour tout $x \in [0,1]$, on peut affirmer

$$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g).$$

Donc l'application T est linéaire.
• Donc T est un endomorphisme de E.

Exercice 12. 1) • La fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in [0,1]$, la fonction

$$t \in [0,1] \mapsto \sin(t-x)$$

est continue. La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc par produit, la fonction

$$t \mapsto \sin(t-x)f(t)$$

est continue sur $[0,1]$, et donc l'expression $u(f)(x)$ existe.
La formule trigonométrique

$$\sin(t-x) = \sin(t)\cos(x) - \sin(x)\cos(t),$$

donne, pour tout $x \in [0,1]$,

$$u(f)(x) = \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\mathrm{d}t - \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Les fonctions sin et cos sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Puis, la fonction

$$\phi : t \in [0,1] \mapsto \sin(t)f(t)$$

est continue sur l'intervalle $[0,1]$, et $0 \in [0,1]$, donc le théorème fondamental de l'analyse donne que l'application

$$\Phi : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x \sin(t)f(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de ϕ sur $[0,1]$. Puis, la fonction $\Phi' = \phi$ est continue sur $[0,1]$, donc la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
De même, la fonction

$$\Psi : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x \cos(t)f(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de la fonction continue

$$\psi : t \in [0,1] \mapsto \cos(t)f(t)$$

et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Par produit puis différence, on en déduit que la fonction $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Donc $u(f) \in E$.
• Enfin, pour tout $(f,g) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$u(\lambda f + g)(x) = \int_0^1 \sin(t-x)(\lambda f + g)(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 \sin(t-x)f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \sin(t-x)g(t)\mathrm{d}t = \lambda u(f)(x) + u(g)(x)$$

par linéarité de l'intégrale. Cela étant vrai pour tout $x \in [0,1]$, on peut affirmer

$$u(\lambda f + g) = \lambda u(f) + u(g).$$

Donc u est linéaire.
• Donc u est un endomorphisme de E.
2) On a

$$\mathrm{Im}(u) \subset \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}).$$

Pour conclure que l'endomorphisme u n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément de E qui ne soit pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
Or, la fonction

$$x \in [0,1] \mapsto \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

est continue sur $\mathbb{R}$, donc appartient à E, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en $\frac{1}{2}$, donc ne peut s'écrire $u(f)$ pour $f \in E$, donc n'a pas d'antécédents par u. L'endomorphisme u n'est donc pas surjectif.

Exercice 13. 1) • Supposons $u \circ v = 0$, alors pour $y \in \mathrm{Im}(v)$, il existe $x \in E$ avec $y = v(x)$, et donc

$$u(y) = u(v(x)) = u \circ v(x) = \vec{0},$$

donc $y \in \mathrm{Ker}(u)$, d'où l'inclusion

$$\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u).$$

• Réciproquement, si $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$, alors pour tout $x \in E$,

$$v(x) \in \mathrm{Im}(v), \qquad \text{donc} \qquad v(x) \in \mathrm{Ker}(u), \qquad \text{et donc} \qquad \vec{0} = u(v(x)) = u \circ v(x).$$

Cela étant vrai pour tout $x \in E$, on a bien

$$u \circ v = 0.$$

2) • Si $x \in \mathrm{Ker}(v)$, alors $v(x) = \vec{0}$, et donc

$$u \circ v(x) = u\big(v(x)\big) = u(\vec{0}) = \vec{0}$$

(car u est linéaire), et donc $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$, d'où la première inclusion.
• Soit $y \in \mathrm{Im}(u \circ v)$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = u \circ v(x) = u\big(v(x)\big).$$

Donc, il existe $z \in E$ (à savoir $z = v(x)$) avec $y = u(z)$, donc $y \in \mathrm{Im}(u)$. D'où la deuxième inclusion.
3) ★ • Soit $y \in \mathrm{Im}(u \circ v)$, alors il existe $x \in E$ avec

$$y = u \circ v(x) = u\big(v(x)\big),$$

donc $y = u(z)$ avec $z = v(x) \in \mathrm{Im}(v)$, donc $y \in u\big(\mathrm{Im}(v)\big)$, d'où l'inclusion $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset u\big(\mathrm{Im}(v)\big)$.
• Réciproquement, si $y \in u\big(\mathrm{Im}(v)\big)$, alors il existe $z \in \mathrm{Im}(v)$ avec $y = u(z)$, mais il existe aussi $x \in E$ avec $z = v(x)$, et donc

$$y = u\big(v(x)\big) = u \circ v(x) \in \mathrm{Im}(u \circ v),$$

d'où l'inclusion

$$u\big(\mathrm{Im}(v)\big) \subset \mathrm{Im}(u \circ v).$$

★ Soit $y \in v\big(\mathrm{Ker}(u \circ v)\big)$, alors il existe $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$ tel que $y = v(x)$, et donc

$$u(y) = u\big(v(x)\big) = u \circ v(x) = 0,$$

donc $y \in \mathrm{Ker}(u)$, d'où l'inclusion

$$v\big(\mathrm{Ker}(u \circ v)\big) \subset \mathrm{Ker}(u).$$

Remarque. L'inclusion peut-être stricte : par exemple, si $v = 0$ et u non injective.

Mais, supposons maintenant v surjective. Soit alors $y \in \mathrm{Ker}(u)$, comme $y \in E$ et v est surjective, il existe $x \in E$ avec $y = v(x)$, et donc

$$0 = u(y) = u\big(v(x)\big) = u \circ v(x),$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$, et donc

$$y = v(x) \in v\big(\mathrm{Ker}(u \circ v)\big).$$

D'où l'inclusion réciproque.

Remarque. Si l'on suppose u injective, il est alors direct que l'inclusion réciproque reste vraie, puisque $y \in \mathrm{Ker}(u) \Rightarrow y = \vec{0} = v(\vec{0})$.

Exercice 14. • Soit $x \in E$, alors

$$x \in E_\lambda(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = \lambda x.$$

Alors, pour $x \in E_\lambda(f)$,

$$g\big(f(x)\big) = g(\lambda x) = \lambda g(x),$$

et comme $g \circ f = f \circ g$, on a

$$f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = \lambda g(x),$$

donc

$$g(x) \in E_\lambda(f).$$

• Soit $y \in F_\lambda(f)$, alors il existe $x \in E$ avec $y = (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(x)$, donc

$$g(y) = g\big((f - \lambda \mathrm{Id}_E)(x)\big) = (f - \lambda \mathrm{Id}_E)\big(g(x)\big) \in \mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = F_\lambda(f)$$

car (comme $g \circ f = f \circ g$) :

$$g \circ (f - \lambda \mathrm{Id}_E) = g \circ f - \lambda g \circ \mathrm{Id}_E = g \circ f - \lambda g = f \circ g - \lambda \mathrm{Id}_E \circ g = (f - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ g.$$

Exercice 15. 1) • Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $u(x) = \vec{0}$, donc

$$v \circ u(x) = v\big(u(x)\big) = v(\vec{0}) = \vec{0},$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$, d'où l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v \circ u).$$

• Supposons $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$, soit alors $y \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$, et $v(y) = \vec{0}$. Donc

$$v \circ u(x) = v(y) = \vec{0},$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$, donc $y = u(x) = \vec{0}$. D'où

$$\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) \subset \{\vec{0}\}$$

(l'inclusion réciproque étant évidente).
• Supposons $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{\vec{0}\}$. Soit alors $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$, alors

$$\vec{0} = v \circ u(x) = v\big(u(x)\big),$$

donc

$$u(x) \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{\vec{0}\}, \qquad \text{soit} \qquad u(x) = \vec{0},$$

c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Donc

$$\mathrm{Ker}(v \circ u) \subset \mathrm{Ker}(u).$$

L'inclusion réciproque étant déjà vue, on a bien l'égalité.
• D'où l'équivalence par double implication.
2) • Soit $y \in \mathrm{Im}(v \circ u)$, alors il existe $x \in E$ avec

$$y = v \circ u(x) = v\big(u(x)\big),$$

donc si on pose $z = u(x) \in E$, on a $y = v(z)$, et donc $y \in \mathrm{Im}(v)$, d'où l'inclusion

$$\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v).$$

• Supposons $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v)$, soit alors $y \in E$. On a $v(y) \in \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(v \circ u)$, donc il existe $x \in E$ tel que

$$v(y) = v \circ u(x) = v\big(u(x)\big),$$

donc par linéarité de v,

$$v\big(y - u(x)\big) = \vec{0},$$

et donc $z = y - u(x) \in \mathrm{Ker}(v)$. Donc $y = z + u(x)$ avec $z \in \mathrm{Ker}(v)$ et $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, donc

$$E \subset \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u).$$

L'inclusion réciproque provient de ce que $\mathrm{Ker}(v) \subset E$ et $\mathrm{Im}(u) \subset E$. D'où l'égalité.
• Supposons $\mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u) = E$, soit alors $y \in \mathrm{Im}(v)$. Alors il existe $x \in E$ avec $y = v(x)$. Comme

$$E = \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(u),$$

il existe $z \in \mathrm{Ker}(v)$ et $x' \in E$ tel que

$$x = z + \underbrace{u(x')}_{\in \mathrm{Im}(u)}.$$

Et donc, puisque $v(z) = \vec{0}$,

$$y = v(x) = v\big(z + u(x')\big) = v(z) + v\big(u(x')\big) = \vec{0} + v \circ u(x') \in \mathrm{Im}(v \circ u),$$

d'où

$$\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(v \circ u).$$

L'inclusion réciproque étant déjà vue, on a bien l'égalité.
D'où l'équivalence.
3) En posant $v = u$ dans les questions précédentes, on a

$$\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{\vec{0}\} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$$

et

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) = E.$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer

$$\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) = E.$$

Or, le théorème du rang appliqué à u donne

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(u)\big) = \dim(E),$$

donc si $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$, alors

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)\big) = \dim(E).$$

Comme $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) \subset E$, on en déduit

$$\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E.$$

D'où l'implication $\boxed{\Rightarrow}$.
Puis, si $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) = E$, alors

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(u)\big) - \dim\big(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)\big),$$

donc le théorème du rang appliqué à u donne

$$0 = \dim\big(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)\big), \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{\vec{0}\},$$

et donc

$$\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u).$$

D'où l'implication $\boxed{\Leftarrow}$.

Exercice 16. 1) On a $u \neq \vec{0}$, donc (u) est une famille libre, on la complète en une base $(u, u_2, \dots, u_n)$ de E grâce au théorème de la base incomplète. Alors

$$H_u = \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_n)$$

est un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(u)$ (car la réunion d'une base de $\mathrm{Vect}(u)$ et de H_u est une base de E), et

$$\boxed{\dim\big(H_u\big) = n - 1 = \dim(E) - 1}$$

(car la base de E ayant n éléments, on a $n = \dim(E)$), autrement dit, H_u est un hyperplan.
2) Par hypothèse sur f, on a $f \circ p_u = p_u \circ f$. Or, $p_u(u) = u$, donc

$$f(u) = f \circ p_u(u) = p_u \circ f(u) = p_u\big(f(u)\big),$$

ce que l'on réécrit

$$p_u\big(f(u)\big) - f(u) = \vec{0}, \qquad \text{ou encore} \qquad (p_u - \mathrm{Id}_E)\big(f(u)\big) = \vec{0}.$$

Donc

$$f(u) \in \mathrm{Ker}(p_u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(p_u) = \mathrm{Vect}(u)$$

(par définition du projecteur sur $\mathrm{Vect}(u)$), et donc il existe $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(u) = \lambda_u u.$$

3) Le vecteur v est colinéaire au vecteur u, donc il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $v = \mu u$. Alors

$$\lambda_v \mu u = \lambda_v v = f(v) = f(\mu u) = \mu f(u) = \mu \lambda_u u.$$

Comme $u \neq \vec{0}$, on en déduit

$$\lambda_v \mu = \mu \lambda_u.$$

Comme $v \neq \vec{0}$, on a $\mu \neq 0$, et donc

$$\lambda_v = \lambda_u.$$

4) On a alors (u, v) libre (car $u \neq \vec{0}$). Puis,

$$f(u + v) = \lambda_{u+v}(u + v) = \lambda_{u+v} u + \lambda_{u+v} v,$$

or l'application f est linéaire, donc

$$f(u + v) = f(u) + f(v) = \lambda_u u + \lambda_v v.$$

Comme (u, v) est libre, on a

$$\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v.$$

5) Dans tous les cas, si on fixe un vecteur $u \in E \setminus \{\vec{0}\}$, alors pour tout $v \in E \setminus \{\vec{0}\}$, on a

$$\lambda_v = \lambda_u.$$

En notant $\lambda = \lambda_u$, on a alors, pour tout $v \in E \setminus \{\vec{0}\}$,

$$f(v) = \lambda_v v = \lambda v = \lambda \mathrm{Id}_E(v).$$

Enfin,

$$f(\vec{0}) = \vec{0} = \lambda \vec{0} = \lambda \mathrm{Id}_E(\vec{0}).$$

Donc

$$f = \lambda \mathrm{Id}_E.$$

Donc, seules les homothéties commutent à tout endomorphisme de E.

Remarque. La réciproque est directe.

Exercice 17. Soit
$$\phi : x \in E \mapsto \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) \in \mathbb{K}^n.$$
L'application ϕ est une application linéaire, et
$$\dim(E) = n = \dim(\mathbb{K}^n)$$
(donc ϕ a **même dimension finie** au départ et à l'arrivée). Enfin,
$$\mathrm{Ker}(\phi) = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_k).$$
• Si $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_k) = \{\vec{0}\}$, alors l'application ϕ est injective, donc surjective.
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ avec
$$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k = 0$$
(l'endomorphisme nul), alors pour tout $x \in E$,
$$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) = 0.$$
Or, l'application ϕ est surjective, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $x \in E$ tel que $\phi(x) = e_i$ (i-ème vecteur de la base canonique), ainsi
$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{k,i} = a_i.$$
Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = 0$. Donc la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.
• Si $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_k) \neq \{\vec{0}\}$, alors l'application ϕ n'est pas injective, donc pas surjective. Donc
$$p := \dim\big(\mathrm{Im}(\phi)\big) < n.$$
Soit $(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_p)$ une base de $\mathrm{Im}(\phi)$. Comme c'est une famille libre, le théorème de la base incomplète s'applique : il existe $(\mathrm{e}_{p+1}, \dots, \mathrm{e}_n)$ tels que $(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$.
Notons ensuite $H = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_{n-1})$, alors
$$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_p) \subset H$$
(car $p \leq n-1$). De plus, $\dim(H) = n-1$, donc H est un hyperplan de E (car $\dim(E) = n$), et donc il existe $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ une forme linéaire avec
$$H = \mathrm{Ker}(\psi).$$
En notant $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ la matrice de ψ dans les bases canoniques, on a alors pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in H = \mathrm{Ker}(\psi)$,
$$\sum_{k=1}^{n} a_k u_k = \psi(u_1, \dots, u_n) = 0.$$
Donc, pour tout $x \in E$, comme
$$\big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) = \phi(x) \in \mathrm{Im}(\phi) \subset H,$$
on a
$$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) = 0.$$
C'est vrai pour tout $x \in E$, donc
$$\sum_{k=1}^{n} a_k f_k = 0$$
(l'application nulle). De plus, ψ est une forme linéaire non nulle (car $\mathrm{Ker}(\psi) = H \neq E$, puisque $\dim(H) = n-1 < n = \dim(E)$), donc sa matrice est non nulle, donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ avec $a_i \neq 0$.
Ainsi la famille $(f_1, \dots, f_n)$ n'est pas libre.
• Par disjonction des cas, on a bien montré l'équivalence demandée.

Exercice 18. • Comme $f \circ g = 0$, on a $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$, donc

$$\mathrm{rg}(g) = \dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) \leq \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = n - \mathrm{rg}(f)$$

(par le théorème du rang appliqué à f), donc

$$\mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(f) \leq n.$$

• D'autre part, $f + g \in \mathcal{GL}(E)$ d'où

$$\mathrm{rg}(f+g) = n.$$

De plus

$$\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$$

(en effet, pour tout $y \in \mathrm{Im}(f+g)$, il existe $x \in E$ avec $y = f(x) + g(x) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$), d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f+g) = \dim\big(\mathrm{Im}(f+g)\big) &\leq \dim\big(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)\big) \\ &= \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) - \underbrace{\dim\big(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)\big)}_{\geq 0} \leq \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) = \end{aligned}$$

• Donc

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n.$$

Exercice 19. Considérons la restriction g de f à H, autrement dit l'application

$$g : x \in H \mapsto f(x) \in E.$$

• L'application g est la restriction d'une application linéaire, donc est linéaire.
• Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$, alors il existe $x \in H$ tel que

$$y = g(x) = f(x) \in f(H),$$

donc

$$\mathrm{Im}(g) \subset f(H).$$

Réciproquement, soit $y \in f(H)$, alors il existe $x \in H$ tel que $y = f(x)$. Mais $x \in H$, donc $g(x)$ existe et

$$g(x) = f(x) = y,$$

donc $y \in \mathrm{Im}(g)$. Donc

$$f(H) \subset \mathrm{Im}(g).$$

Par double inclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}(g) = f(H)}.$$

• Puis, pour tout $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Ker}(g) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(x \in H \text{ et } g(x) = \vec{0}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(x \in H \text{ et } f(x) = \vec{0}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(x \in H \text{ et } x \in \mathrm{Ker}(f)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad x \in H \cap$$

donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g) = H \cap \mathrm{Ker}(f)}.$$

• On applique alors le théorème du rang à g, on obtient ainsi :

$$\dim(H) = \dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f) \cap H\big) + \dim\big(f(H)\big).$$

On a donc bien le résultat souhaité.

Remarque. En particulier, pour tout sous-espace H de E, on a

$$\dim\big(f(H)\big) \leq \dim(H)$$

et

$$\dim\big(f(H)\big) = \dim(H) \qquad \Leftrightarrow \qquad H \cap \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}.$$

Exercice 20. • On a $u(E) \subset F$, donc

$$v \circ u(E) = v\big(u(E)\big) \subset v(F).$$

Ainsi

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim\big(v \circ u(E)\big) \leq \dim\big(v(F)\big) = \mathrm{rg}(v).$$

De plus v est une application linéaire, donc (d'après l'exercice précédent par exemple) on a

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim\big(v \circ u(E)\big) = \dim\Big(v\big(u(E)\big)\Big) \leq \dim\big(u(E)\big) = \mathrm{rg}(u).$$

Ainsi on a l'inégalité de droite.
• $\rightarrow$ Posons w la restriction de u à $\mathrm{Ker}(v \circ u)$, ainsi

$$w : x \in \mathrm{Ker}(v \circ u) \mapsto u(x) \in \mathrm{Ker}(v).$$

L'application w est la restriction d'une application linéaire, donc est linéaire.
$\rightarrow$ Pour tout $y \in \mathrm{Im}(w)$, il existe $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$ avec $y = w(x) = u(x)$, et donc

$$v(y) = v\big(u(x)\big) = v \circ u(x) = \vec{0},$$

donc $y \in \mathrm{Ker}(v)$. Donc

$$\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v), \qquad \text{ce qui donne} \qquad \mathrm{rg}(w) \leq \dim\big(\mathrm{Ker}(v)\big).$$

$\rightarrow$ De plus, pour tout $x \in \mathrm{Ker}(w)$, on a $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u) \subset E$ et

$$u(x) = w(x) = \vec{0},$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Donc

$$\mathrm{Ker}(w) \subset \mathrm{Ker}(u), \qquad \text{soit} \qquad \dim\big(\mathrm{Ker}(w)\big) \leq \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big).$$

$\rightarrow$ Appliquons ensuite le théorème du rang à w. On obtient ainsi :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(v \circ u)\big) = \mathrm{rg}(w) + \dim\big(\mathrm{Ker}(w)\big) \leq \dim\big(\mathrm{Ker}(v)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big)$$

Si on note p la dimension de E et n celle de F, le théorème du rang appliqué à u, v et $v \circ u$ donne alors (avec l'inégalité précédente) :

$$p - \mathrm{rg}(v \circ u) \leq n - \mathrm{rg}(v) + p - \mathrm{rg}(u),$$

soit

$$\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leq \mathrm{rg}(v \circ u).$$

D'où le résultat pour l'inégalité de gauche.

Exercice 21. 1a) Le théorème du rang appliqué à f donne

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(E) = n.$$

Comme $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, on a

$$\boxed{2\mathrm{rg}(f) = n},$$

donc n est pair (car $\mathrm{rg}(f) \in \mathbb{N}$).
1b) Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$, donc

$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = \vec{0}.$$

Cela étant vrai pour tout $x \in E$, on a bien

$$f \circ f = 0.$$

2a) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et donc

$$f(y) = f\big(f(x)\big) = f \circ f(x) = \vec{0}$$

(car $f \circ f = 0$), et donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$, d'où
$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).$$
Le théorème du rang appliqué à f donne
$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(E) = n.$$
Comme $2\mathrm{rg}(f) = n$, on a
$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \mathrm{rg}(f) = 2\mathrm{rg}(f), \qquad \text{donc} \qquad \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big).$$
On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions, ce qui permet de conclure à l'égalité :
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f).$$
2b) Notons $n = 2p$.
Analyse : soit $B = (u_1, \dots, u_{2p})$ une telle base. Alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a
$$u_{p+i} = f(u_i), \qquad \text{et} \qquad f(u_{p+i}) = \vec{0}.$$
Mais, comme $f^2 = 0$, la deuxième condition est impliquée par la première. Donc, on veut juste une base $B = (u_1, \dots, u_{2p})$ avec, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,
$$u_{p+i} = f(u_i).$$
Nécessairement, $u_{p+i} \neq \vec{0}$ (un vecteur d'une famille libre ne peut pas être nul), donc pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,
$$u_i \notin \mathrm{Ker}(f).$$
On prend donc $(u_1, \dots, u_p)$ dans un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$, et comme $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = p$ et $\dim(E) = 2p$, ce supplémentaire est de dimension p. Donc $(u_1, \dots, u_p)$ est une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$.
Synthèse : soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base d'un supplémentaire H de $\mathrm{Ker}(f)$ (il y a p éléments car $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension p). Montrons que
$$B = \big(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$$
est une base de E.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p}$ tels que
$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} f(e_1) + \cdots + \lambda_{2p} f(e_p) = \vec{0}.$$
On applique f, on utilise la linéarité de f, et on a alors
$$f\big(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p\big) + \lambda_{p+1} f \circ f(e_1) + \cdots + \lambda_{2p} f \circ f(e_p) = f(\vec{0}) = \vec{0}.$$
Comme $f \circ f = 0$, on en déduit
$$f\big(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p\big) = \vec{0},$$
autrement dit,
$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p \in \mathrm{Ker}(f).$$
Comme $(e_1, \dots, e_p)$ sont dans H, on a aussi
$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p \in H.$$
Comme H et $\mathrm{Ker}(f)$ sont en somme directe, on en déduit
$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = \vec{0},$$
et comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre,
$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$
Donc, en reportant avant, on a
$$\lambda_{p+1} f(e_1) + \cdots + \lambda_{2p} f(e_p) = \vec{0},$$

soit, par linéarité de f,
$$f\big(\lambda_{p+1}e_1 + \cdots + \lambda_{2p}e_p\big) = \vec{0}.$$
Donc, de même qu'avant, on obtient
$$\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_{2p} = 0.$$
Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{2p} = 0$, donc B est une famille libre, formée de $2p$ vecteurs de E, $\dim(E) = 2p$, donc B est une base de E.
Il est alors direct que la matrice de f dans cette base a la forme voulue, puisque, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,
$$f\big(f(e_i)\big) = f \circ f(e_i) = \vec{0}.$$

Exercice 22.
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -1-2i & 1-2i \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ i & 1 & -1-i \\ -i & -1+i & 1 \end{pmatrix}, \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$
$$E^{-1} = \frac{1}{63}\begin{pmatrix} 3500 & -17500 & 16100 \\ -17500 & 91100 & -85000 \\ 16100 & -85000 & 80000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 55,55555556 & -277,7777778 & 255,5555556 \\ -277,7777778 & 1446,031746 & -1349,206349 \\ 255,5555556 & -1349,206349 & 1269,841270 \end{pmatrix}$$

Remarque. Pour cette dernière, si vous demandez à un logiciel de calcul, et si vous rentrez la matrice E en saisissant $0,33$ et pas $\frac{33}{100}$, vous aurez de grosses différences, cela est du aux erreurs d'arrondis de représentation des nombres (voir votre cours d'informatique).

Exercice 23. Trois façons différentes :
1) La matrice A est non inversible, donc il existe $X \in \mathrm{Ker}(A)$ avec $X \neq 0_{n,1}$. On prend B la matrice dont chaque colonne est X :
$$B = \left(\begin{array}{c|c|c} X & \dots & X \end{array}\right).$$
Par calcul matriciel par blocs,
$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c} AX & \dots & AX \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{n,1} & \dots & 0_{n,1} \end{array}\right) = 0_n,$$
et B est non nulle (car les colonnes de B sont toutes non nulles).
2) Il suffit de prendre B matrice (dans la base canonique) d'une application linéaire g appartenant à $\mathcal{L}\big(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathrm{Ker}(A)\big)$ (que l'on verra comme une application de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans lui-même, pour prendre la matrice), non nulle (ainsi $B \neq 0_n$), ce qui est possible car
$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) \geq 1$$
car A non inversible.
Ainsi, si on note
$$f : X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mapsto AX \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A, alors AB est la matrice de $f \circ g$.
Or, $f \circ g = 0$, car g est à valeurs dans $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(f)$, donc sa matrice est la matrice nulle.
3) L'application
$$\Phi : M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to AM \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$
est linéaire (car le produit matriciel est bilinéaire), non surjective (car I_n n'est pas atteint puisque A n'est pas inversible), et $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie (donc l'espace de départ et d'arrivée de Φ ont **même** dimension **finie**), donc l'endomorphisme Φ n'est pas injective, on prend donc $B \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ non nul, il convient.

Exercice 24.

1. On pose
$$\phi : M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$
$\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est stable par produit et combinaisons linéaires, donc l'application ϕ va bien de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
L'application ϕ est linéaire (par bilinéarité du produit matriciel) : pour tout $(M,N) \in \big(\mathrm{M}_3(\mathbb{R})\big)^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\phi(\lambda M+N) = A(\lambda M+N)-(\lambda M+N)A = \big(\lambda AM+AN\big)-\big(\lambda MA+NA\big) = \lambda(AM-MA)+AN-NA = \lambda\phi(M)+\phi(N)$$
On a
$$\mathcal{C}_A = \mathrm{Ker}(\phi),$$
donc $\mathcal{C}_A$ est un espace vectoriel (sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$).

Remarque. On peut bien sûr montrer :
- $\mathcal{C}_A \subset \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ (par définition),
- $0_3 \in \mathcal{C}_A$ (car $A \times 0_3 = 0_3 = 0_3 \times A$)
- Pour tout $(M,N) \in (\mathcal{C}_A)^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda M + N \in \mathcal{C}_A$. En effet, $M \in \mathcal{C}_A$, donc
$$AM = MA.$$
Et $N \in \mathcal{C}_A$, donc
$$AN = NA.$$
Et donc
$$A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A,$$
donc $\lambda M + N \in \mathcal{C}_A$,

ce qui permet de conclure que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice quelconque de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
• Alors, par calcul direct,
$$AM = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad MA = \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{pmatrix}.$$
Ainsi
$$M \in \mathcal{C}_A \qquad \Leftrightarrow \qquad b = c = d = f = g = h = 0.$$
Donc
$$\boxed{\mathcal{C}_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix},\ (a,e,i) \in \mathbb{R}^3 \right\}},$$
c'est l'ensemble des matrices diagonales, et est donc de dimension 3.
• Toujours par calcul direct,
$$BM = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad MB = \begin{pmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{pmatrix}.$$
Ainsi
$$BM = MB \qquad \Leftrightarrow \qquad c = f = g = h = 0.$$
Donc
$$\boxed{\mathcal{C}_B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix},\ (a,b,d,e,i) \in \mathbb{R}^5 \right\}}$$

et c'est un espace de dimension 5.

• Pour tout $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on a $M \in \mathcal{C}_C$, car $C = 2I$ commute avec toutes les matrices. Donc

$$\boxed{\mathcal{C}_C = \mathrm{M}_3(\mathbb{R})},$$

et c'est un espace de dimension 9.

Exercice 25.

1. On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Il y a 8 coefficients sur les 9 qui paraissent assez évident. Faisons donc une récurrence : montrons qu'il existe $a_n \in \mathbb{R}$ (c'est le « coefficient inconnu ») tel que

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Initialisation : pour $n = 0$, on a

$$M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si l'on pose $a_0 = 0$. Donc $a_0 = 0$ convient.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $a_n \in \mathbb{R}$ avec

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & a_n + n \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc si l'on pose $a_{n+1} = a_n + n$, on a bien la relation voulue. D'où l'hérédité.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ avec

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et de plus, on peut supposer que

$$a_{n+1} = n + a_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $a_0 = 0$.

Remarque. Ce n'est pas le cas ici, mais il est possible que de choisir d'écrire

$$M^{n+1} = M^n \times M \qquad \text{ou} \qquad M^{n+1} = M \times M^n$$

donnent deux formules de récurrence différentes pour la suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (mais ces deux formules définissent bien sûr la même suite ! une même suite peut être définie par deux formules de récurrence différentes, ce n'est pas interdit), dont l'une est plus facile à utiliser que l'autre...

• Il reste à déterminer a_n pour $n \in \mathbb{N}$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par somme télescopique,

$$a_n - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On peut remarquer que cette dernière égalité reste vraie pour $n = 0$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Remarque. On a aussi

$$a_n = \binom{n}{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on va voir pourquoi dans la suite...

2. (a) On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^3 = 0_3,$$

donc pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$,

$$N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times 0_3 = 0_3.$$

Remarque.

i. Si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, la formule sur les puissances

$$M^{k+p} = M^k \times M^p$$

ne marche sans aucune autre hypothèse sur M **que pour** k **et** p **entier** **<u>positif</u>**. D'où l'importance, dans le calcul précédent, d'avoir $k \geq 3$, pour avoir $k - 3 \geq 0$ (et $3 \geq 0$), pour pouvoir écrire

$$N^{(k-3)+3} = N^{k-3} \times N^3.$$

ii. Par contre, si on a $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ **inversible**, alors la formule sur les puissances

$$M^{k+p} = M^k \times M^p$$

est vrai pour k et p entiers dans $\mathbb{Z}$.

(b) • On a

$$M = I_3 + N,$$

d'où, par la formule du binôme de Newton, **puisque** I_3 **commute avec** N, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$$

car I_3 **et** N **commutent**. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} M^n &= M^n \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=0_3} \\ &= M^n \boxed{I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On vérifie directement que la formule reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

• Pour M^{-1} : on peut le chercher à la main. On peut aussi, par analogie avec l'égalité

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$$

(valable pour tout $x \in]-1,1[$) tester si

$$I_3 - N + N^2$$

ne serait pas l'inverse de M (puisque $N^k = 0_3$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$, ce qui « coupe » la somme précédente à 2). C'est direct :

$$M(I_3 - N + N^2) = (I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 + N^3 = I_3,$$

donc $\boxed{M^{-1} = I_3 - N + N^2}$, et on constate que la formule trouvée précédemment marche aussi pour $n = -1$.
Remarquons que $(-N + N^2)^2 = N^2$ et

$$(-N + N^2)^k = 0$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$, donc la même méthode qu'avant va marcher : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M^{-n} &= (I_3 - N + N^2)^n \\ &= I_3 + n(-N + N^2) + \tfrac{n(n-1)}{2}(-N + N^2)^2 \\ &= I_3 - nN + \tfrac{n(n+1)}{2} N^2 \\ &= I_3 - nN + \tfrac{(-n)(-n-1)}{2} N^2 \end{aligned}$$

et on constate que la formule trouvée précédemment marche encore.
Autre façon : soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$R_n = I_3 - nN + \frac{(-n)(-n-1)}{2} N^2.$$

On veut vérifier que c'est M^{-n}, c'est-à-dire $(M^n)^{-1}$. Or,

$$\begin{aligned} M^n \times R_n &= \left(I_3 + nN + \tfrac{n(n-1)}{2} N^2\right)\left(I_3 - nN + \tfrac{(-n)(-n-1)}{2} N^2\right) \\ &= I_3 + n^2 N^3 + \tfrac{n^4 - n^2}{4} N^4 \\ &= I_3 \end{aligned}$$

car $N^3 = N^4 = 0_3$. Donc la matrice M^n est inversible, et

$$M^{-n} = (M^n)^{-1} = R_n = I_3 - nN + \frac{(-n)(-n-1)}{2} N^2,$$

autrement dit, la formule trouvée précédemment marche encore pour les entiers négatifs.

3. (a) On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}.$$

Et on a bien après calcul :

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3.$$

(b) Comme on a :
$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3, \qquad \text{on a aussi} \qquad A^2 - 3A = -2I_3,$$
d'où
$$\frac{-1}{2}(A - 3I_3)A = I_3.$$
Donc la matrice A est inversible et
$$\boxed{A^{-1} = \frac{-1}{2}(A - 3I_3)}.$$

(c) ★ Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Qu'on soit bien d'accord sur ce qu'il faut montrer : c'est <u>l'existence</u> de a_n et b_n que l'on montre par récurrence (et il faut que a_n et b_n vérifient la relation $A^n = a_nA + b_nI_3$).
Initialisation : Pour $n = 0$, on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ (et pour $n = 1$, on pose $a_1 = 1$, $b_1 = 0$), et on a bien
$$A^0 = a_0A + b_0I_3$$
(et $A^1 = a_1A + b_1I_3$).
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ avec $A^n = a_nA + b_nI_3$. Alors,
$$A^{n+1} = A^n \times A = (a_nA + b_nI_3) \times A = a_nA^2 + b_nA = a_n(3A - 2I_3) + b_nA = (3a_n + b_n)A - 2a_nI_3.$$
Donc, si on pose $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$, on a bien
$$A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_3.$$
D'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ avec $A^n = a_nA + b_nI_3$. On peut même supposer $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n \end{cases}.$$
Remarque. Comme (I_3, A) est une famille libre, les coefficients a_n et b_n sont uniques pour tout $n \in \mathbb{N}$.
★ Ce n'est pas demandé, mais on peut déterminer les valeurs de (a_n) et (b_n) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_{n+1} - 2a_n,$$
donc la suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique
$$X^2 = 3X - 2,$$
qui admet 2 et 1 comme racines. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \lambda 1^n + \mu 2^n.$$
Or, cette relation donne, pour $n = 0$ et $n = 1$:
$$\begin{cases} 0 = a_0 = \lambda + \mu \\ 1 = a_1 = \lambda + 2\mu \end{cases}$$
soit $\mu = 1$ et $\lambda = -1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{a_n = 2^n - 1}.$$
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$b_n = -2a_{n-1} = -2(2^{n-1} - 1) = 2 - 2^n.$$
Or, $1 = b_0 = 2 - 2^0$, donc la formule reste vraie pour $n = 0$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{b_n = 2 - 2^n}.$$
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\boxed{A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3}.$$

(d) ★ On nous demande juste l'existence. On a en multipliant par $(A^{-1})^2$ l'égalité du début :

$$I_3 - 3A^{-1} + 2(A^{-1})^2 = 0_3,$$

soit

$$(A^{-1})^2 = \frac{3}{2}A^{-1} - \frac{1}{2}I_3.$$

En raisonnant par récurrence comme précédemment on montre l'existence de deux suites numériques $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^{-n} = c_n A + d_n I_3.$$

Initialisation : pour $n = 1$, on a

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3,$$

donc

$$c_1 = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad d_1 = \frac{3}{2}$$

conviennent.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons qu'il existe c_n et $d_n \in \mathbb{R}$ avec $A^{-n} = c_n A + d_n I_3$. Alors

$$\begin{aligned} A^{-(n+1)} &= A^{-n} \times A^{-1} \\ &= \big(c_n A + d_n I_3\big) \times A^{-1} \\ &= c_n I_n + d_n A^{-1} = c_n I_n + d_n \left(-\tfrac{1}{2}A + \tfrac{3}{2}I_3\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}d_n A + \left(c_n + \tfrac{3}{2}d_n\right) I_n \end{aligned}$$

donc

$$c_{n+1} = -\frac{1}{2}d_n \qquad \text{et} \qquad d_{n+1} = c_n + \frac{3}{2}d_n$$

conviennent, d'où l'hérédité.

Remarque. Là aussi, on peut trouver une expression explicite de c_n et d_n, mais on va l'avoir par l'autre méthode ci-dessous.

★ Une autre façon de faire, c'est de se demander si la formule trouvée juste avant reste valable pour n négatif, autrement dit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, a-t-on

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = (2^{-n} - 1)A + (2 - 2^{-n})I_3 \qquad ?$$

Faisons le calcul : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n \times \big((2^{-n} - 1)A + (2 - 2^{-n})I_3\big) &= \big((2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3\big) \times \big((2^{-n} - 1)A + (2 - 2^{-n})I_3\big) \\ &= (2 - 2^n - 2^{-n})A^2 + (2^{n+1} - 1 - 2 + 2^{-n})A + (2^{1-n} - 2 - 1 + 2^n)A + \end{aligned}$$

Or, $A^2 = 3A - 2I_3$, donc on a

$$A^n \times \big((2^{-n} - 1)A + (2 - 2^{-n})I_3\big) = (2 - 2^n - 2^{-n})(3A - 2I_3) + (2^{n+1} + 2^{1-n} + 2^n + 2^{-n} - 6)A + (4 - 2^{1-n} - 2^{n+1} + 1)I_3 =$$

(en écrivant $2^{n+1} + 2^n = 3.2^n$ et $2^{1-n} + 2^{-n} = 3.2^{-n}$). Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^{-n} = (2^{-n} - 1)A + (2 - 2^{-n})I_3},$$

ce qui est plus précis que la question posée.

Exercice 26.

1. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

La diagonale de 1 monte petit à petit et pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq n$, on a

$$N^k = 0_n.$$

Pour montrer ceci, soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ayant N comme matrice dans la base B. Alors, de la définition de N, $f(e_1) = \vec{0}$, et pour $i \in [\![2, n]\!]$,

$$f(e_i) = e_{i-1}.$$

Comme $f(\vec{0}) = \vec{0}$, si on note $e_i = \vec{0}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ avec $i \leq 0$, alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$ avec $i \leq n$, on a

$$f(e_i) = e_{i-1}.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par récurrence directe, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ avec $i \leq n$, on a

$$f^k(e_i) = e_{i-k}.$$

• Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \geq n$, on a pour tout $i \in \mathbb{Z}$ avec $i \leq n$,

$$f^k(e_i) = \vec{0}$$

(car $i - k \leq i - n \leq 0$), donc

$$N^k = \mathrm{Mat}_B(f^k) = \mathrm{Mat}_B(\vec{0}, \dots, \vec{0}) = \boxed{0_n}$$

(car c'est la matrice de f^k dans la base B, et que l'image de la base B par f^k est réduite au vecteur nul).
• Et si $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$f^k(e_i) = e_{i-k}$$

pour tout $i \in [\![k+1, n]\!]$, et

$$f^k(e_i) = \vec{0}$$

pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ (car alors $i - k \leq 0$). Donc

$$N^k = \mathrm{Mat}_B(f^k) = \mathrm{Mat}_B(\vec{0}, \dots, \vec{0}, e_1, \dots, e_{n-k}) = \boxed{\begin{pmatrix} 0_{n-k,k} & I_{n-k} \\ 0_{k,k} & 0_{k,n-k} \end{pmatrix}}$$

c'est la matrice où tous les coefficients sont nuls, sauf ceux qui sont sur la k-ème diagonale au dessus de la diagonale normale, qui valent 1.

Remarque. On peut rédiger une récurrence sur k, basée sur la formule du produit matriciel, mais je ne la trouve pas intéressante.

2. Supposons

$$N = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ \vdots & 0 & * & * & * \\ \vdots & & \ddots & * & * \\ \vdots & & & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq n$, on a

$$N^k = 0_n.$$

Là, on va montrer le résultat par récurrence sur k, à l'aide de la formule du produit matriciel (*on pourrait tout à fait l'éviter, en réutilisant l'endomorphisme canoniquement associé à N, comme à la question précédente, et par des techniques similaires à celles de la question précédente...*).
Montrons par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ que :

$$\text{« pour } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \text{ si } i \geq j-k+1, \text{ alors } (N^k)_{i,j} = 0 \text{ ».}$$

Initialisation : pour $k = 1$, $N^k = N$, et pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $i \geq j - 1 + 1 = j$, alors

$$N_{i,j} = 0,$$

c'est par définition de N.
Hérédité : soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, supposons que pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $i \geq j-k+1$, alors $(N^k)_{i,j} = 0$. Alors, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $i \geq j-(k+1)+1 = j-k$:

$$(N^{k+1})_{i,j} = (N^k \times N)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} (N^k)_{i,\ell} N_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{j-1} (N^k)_{i,\ell} N_{\ell,j} + \sum_{\ell=j}^{n} (N^k)_{i,\ell} N_{\ell,j}.$$

Or, pour $\ell \geq j$, on a $N_{\ell,j} = 0$ par définition de N.
Et, pour $\ell \leq j-1$, on a $j \geq \ell - 1$, donc $i \geq j-k \geq \ell - 1 - k$, donc l'hypothèse de récurrence donne $(N^k)_{i,\ell} = 0$.
Donc

$$(N^{k+1})_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{j-1} \underbrace{(N^k)_{i,\ell}}_{=0} N_{\ell,j} + \sum_{\ell=j}^{n} (N^k)_{i,\ell} \underbrace{N_{\ell,j}}_{=0} = 0,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour $k \in [\![1,n]\!]$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $i \geq j-k+1$, alors

$$(N^k)_{i,j} = 0.$$

Donc la matrice N^k est une matrice triangulaire supérieure, dont les $k-1$ diagonales au dessus de la diagonale normale sont nulles.
En particulier, pour $k = n$, on a

$$N^n = 0_n$$

(puisque, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a automatiquement $i \geq 1 \geq j-n+1$), et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq n$,

$$N^k = N^{k-n} \times N^n = N^{k-n} \times N = 0_n.$$

Remarque. Il y a une démonstration de ce résultat à l'aide des matrices par blocs dans le TD sur les compléments d'algèbre linéaire.
On verra beaucoup plus simple en fin d'année : c'est une application directe du théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 27.

1. • Déterminons $\mathrm{Ker}(u)$. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec

$$\vec{v} = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

et notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice-colonne des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base B_3. Alors

$$\vec{v} \in \mathrm{Ker}(u) \quad \Leftrightarrow \quad AX = 0_{3,1} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -y+z & = & 0 \\ x+2y-3z & = & 0 \\ x+y-2z & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & z \\ x-z & = & 0 \\ x-z & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = z \\ x = z \end{array} \right.$$

D'où

$$\mathrm{Ker}(u) = \big\{xe_1 + xe_2 + xe_3, \ \ x \in \mathbb{R}\big\} = \boxed{\mathrm{Vect}\,(e_1 + e_2 + e_3)}.$$

Remarquons que la famille $(e_1 + e_2 + e_3)$ est formée d'un vecteur non nul (car la famille (e_1, e_2, e_3) est libre), donc est une famille libre, donc une base de $\mathrm{Ker}(u)$. Donc

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = 1.$$

• On sait que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, donc

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\big).$$

Or, $\dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = 1$, donc par le théorème du rang appliqué à u,

$$\dim\big(\mathrm{Im}(u)\big) = 3 - 1 = 2,$$

et comme $u(e_1 + e_2 + e_3) = \vec{0}$ (car $e_1 + e_2 + e_3 \in \mathrm{Ker}(u)$), on a

$$u(e_3) = -u(e_2) - u(e_1)$$

(par linéarité de u). Donc

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\big(u(e_1), u(e_2)\big) = \boxed{\mathrm{Vect}\big(e_2 + e_3, -e_1 + 2e_2 + e_3\big)},$$

et comme $\big(e_2 + e_3, -e_1 + 2e_2 + e_3\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$ formée de deux vecteurs, et que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension 2, c'est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

• Déterminons le noyau de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. On a

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec

$$\vec{v} = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

et notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice-colonne des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base B_3. Alors

$$\vec{v} \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \quad \Leftrightarrow \quad (A-I_3)X = 0_{3,1} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -x-y+z & = & 0 \\ x+y-3z & = & 0 \\ x+y-3z & = & 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} -x-y+z & = & 0 \\ -2z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

D'où

$$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \big\{xe_1 - xe_2, \ \ x \in \mathbb{R}\big\} = \boxed{\mathrm{Vect}\,(e_1 - e_2)}.$$

• Déterminons le noyau de $\mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id})$. On a

$$A+I_3=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-3\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, alors il existe $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ avec

$$\vec{v}=xe_1+ye_2+ze_3,$$

et notons $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ la matrice-colonne des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base B_3. Alors

$$\vec{v}\in\mathrm{Ker}(u{+}\mathrm{Id})\quad\Leftrightarrow\quad(A{+}I_3)X=0_{3,1}\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{lcl}x-y+z&=&0\\x+3y-3z&=&0\\x+y-z&=&0\end{array}\right.\begin{array}{c}\\L_2\leftarrow L_2+3L_1\\L_3\leftarrow L_3+L_1\end{array}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl}x-y+z&=&0\\4x&=&0\\2x&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

D'où

$$\mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id})=\big\{ye_2+ye_3,\ \ y\in\mathbb{R}\big\}=\boxed{\mathrm{Vect}\,(e_2+e_3)}.$$

2. **Analyse :** supposons que $\beta=(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$ convienne. Alors il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tels que

$$\mathrm{Mat}_\beta(u)=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&B&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$$

Comme c'est la matrice de u dans la base $\beta=(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$, on doit avoir

$$u(\mathrm{e}_1)=\alpha\mathrm{e}_1\ (\text{soit } \mathrm{e}_1\in\mathrm{Ker}(u-\alpha\mathrm{Id})),\quad u(\mathrm{e}_2)=B\mathrm{e}_2\ (\text{soit } \mathrm{e}_2\in\mathrm{Ker}(u-\beta\mathrm{Id}))\quad\text{et}\quad u(\mathrm{e}_3)=\gamma\mathrm{e}_3\ (\text{soit } \mathrm{e}_3\in\mathrm{Ker}(u-\gamma\mathrm{Id})).$$

Enfin, comme B est une base, $(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$ est libre, donc e_1, e_2 et e_3 sont non nuls (*mais ça ne suffit pas pour assurer la liberté*).
Comment trouver α, β, γ ? Il faut déjà que les noyaux

$$\mathrm{Ker}(u-\alpha\mathrm{Id}),\qquad\mathrm{Ker}(u-\beta\mathrm{Id})\qquad\text{et}\qquad\mathrm{Ker}(u-\gamma\mathrm{Id})$$

ne soient pas réduit à $\{\vec{0}\}$, puisque l'on veut prendre des vecteurs dedans qui soient non nuls. Grâce à la question précédente, on a trois valeurs possibles qui conviennent :

$$0,\qquad1,\qquad-1.$$

Peut-on prendre deux valeurs identiques pour α, β ou γ ? Les noyaux que l'on a trouvé à la question précédente sont de dimension 1, donc si on prend deux vecteurs dans un même noyau, ils seront liés, et donc la famille β que l'on construira ne sera pas libre. Donc, si on veut réutiliser les noyaux de la question précédente, il faut prendre un seul vecteur par noyau (donc on posera $\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{0,1,-1\}$).
Synthèse : Notons

$$\mathrm{e}_1=e_1{+}e_2{+}e_3\in\mathrm{Ker}(u)=\mathrm{Ker}(u{-}0.\mathrm{Id}),\quad\mathrm{e}_2=e_1{-}e_2\in\mathrm{Ker}(u{-}\mathrm{Id})=\mathrm{Ker}(u{-}1.\mathrm{Id})\quad\text{et}\quad\mathrm{e}_3=e_2{+}e_3\in\mathrm{Ker}(u{+}\mathrm{Id}$$

Soit

$$P=\mathrm{Mat}_{B_3}\big((\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)\big)=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix},$$

on a

$$\det(P)=-1\neq0,$$

donc la matrice P est inversible, donc

$$\beta=(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$. Et puisque
$$u(\mathrm{e}_1) = \vec{0}$$
(car $\mathrm{e}_1 \in \mathrm{Ker}(u)$),
$$u(\mathrm{e}_2) = \mathrm{e}_2$$
(car $\mathrm{e}_2 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$) et
$$u(\mathrm{e}_3) = -\mathrm{e}_3$$
(car $\mathrm{e}_3 \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$), on a :
$$\boxed{D = \mathrm{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

3. D'après les formules de changement de bases, on a
$$\boxed{D = P^{-1}AP}$$
(c'est à dire $A = PDP^{-1}$) car P est la matrice de passage de la base B_3 vers β, et que A est la matrice de u dans la base B_3, et D celle de u dans la base β.
Remarquons, qu'en multipliant par P à gauche, et par P^{-1} à droite, cela donne
$$\boxed{A = PDP^{-1}}.$$

4. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$D^{2n} = D^2,$$
et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$D^{2n+1} = D.$$
Remarque. On fait attention, $D^0 = I_2 \neq D^2$...

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$A^n = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}D\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}DP^{-1}\dots PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}DP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$
Montrons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
Initialisation : pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $D^0 = I_3$, donc
$$PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0.$$
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors
$$A^{n+1} = A^n \times A = (PD^nP^{-1}) \times (PDP^{-1}) = PD^n\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},$$
d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$A^n = PD^nP^{-1}.$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\boxed{A^{2n} = PD^{2n}P^{-1} = PD^2P^{-1} = A^2}$$
et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\boxed{A^{2n+1} = PD^{2n+1}P^{-1} = PDP^{-1} = A}.$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$
Le système est équivalent à :
$$X_{n+1} = AX_n.$$
Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$X_n = A^n X_0.$$
Initialisation : pour $n = 0$, on a
$$A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0.$$
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $X_n = A^n X_0$, alors
$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0,$$
d'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X_n = A^n X_0.$$
Remarque. Réciproquement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X_n = A^n X_0,$$
alors il est direct que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X_{n+1} = AX_n,$$
donc que le système est vérifié.

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$X_{2n} = A^2 X_0,$$
et pour $n \in \mathbb{N}$ on a
$$X_{2n+1} = AX_0,$$
avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
D'où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{cases} x_{2n} = -y_0 + z_0 = 1 \\ y_{2n} = -x_n + z_n = 2 \\ z_{2n} = -x_0 - y_0 + 2z_0 = 3 \end{cases}$$
car $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{cases} x_{2n+1} = 1 \\ y_{2n+1} = -4 \\ z_{2n+1} = -3 \end{cases}.$$

Exercice 28. 1) Soit
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$$
tel que
$$AX = 0_{n,1},$$

alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$(AX)_{i,1} = 0,$$

et en utilisant la formule du produit matriciel :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0,$$

que l'on réécrit en

$$-a_{i,i}x_i = \sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} a_{i,j}x_j.$$

Choisissons $i \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$|x_i| = \max_{j\in[\![1,n]\!]} |x_j|$$

(c'est possible de prendre le maximum d'un ensemble **fini** de réels). Alors par inégalité triangulaire :

$$|a_{i,i}x_i| = \left|\sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} |a_{i,j}||x_j| \leq [x_i| \sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} |a_{i,j}|$$

Si $|x_i| > 0$, alors on a

$$|a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} |a_{i,j}|,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc

$$|x_i| = 0.$$

Or, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, par définition du maximum, on a

$$|x_j| \leq |x_i| = 0.$$

Comme un module est positif, on a alors

$$|x_j| = 0$$

pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, donc

$$X = 0_{n,1}.$$

Donc

$$\mathrm{Ker}(A) \subset \{0_{n,1}\},$$

et donc la matrice A est bien inversible.

2) Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors

$$X = AX + B \qquad \Leftrightarrow \qquad (A - I_n)X = B.$$

Il suffit donc de montrer que la matrice $A - I_n$ est inversible, pour avoir l'existence et l'unicité d'un tel X, et ce sera

$$\boxed{X = (A - I_n)^{-1}B}.$$

D'après la question précédente, il suffit de montrer l'inégalité

$$\big|(A - I_n)_{i,i}\big| = |a_{i,i} - 1| > \sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} |a_{i,j}| = \sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} \big|(A - I_n)_{i,j}\big|$$

pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Or, par inégalité triangulaire, pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a

$$|a_{i,i} - 1| \geq \big||a_{i,i}| - |1|\big| = \big|1 - |a_{i,i}|\big| \geq 1 - |a_{i,i}|.$$

En utilisant l'hypothèse, il vient

$$|a_{i,i}-1| > \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| - |a_{i,i}| = \sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} |a_{i,j}|.$$

On peut donc appliquer la première question, ce qui conclut.

3) • Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $PU = U$, puisque, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$(PU)_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \underbrace{U_{j,1}}_{=1} = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1 = U_{i,1}.$$

Donc $U \in \mathrm{Ker}(P - 1\cdot I_n)$, et comme $U \neq 0_{n,1}$, on en déduit que $P - 1\cdot I_n$ n'est pas inversible.
Donc

$$1 \in \big\{|\lambda| \text{ tel que } (P-\lambda.I_n) \text{ n'est pas inversible}\big\}.$$

Donc, si on note

$$r = \sup\{|\lambda| \text{ tel que } (P-\lambda.I_n) \text{ n'est pas inversible}\},$$

on a

$$r \geq 1.$$

• Soit ensuite $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$, alors

$$\sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} |p_{i,j}| = 1 - p_{i,i} < |\lambda| - p_{i,i} \leq |\lambda - p_{i,i}|$$

(la dernière inégalité est une application de l'inégalité triangulaire). Donc la matrice $P-\lambda.I_n$ vérifie les hypothèses de la question 1, donc est inversible. Donc

$$r \leq 1.$$

• Par double inégalité, on a

$$r = 1.$$

• Puis, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$(PU)_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \underbrace{U_{j,1}}_{=1} = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}$$

donc

$$\left(\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1\right) \Leftrightarrow \Big(\forall i \in [\![1,n]\!],\ (PU)_{i,1} = 1 = U_{i,1}\Big) \Leftrightarrow PU = U.$$

Donc, pour $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$P \text{ est une matrice stochastique} \Leftrightarrow \Big(p_{i,j} \geq 0 \text{ pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \text{ et } PU = U\Big).$$

Si P et Q sont stochastiques, alors

$$PQU = PU = U,$$

et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$(PQ)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{p_{i,k}}_{\geq 0} \underbrace{q_{k,j}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Donc PQ est stochastique. Par récurrence directe, on en déduit que toute puissance d'une matrice stochastique en est une aussi.

Exercice 29. Notons F cet ensemble, alors pour tout $M \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$,

$$M \in F \qquad \Leftrightarrow \qquad MA = AM.$$

• $F \subset \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ par définition.
• F est non vide : il contient la matrice nulle, puisque

$$A \times 0_4 = 0_4 = 0_4 \times A,$$

A (puisque $A \times A = A \times A$...), et plus généralement toute puissance de A.
• Soit $(M, N) \in F^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$MA = AM \qquad \text{et} \qquad NA = AN,$$

donc

$$(\lambda M + N)A = \lambda MA + NA = \lambda AM + AN = A(\lambda M + N),$$

donc $\lambda M + N \in F$.
• Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.
• Soit

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

une matrice quelconque, alors

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad MA = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ c_4 & d_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M \in F \qquad \Leftrightarrow \qquad AM = MA \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0 \\ a_1 = c_3 \\ b_1 = d_3 \\ a_2 = c_4 \\ b_2 = d_4 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 & a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Ici, il est plus facile de travailler avec des matrices par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix},$$

donc pour

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

quelconque (avec M_1, M_2, M_3, $M_4 \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$), on a

$$AM = \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad MA = \begin{pmatrix} M_2 & 0_2 \\ M_4 & 0_2 \end{pmatrix}$$

donc

$$M \in F \qquad \Leftrightarrow \qquad AM = MA \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} M_2 = 0_2 \\ M_4 = M_1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad M = \begin{pmatrix} M_1 & 0_2 \\ M_3 & M_1 \end{pmatrix}$$

On a 8 paramètres qui bougent librement, donc

$$\boxed{\dim(F) = 8}.$$

On peut faire plus rigoureux, en explicitant les 8 matrices qui vont former une base de F à partir de l'expression précédente...

Exercice 30.

1. Des opérations sur les lignes donnent :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \boxed{0}.$$

2. Des opérations sur les lignes donnent :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ -2 & -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{0}$$

3. Des opérations sur les lignes et les colonnes donnent :

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\ &\underset{L_3 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b-c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & -(b+c+a) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \boxed{(a+b+c)^3} \end{aligned}$$

4. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $D_{4,n}$ le déterminant de taille n cherché. Développons par rapport à la dernière colonne (pensez à placer les + et les -), ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$:

$$D_{4,n} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & -1 \end{vmatrix}_{[n-1]} + 2D_{4,n-1} = (-1)^{n-1} \times (-1)^{n-1} + 2D_{4,n-1}, \qquad \text{soit} \qquad D_{4,n} - 2D_{4,n-1} = 1$$

On reconnaît donc une suite arithmético-géométrique. On cherche ℓ tel que : $\ell - 2\ell = 1$, soit $\ell = -1$. Alors la suite numérique $(D_{4,n} - \ell)_{n \geq 2}$ est une suite géométrique de raison 2.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$D_{4,n} - \ell = 2^{n-2}(D_{4,2} - \ell).$$

Donc $D_{4,n} = 2^{n-2}D_{4,2} + 2^{n-2} - 1$, or $D_{4,2} = 3$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$D_{4,n} = 3.2^{n-2} + 2^{n-2} - 1 = \boxed{2^n - 1}.$$

Si on choisit de développer différemment : par exemple, en développant suivant la première colonne, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$,

$$D_{4,n} = 1. \begin{vmatrix} 2 & & & (0) \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n-1]} - (-1)D_{4,n-1} = 2^{n-1} - (-1)D_{4,n-1} = 2^{n-1} + D_{4,n-1}.$$

Dans ce cas, on a $D_{4,n} - D_{4,n-1} = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, donc par somme télescopique, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$,

$$D_{4,n} - D_{4,2} = \sum_{k=3}^{n} \left(D_{4,k} - D_{4,k-1}\right) = \sum_{k=3}^{n} 2^{k-1} = 4\frac{1-2^{n-2}}{1-2} = 2^n - 4,$$

et comme

$$D_{4,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

on a bien de nouveau

$$\boxed{D_{4,n} = 2^n - 1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ (si $a = 0$, c'est le déterminant de la matrice identité, qui vaut 1), notons $D_{5,n}$ le déterminant cherché de taille n.
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. On a un déterminant tridiagonal, en développant par rapport à la première colonne, on a :

$$D_{5,n} = (1+a^2)D_{5,n-1} - a \begin{vmatrix} a & & & & & (0) \\ a & 1+a^2 & a & & & \\ & a & 1+a^2 & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & & & a & 1+a^2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

En développant par rapport à la première ligne, on arrive à :

$$D_{5,n} = (1+a^2)D_{5,n-1} - a^2 D_{5,n-2}.$$

Remarque. $D_{5,n}$ n'a une définition naturelle que pour $n \geq 2$. Pour que cette formule marche avec $n = 3$, il faut comprendre que l'on pose $D_{5,1} = 1 + a^2$.

Donc la suite numérique $(D_{5,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique

$$r^2 - (1+a^2)r + a^2 = 0.$$

On cherche donc les racines de : $P = X^2 - (1+a^2)X + a^2$. Son discriminant vaut $\Delta = (1+a^2)^2 - 4a^2 = (1-a^2)^2$.
• Donc si $a = \pm 1$, $\Delta = 0$. On a une seule racine qui est

$$\frac{1+a^2}{2} = 1.$$

Dans ce cas, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$D_{5,n} = (\lambda n + \mu).$$

Or

$$\begin{cases} D_{5,1} = \lambda + \mu = 2 \\ D_{5,2} = 2\lambda + \mu = 3 \end{cases}.$$

Donc $\lambda = 1$ et $\mu = 1$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{D_{5,n} = n + 1}.$$

• Si $a \neq \pm 1$, on a deux racines distinctes qui sont

$$\frac{(1+a^2) - |1-a^2|}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(1+a^2) + |1-a^2|}{2},$$

et on arrive à 1 et a^2 (suivant si $|a| > 1$ ou $|a| < 1$, la valeur absolue va changer de signes mais on retrouvera les deux mêmes racines).

Remarque. On peut aussi directement remarquer que

$$X^2 - (1+a^2)X + a^2 = (X-1)(X-a^2),$$

ce qui donne directement les racines...

Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$D_{5,n} = \lambda + \mu a^{2n}.$$

Avec les conditions initiales, on a

$$\begin{cases} D_{5,1} = \lambda + \mu a^2 = 1 + a^2 & (1) \\ D_{5,2} = \lambda + \mu a^4 = (1+a^2)^2 - a^2 = 1 + a^2 + a^4 & (2) \end{cases}.$$

(2) - (1) donne : $\mu(a^4 - a^2) = a^4$ donc

$$\mu = \frac{a^2}{a^2-1}$$

(car $a^2 \neq 1$ et $a \neq 0$). D'où

$$\lambda = 1 + a^2 - \mu a^2 = \frac{(a^2-1)(a^2+1) - a^4}{a^2-1} = \frac{-1}{a^2-1}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{D_{5,n} = \frac{-1}{a^2-1} + \frac{a^2}{a^2-1}a^{2n} = \frac{a^{2(n+1)}-1}{a^2-1} = \sum_{k=0}^{n} a^{2k}}$$

(cette dernière formule reste vraie pour $a = 0$ et $a = \pm 1$).

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. En développant par rapport à la première colonne, puis (pour le deuxième déterminant) en développant suivant la première ligne :

$$D_{6,n} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & & (0) \\ 2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3 \\ (0) & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{[n]} = 5D_{6,n-1} - 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}_{[n-1]} = 5D_{6,n-1} - 6D_{6,n-2}.$$

Remarque. $D_{6,n}$ n'a une définition naturelle que pour $n \geq 2$. Pour que cette formule marche avec $n = 3$, il faut comprendre que l'on pose $D_{6,1} = 5$.

Donc la suite numérique $(D_{6,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique

$$r^2 - 5r + 6 = 0,$$

dont le discriminant vaut $\Delta = 25 - 24 = 1$. Les racines sont donc 3 et 2.
Ainsi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$D_{6,n} = \lambda 3^n + \mu 2^n.$$

Puis,

$$\begin{cases} 5 = D_{6,1} = 3\lambda + 2\mu \\ 19 = D_{6,2} = 9\lambda + 4\mu \end{cases},$$

donc $L_2 - 2L_1$ donne $3\lambda = 9$, soit $\lambda = 3$, puis en reportant, $\mu = -2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{D_{6,n} = 3^{n+1} - 2^{n+1}}.$$

Exercice 31.

1. Soit $x \in \mathbb{K}$, alors

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & a+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & b+x & a+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & b+x & \dots & b+x & a+x \end{vmatrix}_{[n]} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ \vdots \\ C_n \leftarrow C_n - C_1}}{=} \begin{vmatrix} a+x & c-a & c-a & \dots & c-a \\ b+x & a-b & c-b & \dots & c-b \\ b+x & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-b \\ b+x & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Méthode 1 : en développement par rapport à la première colonne, on trouve bien que

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

pour α et β deux éléments de $\mathbb{K}$ pas facile à calculer (*mais on n'a pas besoin de les calculer à cette étape*). En effet, en développant suivant la première colonne, on a une somme dont chaque terme est (au signe près) le produit de $a+x$ ou $b+x$ avec un déterminant de taille $n-1$ dont tous les coefficients ne sont que des constantes (dans $\mathbb{K}$), donc est un élément de $\mathbb{K}$ (et donc ne dépend pas de x) (en effet, si on « barre » la première colonne, il ne reste plus aucun x...).

Méthode 2 : la linéarité suivant la première colonne permet alors d'écrire directement

$$f(x) = \underbrace{\begin{vmatrix} a & c-a & c-a & \dots & c-a \\ b & a-b & c-b & \dots & c-b \\ b & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-b \\ b & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}_{[n]}}_{\in\mathbb{K}} + x \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & c-a & c-a & \dots & c-a \\ 1 & a-b & c-b & \dots & c-b \\ 1 & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-b \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}_{[n]}}_{\in\mathbb{K}}$$

et on retrouve directement la forme voulue : $f(x) = \alpha x + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ (*qui s'expriment sous la forme de deux déterminants, qu'on ne sait pas calculer à cette étape...*).

2. • On suppose $c \neq b$.
On a

$$D = f(0) = \beta,$$

on cherche donc β. En testant en $x = -b$ et $x = -c$ (les déterminants sont alors triangulaires, si on repart de la définition de $f(x)$, donc se calculent directement), on a :

$$\begin{cases} (a-b)^n = f(-b) = -b\alpha + \beta & (1) \\ (a-c)^n = f(-c) = -c\alpha + \beta & (2) \end{cases}.$$

Alors $c(1) - b(2)$ donne : $\beta(c-b) = c(a-b)^n - b(a-c)^n$. Donc

$$\boxed{D = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}}$$

• Si $b = c$, des opérations sur les lignes et les colonnes donnent alors

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n}{=} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \dots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & \dots & b & a \end{vmatrix} \\
&= \big(a+(n-1)b\big) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ 1 & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1}}{=} \big(a+(n-1)b\big) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} \\
&= \boxed{\big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}}
\end{aligned}
$$

Remarque. Pour les 5/2 : on sait diagonaliser cette matrice (cf. l'un des exercices du TD sur la réduction), donc son déterminant s'en déduit facilement...

Exercice 32. Pour les opérations sur les colonnes qui vont suivre, on notera M_k la k-ème colonne de la matrice.

1.

$$
\begin{aligned}
\det(D_1, \dots, D_n) &\underset{M_1 \leftarrow M_1 + \dots + M_n}{=} \det\left((n-1)\sum_{k=1}^{n} C_k, D_2, \dots, D_n\right) \\
&= (n-1)\det\left(\sum_{k=1}^{n} C_k, D_2, \dots, D_n\right) \qquad \text{par linéarité par rapport à la pr} \\
&\underset{\substack{M_2 \leftarrow M_2 - M_1 \\ \vdots \\ D_n \leftarrow M_n - M_1}}{=} (n-1)\det\left(\sum_{k=1}^{n} C_k, -C_2, \dots, -C_n\right) \\
&\underset{M_1 \leftarrow M_1 + M_2 + \dots + M_n}{=} (n-1)\det(C_1, -C_2, \dots, -C_n) \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)\det(C_1, C_2, \dots, C_n) = \boxed{(-1)^{n-1}(n-1)\det(A)}
\end{aligned}
$$

2.

$$\begin{aligned}
\det(D_1,\dots,D_n) &\underset{M_1\leftarrow M_1+\cdots+M_n}{=} \det\left((2n-1)\sum_{k=1}^{n} C_k, D_2,\dots,D_n\right)\\
&= (2n-1)\det\left(\sum_{k=1}^{n} C_k, D_2,\dots,D_n\right)\\
&\underset{\substack{M_2\leftarrow M_2-2M_1\\ \vdots\\ M_n\leftarrow M_n-2M_1}}{=} (2n-1)\det\left(\sum_{k=1}^{n} C_k, -C_2,\dots,-C_n\right)\\
&\underset{M_1\leftarrow M_1+M_2+\cdots+M_n}{=} (2n-1)\det(C_1,-C_2,\dots,-C_n) = \boxed{(2n-1)(-1)^{n-1}\det(A)}
\end{aligned}$$

Exercice 33. La matrice A est antisymétrique, donc

$$A^\top = -A,$$

et donc

$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^n\det(A) = -\det(A)$$

si n est impair (pour la dernière égalité). Donc

$$\det(A) = 0$$

si n est impair, donc A est bien non-inversible.

Exercice 34. 1) Montrons le résultat par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : pour $n = 1$, soit donc $P_{1,1} \in \mathbb{K}_p[X]$, alors

$$f : x \in \mathbb{K} \mapsto \det\big(P_{1,1}(x)\big) = P_{1,1}(x)$$

est bien une fonction polynomiale de degré au plus $1 \times p = p$. D'où l'initialisation.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour toute famille $(P_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \big(\mathbb{K}_p[X]\big)^{n^2}$, la fonction

$$f : x \in \mathbb{K} \mapsto \det\Big(\big(P_{i,j}(x)\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\Big)$$

(qui dépend de la famille) soit une fonction polynomiale de degré au plus np.
Soit alors une famille $(Q_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2} \in \big(\mathbb{K}_p[X]\big)^{(n+1)^2}$ de polynômes de degré au plus p, et notons

$$g : x \in \mathbb{K} \mapsto \det\Big(\big(Q_{i,j}(x)\big)_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}\Big)$$

Soit $x \in \mathbb{K}$, développons alors le déterminant $g(x)$ suivant la première ligne :

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{1+j}Q_{1,j}(x)\det\big(H_j(x)\big),$$

où, pour $j \in [\![1, n+1]\!]$, $H_j(x)$ est la matrice obtenue en barrant dans la matrice $\big(Q_{i,j}(x)\big)_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}$ la colonne j et la première ligne. C'est donc une matrice carrée de taille n, chacun de ses coefficients est une fonction polynomiale en x de degré au plus p, puisque, pour $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$\big(H_j(x)\big)_{i,k} = \begin{cases} Q_{i+1,k}(x) & \text{si } k \le j-1\\ Q_{i+1,k+1}(x) & \text{si } k \ge j \end{cases}.$$

L'hypothèse de récurrence donne alors que, pour $j \in [\![1, n+1]\!]$, la fonction

$$x \in \mathbb{K} \mapsto \det\big(H_j(x)\big)$$

est polynomiale de degré au plus np.
Alors, pour $j \in [\![1, n+1]\!]$, par produit avec $Q_{1,j}$, la fonction

$$x \in \mathbb{K} \mapsto Q_{1,j}(x) \det\big(H_j(x)\big)$$

est polynomiale de degré au plus

$$np + \deg\big(Q_{1,j}\big) \leq np + p = (n+1)p.$$

Par combinaison linéaire, on en déduit bien que g est une fonction polynomiale de degré au plus $(n+1)p$. D'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(P_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \big(\mathbb{K}_p[X]\big)^{n^2}$ famille de polynômes de degré au plus p, la fonction

$$f : x \in \mathbb{K} \mapsto \det\Big(\big(P_{i,j}(x)\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\Big)$$

est une fonction polynomiale de degré au plus np.
2) Montrons le résultat par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : pour $n = 1$, soit $A \in \mathrm{M}_1(\mathbb{K})$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $A = (\alpha)$, et donc

$$f : x \in \mathbb{K} \mapsto \det\big(xI_1 - (\alpha)\big) = x - \alpha$$

est bien une fonction polynomiale unitaire de degré 1.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction

$$f : x \in \mathbb{K} \mapsto \det\big(xI_n - A\big) \in \mathbb{K}$$

(qui dépend de A) est polynomiale, unitaire et de degré n.
Soit alors $B \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ et notons

$$g : x \in \mathbb{K} \mapsto \det\big(xI_{n+1} - B\big) \in \mathbb{K}.$$

Soit $x \in \mathbb{K}$, développons alors le déterminant $g(x)$ suivant la première ligne :

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} (xI_n - B_{n+1})_{1,j} \det\big(H_j(x)\big) = (x - b_{1,1}) \det\big(H_1(x)\big) + \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{1+j} (-b_{1,j}) \det\big(H_j(x)\big),$$

où, pour $j \in [\![1, n+1]\!]$, $H_j(x)$ est la matrice obtenue en barrant dans la matrice $\big(xI_{n+1} - B\big)_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}$ la colonne j et la première ligne. C'est donc une matrice carrée de taille n, chacun de ses coefficients est une fonction polynomiale en x de degré au plus 1, puisque, pour $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$\big(H_j(x)\big)_{i,k} = \begin{cases} (xI_{n+1} - B)_{i+1,k} = x\delta_{i+1,k} - b_{i+1,k} & \text{si } k \leq j-1 \\ (xI_{n+1} - B)_{i+1,k+1} = x\delta_{i+1,k+1} - b_{i+1,k+1} & \text{si } k \geq j \end{cases}.$$

De plus, en notant C la matrice obtenue en barrant la première ligne et première colonne de B, on a

$$H_1(x) = xI_n - C.$$

Donc, l'hypothèse de récurrence donne que la fonction

$$x \in \mathbb{K} \mapsto \det\big(H_1(x)\big)$$

est une fonction polynomiale unitaire de degré n. Par produit, on a alors que la fonction

$$x \in \mathbb{K} \mapsto (x - b_{1,1}) \det\big(H_1(x)\big)$$

est une fonction polynomiale unitaire de degré $n+1$.
De plus, le résultat de la question précédente montre que, pour $j \in [\![2, n+1]\!]$, la fonction

$$x \mapsto \det\big(H_j(x)\big)$$

est une fonction polynomiale de degré au plus $n \times 1$, donc la fonction

$$x \mapsto (-1)^{1+j}(-b_{1,j}) \det\big(H_j(x)\big)$$

aussi.
Par addition, on en déduit bien que g est une fonction polynomiale unitaire de degré $n+1$. D'où l'hérédité.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction

$$f : x \in \mathbb{K} \mapsto \det\big(xI_n - A\big) \in \mathbb{K}$$

est polynomiale, unitaire et de degré n.

Exercice 35. 1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda I_p - A = \begin{pmatrix} \lambda & & & & -a_0 \\ -1 & \lambda & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & \lambda & -a_{p-2} \\ & & & -1 & \lambda - a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Développons alors $\det(\lambda I_p - A)$ suivant la dernière colonne (dans la grosse matrice qui suit, le bloc en haut à gauche a k lignes et k colonnes, et celui en bas à droite a $p-k-1$ lignes et $p-k-1$ colonnes) :

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I_p - 1) &= \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^{p+1+k}(-a_k) \det \left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda & & & & & & & \\ -1 & \lambda & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -1 & \lambda & & & & \\ \hline & & & & -1 & \lambda & & \\ & & & & & -1 & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \lambda \\ & & & & & & & -1 \end{array}\right) + (\lambda - a_{p+1}) \begin{vmatrix} \lambda & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \lambda & \\ & & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^{p+1+k}(-a_k)(-1)^{p-k-1}\lambda^k + (\lambda - a_{p-1})\lambda^{p-1} \qquad \text{(déterminant d'une matrice triangulaire par b} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(chaque bloc étant lui-même triangulaire)} \\
&= \boxed{\lambda^p - a_{p-1}\lambda^{p-1} - a_{p-2}\lambda^{p-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0}
\end{aligned}$$

Avec la notation de la question 2d, on a

$$\det(\lambda I_p - A) = P(\lambda).$$

Autre méthode : si on choisit de développer le déterminant suivant la première ligne, on aboutit au résultat, mais il faut pour cela rédiger une récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$: fixons $\lambda \in \mathbb{K}$, notons, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\P_p$ la proposition

$$\forall (a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p, \quad \det\big(\lambda I_p - A(a_0, \ldots, a_{p-1})\big) = \lambda^p - a_{p-1}\lambda^{p-1} - a_{p-2}\lambda^{p-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0,$$

en notant

$$A(a_0, \ldots, a_p) = \begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & a_{p-2} \\ & & & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Initialisation : pour $p = 2$, pour tout $(a_0, a_1) \in \mathbb{K}^2$,

$$\det(\lambda I_2 - A(a_0, a_1)) = \begin{vmatrix} \lambda & -a_0 \\ -1 & \lambda - a_1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - a_1) - (-1)(-a_0) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0,$$

ce qui est l'égalité voulue, d'où $\P_2$.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$, supposons $\P_p$ vraie. Alors, en développant suivant la première ligne, pour tout $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$,

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I_{p+1} - A(a_0, \dots, a_p)) &= \begin{vmatrix} \lambda & & & & -a_0 \\ -1 & \lambda & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & \lambda & -a_{p-1} \\ & & & -1 & \lambda - a_p \end{vmatrix}_{[p+1]} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & & & & -a_1 \\ -1 & \lambda & & & -a_2 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & \lambda & -a_{p-1} \\ & & & -1 & \lambda - a_p \end{vmatrix}_{[p]} + (-1)^{p+1+1}(-a_0) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & \lambda \\ & & & -1 \end{vmatrix}_{[p]} \\
&= \lambda \det\big(\lambda I_p - A(a_1, \dots, a_p)\big) + (-1)^{p+1} a_0 (-1)^p \\
&\underset{\text{H.R.}}{=} \lambda\big(\lambda^p - a_p\lambda^{p-1} - a_{p-1}\lambda^{p-2} - \dots - a_2\lambda - a_1\big) - a_0 \\
&= \lambda^{p+1} - a_p\lambda^p - a_{p-1}\lambda^{p-1} - \dots - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité voulue. Donc $\P_{p+1}$ est vraie. D'où l'hérédité.
Conclusion : on a donc bien montré $\P_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$, par récurrence sur p.
2a) • Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons la famille $\mathcal{F}_p$ libre. Comme c'est une famille d'éléments de E, on a alors

$$p = \mathrm{Card}\big(\mathcal{F}_p\big) \leq \dim(E),$$

donc l'ensemble des entiers p tels que la famille $\mathcal{F}_p$ est libre est majoré. Donc le maximum de cet ensemble d'entiers existe.
• Par définition du p de l'énoncé, la famille $\mathcal{F}_{p+1}$ est liée, donc il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ **non tous nuls** tel que

$$\sum_{k=0}^{p} \lambda_k u^k(x) = \vec{0}.$$

Si $\lambda_p = 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = \vec{0},$$

et comme la famille $\mathcal{F}_p$ est libre, on a aussi $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$, ce qui contredit que les λ_k pour $k \in [\![0, p]\!]$ sont non tous nuls.
Donc $\lambda_p \neq 0$, puis

$$u^p(x) = -\frac{1}{\lambda_p} \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{p-1} -\frac{\lambda_k}{\lambda_p} u^k(x).$$

Donc, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, en notant

$$a_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_p},$$

on a le résultat voulu.
2b) Pour $k \in [\![0, p-2]\!]$,

$$u\big(u^k(x)\big) = u^{k+1}(x) \in F$$

car $k + 1 \in [\![0, p-1]\!]$. Puis, pour $k = p - 1$,

$$u\big(u^{p-1}(x)\big) = u^p(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{p-1} u^{p-1}(x) \in F$$

grâce à la question précédente.

Donc, pour tout $x \in \mathcal{F}_p$, on a $u(x) \in F$, et donc par linéarité de u, $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_p)$ est stable par u.
Puis,

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}_p}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & a_{p-2} \\ & & & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

(c'est la matrice A de la première question) par les calculs précédents.
2c) Notons $n = \dim(E)$. Comme F est stable par u (et $p = \dim(F)$), il existe $B \in \mathrm{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathrm{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ avec

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{c|c} M & B \\ \hline 0_{n-p,p} & C \end{array}\right)$$

2d) Par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda I_n - \mathrm{Mat}_B(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_p - M & -B \\ \hline 0_{n-p,p} & \lambda I_{n-p} - C \end{array}\right),$$

et comme cette matrice est triangulaire par blocs, on a

$$\chi_u(\lambda) = \det\big(\lambda I_n - \mathrm{Mat}_B(u)\big) = \det(\lambda I_p - M)\det(\lambda I_{n-p} - C) = P(\lambda) \times \det(\lambda I_{n-p} C).$$

Comme la fonction

$$\lambda \mapsto \det(\lambda I_{n-p} - C) = \chi_C(\lambda)$$

est polynomiale, on en déduit bien que le polynôme P divise le polynôme χ_u :

$$\chi_u = \chi_C \times P.$$

2e) Par conséquent,

$$\chi_u\big(u\big)(x) = \chi_C\big(u\big) \circ P\big(u\big)(x),$$

mais

$$P\big(u\big)(x) = u^p(x) - a_{p-1}u^{p-1}(x) - \cdots - a_1 u(x) - a_0 x = \vec{0}$$

par définition de $(a_0, \ldots, a_{p-1})$, donc

$$\chi_u\big(u\big)(x) = \chi_C\big(u\big)(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Cela étant vrai pour tout $x \in E \setminus \{\vec{0}\}$ par ce qui précède, et pour $x = \vec{0}$ car $\chi_u\big(u\big)$ est un endomorphisme, on en déduit bien

$$\chi_u\big(u\big) = 0$$

(l'endomorphisme nul).

Exercice 36. 1) Soit $(X_1, X_2, Y) \in \big(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors (comme la transposition est linéaire et le produit matriciel bilinéaire) :

$$\Phi_A(\lambda X_1 + X_2, Y) = {}^t(\lambda X_1 + X_2)AY = (\lambda X_1^\top + X_2^\top)AY = \lambda X_1^\top AY + X_2^\top AY = \lambda\Phi_A(X_1, Y) + \Phi_A(X_2, Y)$$

donc Φ_A est linéaire à gauche.
Soit $(X, Y_1, Y_2) \in \big(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\Phi_A(X, \lambda Y_1 + Y_2) = X^\top A(\lambda Y_1 + Y_2) = \lambda X^\top AY_1 + X^\top AY_2 = \lambda\Phi_A(X, Y_1) + \Phi_A(X, Y_2)$$

donc Φ_A est linéaire à droite. Donc Φ_A est bilinéaire.
2) • Notons $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (E_i a tous ses coefficients nuls, sauf celui sur la ligne i qui vaut 1). Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\Phi_A(E_i, E_j) = E_i^\top AE_j = a_{i,j}$$

si on note $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ (une façon de s'en convaincre sans utiliser le calcul, est de dire que AE_j est la j-ième colonne de A, et comme $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique, la i-ième coordonnée de AE_j (donc $a_{i,j}$) est $\langle E_i, AE_j\rangle = E_i^\top(AE_j)$). Donc, si Φ_A est symétrique, alors

$$a_{i,j} = \Phi_A(E_i, E_j) = \Phi_A(E_j, E_i) = a_{j,i}$$

pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, donc A est symétrique.
• Réciproquement, si A est symétrique, alors pour tout $(X,Y) \in \big(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2$: comme $\Phi_A(X,Y) \in \mathrm{M}_1(\mathbb{R})$, $\Phi_A(X,Y)$ est une matrice symétrique (elle n'a qu'un seul coefficient), donc

$$\Phi_A(X,Y) = {}^t\big(\Phi_A(X,Y)\big) = {}^t\big(X^\top AY\big) = Y^\top A^{\top t}\big(X^\top\big) = Y^\top AX = \Phi_A(Y,X)$$

(en utilisant les règles « $({}^\top PQ) = Q^\top P^\top$ » valable pour tous P et Q tel que le produit ait du sens, et « $({}^\top P^\top) = P$ » valable pour tout P). Donc Φ_A est symétrique.
3) Si A est non inversible, il existe $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $X \neq 0_{n,1}$ tel que $AX = 0_{n,1}$. Alors

$$\Phi_A(X,X) = X^\top AX = X^\top 0_{n,1} = 0,$$

contredit la propriété « défini » d'un produit scalaire.
4) Soit λ une valeur propre réelle de A, $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé (donc $X \neq 0_{n,1}$), alors

$$AX = \lambda X,$$

et donc

$$\Phi_A(X,X) = X^\top AX = \lambda X^\top X = \lambda\|X\|^2$$

(où $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Comme $\|X\| \neq 0$ (car $X \neq 0_{n,1}$), on a

$$\lambda = \frac{\Phi_A(X,X)}{\|X\|^2} > 0$$

(comme quotient de deux réels strictement positifs, car $X \neq 0_{n,1}$ donne $\Phi_A(X,X) > 0$ puisqu'un produit scalaire est « défini positif »).

Remarque. Par conséquent, si Φ_A est un produit scalaire, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

5) A est symétrique, donc Φ_A est bilinéaire symétrique.
Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\Phi_A(X,X) = 2x^2 + 2xy + 3y^2 = x^2 + (x+y)^2 + 2y^2 \geq 0,$$

donc Φ_A est positive. Et si $\Phi_A(X,X) = 0$, alors

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+y)^2 = 0 \\ 2y^2 = 0 \end{cases}$$

car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul. Cela donne $x = y = 0$, donc $X = 0_{2,1}$. Donc Φ_A est défini.
Donc Φ_A est un produit scalaire.
6) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors par définition du produit matriciel,

$$X^\top AY = X^\top(AY) = \sum_{i=1}^n x_i(AY)_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j = \boxed{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} y_j}.$$

Exercice 37. • Pour tout $(P,Q) \in E^2$,

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(a_j)Q^{(j)}(a_j) = \sum_{j=0}^{n} Q^{(j)}(a_j)P^{(j)}(a_j) = \langle Q,P\rangle,$$

donc $\langle .,.\rangle$ est symétrique.
• Pour $(P_1,P_2,Q) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle &= \sum_{j=0}^{n} (\lambda P_1 + P_2)^{(j)}(a_j)Q^{(j)}(a_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \big(\lambda P_1^{(j)}(a_j) + P_2^{(j)}(a_j)\big)Q^{(j)}(a_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \big(\lambda P_1^{(j)}(a_j)Q^{(j)}(a_j) + P_2^{(j)}(a_j)Q^{(j)}(a_j)\big) \\
&= \lambda \sum_{j=0}^{n} P_1^{(j)}(a_j)Q^{(j)}(a_j) + \sum_{j=0}^{n} P_2^{(j)}(a_j)Q^{(j)}(a_j) \\
&= \lambda\langle P_1,Q\rangle + \langle P_2,Q\rangle
\end{aligned}$$

donc $\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche.
• Comme $\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche et symétrique, $\langle .,.\rangle$ est linéaire à droite aussi, donc bilinéaire.
• Pour tout $P \in E$,

$$\langle P,P\rangle = \sum_{j=0}^{n} \big(P^{(j)}(a_j)\big)^2 \geq 0$$

(un réel au carré est positif, et une somme de réels positif est positive). D'où la positivité.
• Pour tout $P \in E$, si $\langle P,P\rangle = 0$, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P^{(k)}(a_k) = 0$$

(car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul). Si $P \neq 0$, en notant $j = \deg(P) \in [\![0,n]\!]$, on aurait

$$P^{(j)} = j! \times \text{coefficient dominant de } P,$$

donc $P^{(j)} =$ constante non nulle, ce qui contredirait

$$P^{(j)}(a_j) = 0.$$

Donc $P = 0$. Donc $\langle .,.\rangle$ est défini.
• Donc $\langle .,.\rangle$ est bien un produit scalaire.

Exercice 38. • Soit $(A,B) \in \big(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$. Alors la formule du produit matriciel donne

$$\mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^{n} \big(A^\top B\big)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (A^\top)_{i,j}B_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}b_{j,i}.$$

Donc pour $(A,B) \in \big(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$,

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}b_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{j,i}a_{j,i} = \langle B,A\rangle$$

donc $\langle .,.\rangle$ est symétrique.

Remarque. Il y a une démonstration plus théorique de ceci : une matrice et sa transposée ont même coefficients diagonaux, donc même trace. Par conséquent,

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B) = \mathrm{tr}\big((^\top A^\top B)\big) = \mathrm{tr}\big(B^\top(^\top A^\top)\big) = \mathrm{tr}(B^\top A) = \langle B, A\rangle$$

et on retrouve $\langle ., .\rangle$ symétrique.

• $\langle ., .\rangle$ est linéaire à droite car la trace est linéaire (et le produit matriciel bilinéaire) : pour tout $(A, B_1, B_2) \in \big(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\big)^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle A, \lambda B_1 + B_2\rangle = \mathrm{tr}\big(A^\top(\lambda B_1 + B_2)\big) = \mathrm{tr}\big(\lambda A^\top B_1 + A^\top B_2\big) = \lambda \mathrm{tr}\big(A^\top B_1\big) + \mathrm{tr}\big(A^\top B_2\big) = \lambda\langle A, B_1\rangle + \langle A, B_2\rangle.$$

• Linéaire à droite + symétrique donne bilinéaire.
• Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \geq 0$$

(un réel au carré est positif, et une somme de réels positif est positive). D'où $\langle ., .\rangle$ est une forme bilinéaire positive.
• Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\langle A, A\rangle = 0$, alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 = 0,$$

donc (comme une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul) pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$a_{j,i}^2 = 0, \qquad \text{soit} \qquad a_{j,i} = 0.$$

Donc $A = 0_n$. Donc $\langle ., .\rangle$ est défini.
• Conclusion : c'est bien un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. Si on identifie $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$ à travers les bases canoniques, ce n'est rien d'autre que le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

Exercice 39. 1) Les deux inégalités qui suivent sont « très utiles », et donc à connaître. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = a^2 - 2|ab| + b^2,$$

donc

$$2|ab| \leq a^2 + b^2.$$

D'où l'on déduit :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2.$$

2a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'espace vectoriel des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$).
• $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
• Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle, alors la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0$$

converge, donc la suite nulle fait bien partie de E. Donc E est non vide.
• $\rightarrow$ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq (u_n + v_n)^2 \leq 2u_n^2 + 2v_n^2,$$

(d'après la question précédente), or la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$$

converge (car $u \in E$) et la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n^2$$

converge (car $v \in E$), donc (par combinaison linéaire), la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(2u_n^2 + 2v_n^2\right)$$

converge, puis le critère de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure : la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)^2$$

converge, donc $u + v \in E$.
$\rightarrow$ Pour finir, si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la convergence de la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$$

implique celle de

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^2 u_n^2,$$

donc $\lambda u \in E$.
$\rightarrow$ Donc E est stable par combinaison linéaire.
• E est donc bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, puisque c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2b) Si la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

converge, alors

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0,$$

donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq 1.$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$, on a

$$0 \leq u_n^2 = |u_n|^2 \leq |u_n|.$$

Donc, comme la série numérique

$$\sum_{n\geq n_0} |u_n|$$

converge, le critère de comparaison des séries à termes positifs donne que la série numérique

$$\sum_{n\geq n_0} u_n^2$$

converge aussi, donc la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$$

aussi, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.
2c) Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Alors $u \in E$ car la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^2} \underset{p=n+1}{=} \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$$

converge (série de Riemann dans le cas convergeant à cause du carré : $2 > 1$), donc

$$u \in E.$$

Mais la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \underset{p=n+1}{=} \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p}$$

diverge (c'est la série harmonique).

3a) • Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Alors, d'après la question 1, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq |u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2),$$

et comme les séries numériques

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n^2$$

convergent, on en déduit par combinaison linéaire que la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$$

converge, puis par le critère de comparaison des séries à termes positifs, que la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n v_n|$$

converge.

Donc la série définissant $\Phi(u, v)$ est absolument convergente, donc convergente, ce qui assure que $\Phi(u, v)$ existe.

• Φ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

• Φ est symétrique (évident) : pour tout $(u, v) \in E^2$,

$$\Phi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n u_n = \Phi(v, u)$$

• Φ est linéaire à gauche : pour tout $(u, u', v) \in E^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(\lambda u + u', v) \quad = \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + u'_n) v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n + \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n v_n = \lambda\Phi(u, v) + \Phi(u', v)$$

(on utilise la linéarité de la somme de séries convergentes, puisque toutes les séries apparaissant ici sont bien convergentes).

• Φ étant symétrique et linéaire à gauche, Φ est bilinéaire symétrique.

• Pour tout $u \in E$,

$$\Phi(u, u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geq 0$$

car un réel au carré est positif, une somme de réels positifs est positive, et une limite de réels positifs est positive.

• Pour tout $u \in E$, si $\Phi(u, u) = 0$, alors $u_n^2 = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. En effet, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_i^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = \Phi(u, u) = 0.$$

Et donc $u = 0$. Donc Φ est définie.

• Donc Φ est bien un produit scalaire sur E.

3b) Soit $i \in \mathbb{N}$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ avec le 1 à la $i^{\text{ième}}$ position. Donc pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$e_i \in E$$

(si on note $e_i = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_n = 0$ si $n \neq i$ et $u_i = 1$, donc la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$$

converge et vaut 1), et pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, si $i \neq j$, on a (en notant $e_j = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) :

$$\Phi(e_i, e_j) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = u_i v_i + u_j v_j + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\notin\{i,j\}}} u_n v_n = 1\times 0 + 0\times 1 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\notin\{i,j\}}} 0\times 0 = 0$$

Donc, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, si $i \neq j$, alors

$$e_i \perp e_j.$$

Enfin, pour $i \in \mathbb{N}$,

$$\Phi(e_i, e_i) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_i^2 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq i}} u_n^2 = 1^2 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\neq i}} 0^2 = 1$$

donc

$$\|e_i\| = \sqrt{\Phi(e_i, e_i)} = 1.$$

Donc la famille $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bien une famille orthonormée.

Exercice 40. L'application

$$(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour f et Id donne alors

$$\left(\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b t^2\mathrm{d}t \int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t = \frac{b^3-a^3}{3}\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t.$$

Il y a égalité si et seulement si f et Id sont proportionnelles, donc si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in [a,b]$.

Exercice 41. 1. L'application

$$(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On écrit, pour $t \in [0,1]$,

$$f(t)g(t)\omega(t) = \big(f(t)\sqrt{\omega(t)}\big)\big(g(t)\sqrt{\omega(t)}\big).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions

$$t \mapsto f(t)\sqrt{\omega(t)} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto g(t)\sqrt{\omega(t)}$$

(qui sont continues sur $[0,1]$), on a :

$$\left(\int_0^1 f(t)\sqrt{\omega(t)}g(t)\sqrt{\omega(t)}\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^1 \left(f(t)\sqrt{\omega(t)}\right)^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 \left(g(t)\sqrt{\omega(t)}\right)^2\mathrm{d}t\right)$$

soit, après simplification,

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g^2(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right)$$

2. Soit $x \in]0,1]$. L'application

$$(f,g) \mapsto \int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}\big([0,x],\mathbb{R}\big)$.
L'inégalité de Cauchy Schwarz, appliqué aux fonctions f' et $t \mapsto 1$, donne alors :

$$\left(\int_0^x 1.f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^x 1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x f'(t)^2\mathrm{d}t\right)$$

or (puisque la fonction f' est continue et que $f(0)=0$) :

$$f^2(x) = \big(f(x)-f(0)\big)^2 = \left(\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq x\left(\int_0^x f'(t)^2\mathrm{d}t\right).$$

Remarquons que cela reste vrai pour $x=0$, puisque $f(0)=0$.
Puis, pour tout $x\in[0,1]$, on a $x\leq 1$ (donc « les bornes sont dans le bon sens »), et $f'^2\geq 0$ sur $[x,1]$, donc

$$\int_x^1 f'(t)^2\mathrm{d}t \geq 0.$$

Enfin, la relation de Chasles donne alors, pour tout $x\in[0,1]$,

$$\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t = \int_0^x f'(t)^2\mathrm{d}t + \int_x^1 f'(t)^2\mathrm{d}t \geq \int_0^x f'(t)^2\mathrm{d}t.$$

Donc, pour $x\in[0,1]$ (donc positif),

$$f^2(x) \leq x\left(\int_0^x f'(t)^2\mathrm{d}t\right) \leq x\left(\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t\right).$$

3. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz (pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$), appliqué aux vecteurs

$$\big(\sqrt{x_1},\dots,\sqrt{x_n}\big) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right),$$

on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n 1\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}_{=1}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) \qquad \text{car} \qquad 1=\sqrt{x_i}\frac{1}{\sqrt{x_i}}$$

D'où

$$n^2 \leq 1\times\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

Il y a égalité si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ avec

$$\big(\sqrt{x_1},\dots,\sqrt{x_n}\big) = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right),$$

soit pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

$$x_i=\lambda,$$

donc

$$\boxed{x_1=\dots=x_n=\frac{1}{n}}$$

(pour que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 1$).

Exercice 42. L'application

$$(f,g)\mapsto \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Pour $f\in E$, on a

$$\sqrt{f}\in\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{f}}\in\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big),$$

donc d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) \geq \left(\int_a^b \sqrt{f}\times\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2 = \left(\int_a^b 1\right)^2 = (b-a)^2$$

Ainsi on a pour tout $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}_+^*\big)$:
$$\phi(f) \geq (b-a)^2.$$
Donc $\inf\limits_{f\in E} \phi(f) \geq (b-a)^2$.
Puis, la fonction
$$f : x \in [a,b] \mapsto 1$$
est dans E, et
$$\phi(f) = \left(\int_a^b 1\right)\left(\int_a^b \frac{1}{1}\right) = (b-a)^2.$$
Donc
$$\inf_{f\in E} \phi(f) \leq (b-a)^2.$$
Par double inégalité, on a alors
$$\inf_{f\in E} \phi(f) = (b-a)^2,$$
et comme la valeur est atteinte (en la fonction constante égale à 1), on en déduit que c'est un minimum :
$$\min_{f\in E} \phi(f) = (b-a)^2.$$
On a égalité si et seulement s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\sqrt{f} = \lambda \frac{1}{\sqrt{f}}, \qquad \text{soit} \qquad f = \lambda,$$
avec donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Comme une telle fonction est bien dans E et réalise l'égalité, on retrouve
$$\min_{f\in E} \phi(g) = (b-a)^2,$$
et ce minimum est atteint sur (et uniquement sur) les fonctions constantes (strictement positives).

Exercice 43. 1)
$$F = \big\{(x, 2x+2z, z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\big\} = \big\{x(1,2,0) + z(0,2,1),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\big\} = \mathrm{Vect}\big((1,2,0),(0,2,1)\big),$$
donc $\big(\underbrace{(1,2,0)}_{=u}, \underbrace{(0,2,1)}_{=v}\big)$ est une base de F (famille génératrice d'après ce qui précède, et libre car, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $au + bv = \vec{0}$, alors $\begin{cases} a = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ b = 0 \end{cases}$, donc $a = b = 0$).
On applique le procédé de Gram-Schmidt à la famille (u,v) : $\|u\| = \sqrt{5}$, donc on pose
$$\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)}.$$
Puis,
$$\langle v, e_1\rangle = \frac{4}{\sqrt{5}}, \qquad v - \langle v, e_1\rangle e_1 = (0,2,1) - \frac{4}{5}(1,2,0) = \frac{1}{5}(-4,2,5), \qquad \text{puis} \qquad \left\|\frac{1}{5}(-4,2,5)\right\| = \frac{1}{5}\sqrt{45} = \frac{3}{5}\sqrt{5},$$
donc on pose
$$e_2 = \frac{1}{\frac{3}{5}\sqrt{5}}\frac{1}{5}(-4,2,5), \qquad \text{soit} \qquad \boxed{e_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,2,5)}.$$

Donc (e_1, e_2) est une base orthonormée de F. Donc, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque,

$$\begin{aligned} p_F(x,y,z) &= \langle (x,y,z), e_1\rangle e_1 + \langle (x,y,z), e_2\rangle e_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) + \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4x+2y+5z)\frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,2,5) \\ &= \frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y, 0) + \frac{1}{45}(16x-8y-20z, -8x+4y+10z, -20x+10y+25z) \\ &= \frac{1}{45}(25x+10y-20z, 10x+40y+10z, -20x+10y+25z) \end{aligned}$$

Donc la matrice de p_F dans la base canonique B de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathrm{Mat}_B(p_F) = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 25 & 10 & -20 \\ 10 & 40 & 10 \\ -20 & 10 & 25 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$$

(car, si A est cette matrice, alors $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ doit être la matrice-colonne des coordonnées de $p_F(x,y,z)$ dans la base B).

Remarque. Pour trouver la matrice de p_F dans la base canonique B de $\mathbb{R}^2$, on peut aussi calculer

$$p_F(1,0,0), \qquad p_F(0,1,0), \qquad p_F(0,0,1)$$

et trouver les coordonnées de ces vecteurs dans la base B, ce qui donne les colonnes de $\mathrm{Mat}_B(p_F)$...

2) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) = p_F(a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) \in F \\ (x,y,z) - (a,b,c) \perp F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ \langle (x,y,z) - (a,b,c), (1,2,0)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z) - (a,b,c), (0,2,1)\rangle = 0 \end{cases}$$

car $\big((1,2,0),(0,2,1)\big)$ est une base de F (déjà vu à la question 1), donc être orthogonal à F revient à être orthogonal à $(1,2,0)$ et $(0,2,1)$. Donc

$$(x,y,z) = p_F(a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x - a + 2(y-b) = 0 \\ 2(y-b) + (z-c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y = 2a + 8b + 2c \\ 9x = 5a + 2b - 4c \\ 9z = -4a + 2b + 5c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

et on retrouve bien la bonne matrice.

3) On écrit

$$F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle w, (x,y,z)\rangle = 0\big\}$$

avec $w = (2,-1,2)$, donc

$$F = \mathrm{Vect}(w)^\perp, \qquad \text{et donc} \qquad F^\perp = \mathrm{Vect}(w).$$

Puis, $\|w\| = 3$, donc la famille formée d'un seul vecteur

$$\left(\frac{1}{3}w\right)$$

est une base orthonormée de $F^\perp$, et donc

$$p_{F^\perp}(x,y,z) = \langle (x,y,z), \frac{1}{3}w\rangle \frac{1}{3}w = \frac{1}{9}(2x-y+2z)(2,-1,2) = \frac{1}{9}(4x-2y+4z, -2x+y-2z, 4x-2y+4z).$$

Donc
$$\mathrm{Mat}_B(p_{F^\perp}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Or,
$$\mathrm{Mat}_B(p_F) = I_3 - \mathrm{Mat}_B(p_{F^\perp}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
car $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ (de manière générale, si $E = F \oplus G$, p est le projecteur sur F parallèlement à G et q celui sur G parallèlement à F, alors $p + q = \mathrm{Id}_E$), et on retrouve bien la bonne matrice.

Exercice 44. On pose $E = \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, on munit E du produit scalaire suivant :
$$(f,g) \in E^2 \mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$
On pose
$$h : t \in [0,1] \mapsto \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \in \mathbb{R}.$$
La fonction h est continue sur $]0,1]$ par opérations usuelles, et
$$\lim_{t\to 0} h(t) = 0 = h(0)$$
par croissance comparée, donc la fonction h est continue en 0.
Donc $h \in E$, et on cherche $d(h,F)^2$ où
$$F = \mathrm{Vect}(1,t)$$
(en notant 1 et t au lieu de $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t$). En effet,
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I_{a,b} = \inf_{f\in F}\int_0^1 \big(h(t) - f(t)\big)^2\mathrm{d}t = \inf_{f\in F}\|h-f\|^2 = d(h,F)^2 = \|h - p_F(h)\|^2$$
où $p_F(h)$ est le projeté orthogonal de h sur F.
Il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ avec
$$p_F(h) : t \in [0,1] \mapsto \alpha t + \beta.$$
Déterminons α et β : par définition du projeté orthogonal,
$$h - p_F(h) \perp F, \qquad \text{donc} \qquad \Big(h - p_F(h) \perp 1 \qquad \text{et} \qquad h - p_F(h) \perp t\Big),$$
soit
$$\begin{cases} \langle h - p_F(h), 1\rangle = 0 \\ \langle h - p_F(h), t\rangle = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \int_0^1 \big(t\ln(t) - \alpha t - \beta\big)\mathrm{d}t = 0 \\ \int_0^1 \big(t^2\ln(t) - \alpha t^2 - \beta t\big)\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(t\ln(t) - \alpha t - \beta\big)t\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$
Calculons, pour $k \in \{1,2\}$, l'intégrale
$$\int_0^1 t^k\ln(t)\mathrm{d}t$$
par intégration par parties. Soit $0 < \mathrm{e} < 1$, les fonctions
$$u : t \mapsto \ln(t) \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \frac{t^{k+1}}{k+1}$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\mathrm{e},1]$, de dérivée
$$u' : t \mapsto \frac{1}{t} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto t^k.$$

Donc le théorème d'intégration par parties (celui de PCSI) donne :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{e}}^1 t^k \ln(t)\mathrm{d}t &= \left[\tfrac{t^{k+1}\ln(t)}{k+1}\right]_{\mathrm{e}}^1 - \int_{\mathrm{e}}^1 \tfrac{t^k}{k+1}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{k+1}\ln(\mathrm{e})}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{\mathrm{e}^{k+1}}{(k+1)^2} \\ &\xrightarrow[\mathrm{e}\to 0]{} -\frac{1}{(k+1)^2}\end{aligned}$$

(par croissance comparée). Donc l'intégrale

$$\int_0^1 t^k \ln(t)\mathrm{d}t$$

converge, et vaut

$$\int_0^1 t^k \ln(t)\mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{e}\to 0}\int_{\mathrm{e}}^1 t^k \ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

En particulier,

$$\int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 t^2\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{9}.$$

On obtient donc le système suivant (par linéarité de l'intégrale, et en reportant les calculs précédents) :

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2} - \beta = 0 \\ -\frac{1}{9} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{6} \\ \beta = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

soit

$$p_F(h) : t \in [0,1] \mapsto \frac{1}{6}t - \frac{1}{3}.$$

Ensuite,

$$d(h,F)^2 = \|h\|^2 - \|p_F(h)\|^2 = \int_0^1 t^2\ln^2(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \left(\frac{1}{6}t - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Soit $0 < \mathrm{e} \leq 1$, les fonctions

$$u : t \mapsto \ln^2(t) \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \frac{t^3}{3}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\mathrm{e}, 1]$, de dérivée

$$u' : t \mapsto \frac{2\ln(t)}{t} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto t^2.$$

Donc le théorème d'intégration par parties (celui de PCSI) donne :

$$\int_{\mathrm{e}}^1 t^2\ln^2(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3\ln^2(t)}{3}\right]_{\mathrm{e}}^1 - \frac{2}{3}\int_{\mathrm{e}}^1 t^2\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^3\ln^2(\mathrm{e})}{3} - \frac{2}{3}\int_{\mathrm{e}}^1 t^2\ln(t)\mathrm{d}t$$

D'où, par croissance comparée,

$$\int_0^1 t^2\ln^2(t)\mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{e}\to 0}\int_{\mathrm{e}}^1 t^2\ln^2(t)\mathrm{d}t = 0 - \frac{2}{3}\int_0^1 t^2\ln(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{27}$$

(en réutilisant la valeur déjà calculé de $\int_0^1 t^2\ln(t)\mathrm{d}t$). Puis

$$\|p_F(h)\|^2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{6}t - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{36}\int_0^1 (t^2 - 4t + 4)\mathrm{d}t = \frac{1}{36}\left[\frac{1}{3} - 2 + 4\right] = \frac{7}{3\times 36}.$$

Ainsi on a :

$$d(h,F)^2 = \frac{2}{27} - \frac{7}{108} = \frac{1}{108},$$

et donc le minimum cherché vaut

$$\boxed{\frac{1}{108}}.$$

Exercice 45.
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $x \in E$ et p un projecteur de E tel que $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$. Donc x peut s'écrire $x = y + z$ où $y \in \mathrm{Im}(p)$ et $z \in \mathrm{Ker}(p)$. Donc le théorème de Pythagore donne (puisque $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$, ce qui donne $y \perp z$) :

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

Or $p(x) = y$, on a donc :

$$\big\|p(x)\big\|^2 = \|y\|^2.$$

Comme $\|z\|^2 \geq 0$, alors

$$\big\|p(x)\big\|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{soit} \qquad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, raisonnons par l'absurde. Supposons donc qu'il existe $z \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$ tels que $\langle z, y\rangle \neq 0$. Posons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$x = \lambda y + z,$$

alors $p(x) = \lambda y$, donc

$$\big\|p(x)\big\|^2 = \lambda^2\|y\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle y, z\rangle + \|z\|^2.$$

Puis, par hypothèse,

$$2\lambda\langle y, z\rangle + \|z\|^2 = \|x\|^2 - \big\|p(x)\big\|^2 \geq 0$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ ce qui est absurde (une droite non horizontale ne peut pas rester au dessus de l'axe des abscisses sur $\mathbb{R}$ tout entier !).

Exercice 46. 1) • Soit $Y \in \mathrm{Im}(A)^\perp$, alors pour tout $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, comme $AX \in \mathrm{Im}(A)$, on a $Y \perp AX$, et comme le produit scalaire est celui usuel de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a alors

$$Y^\top(AX) = 0.$$

Cela étant vrai pour tout $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on en déduit

$$Y^\top A = 0_{\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{R})}.$$

En effet, si, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $X = E_i$ (i-ième vecteur de la base canonique de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$), si on note $Y^\top A = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_p\end{pmatrix}$, alors $(Y^\top A)E_i = \alpha_i$. Et si $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a bien

$$Y^\top A = 0_{\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{R})}.$$

En transposant, on a alors

$${}^t\big(Y^\top A\big) = 0^\top_{\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{R})} = 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}.$$

Or, pour toutes matrices P et Q telles que PQ existe, on a la relation $({}^\top PQ) = Q^\top P^\top$, et $({}^\top P^\top) = P$. Donc

$${}^t\big(Y^\top A\big) = A^\top({}^\top Y^\top) = A^\top Y.$$

Donc

$$A^\top Y = 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}, \qquad \text{soit} \qquad Y \in \mathrm{Ker}(A^\top).$$

On a donc bien l'inclusion

$$\mathrm{Im}(A)^\perp \subset \mathrm{Ker}(A^\top).$$

• Puis, pour tout sous-espace F d'un espace euclidien E, on a

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F).$$

Donc (comme $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) :

$$\dim\big(\mathrm{Im}(A)^\perp\big) = \dim\big(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(A)\big) = n - \mathrm{rg}(A).$$

Puis, le théorème du rang donne

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A^\top)\big) = n - \dim\big(\mathrm{Im}(A^\top)\big) = n - \mathrm{rg}(A^\top),$$

car $A^\top$ a n colonnes.
Le fait que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$ (cours de PCSI) donne alors

$$\dim\big(\mathrm{Im}(A)^\perp\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(A^\top)\big).$$

• On a une inclusion et l'égalité des dimensions. On peut donc bien conclure à l'égalité :

$$\mathrm{Ker}(A^\top) = \mathrm{Im}(A)^\perp.$$

2) • Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$, alors $AX = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, et donc $A^\top AX = 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$, donc $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$. D'où l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^\top A).$$

• Soit $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$, alors $A^\top AX = 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$. En multipliant à gauche par $X^\top$, on a alors

$$X^\top A^\top AX = 0_{\mathrm{M}_{1,1}(\mathbb{R})} = 0, \qquad \text{soit} \qquad {}^t\big(AX\big)AX = 0$$

(en utilisant que pour toutes matrices P et Q telles que PQ existe, $({}^\top PQ) = Q^\top P^\top$). Or, $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel, donc

$${}^t\big(AX\big)AX = \|AX\|^2$$

(norme de ce produit scalaire). Donc

$$\|AX\|^2 = 0, \qquad \text{et donc} \qquad AX = 0_{n,1},$$

soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$. D'où l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(A^\top A) \subset \mathrm{Ker}(A).$$

Par double inclusion, on a bien l'égalité

$$\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A).$$

• Puis, $A^\top A$ étant une matrice carrée,

$$\begin{aligned} A^\top A \text{ est inversible} \quad &\Leftrightarrow \quad \dim\big(\mathrm{Ker}(A^\top A)\big) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = p - 0 = p \text{ (par le théorème du rang, car } A \text{ a } p \text{ colonnes)} \end{aligned}$$

3) Soit $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} Y \text{ est le projeté orthogonal de } B \text{ sur } \mathrm{Im}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad Y \in \mathrm{Im}(A) \text{ et } Y - B \in \mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^\top) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } Y = AX \text{ et } AX - B \in \mathrm{Ker}(A^\top) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } Y = AX \text{ et } A^\top(AX - B) = 0_{\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } Y = AX \text{ et } A^\top AX = A^\top B. \end{aligned}$$

Comme $A^\top A$ est inversible,

$$A^\top AX = A^\top B \qquad \Leftrightarrow \qquad X = (A^\top A)^{-1}A^\top B,$$

et donc

$$\begin{aligned} Y \text{ est le projeté orthogonal de } B \text{ sur } \mathrm{Im}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } Y = AX \text{ et } X = (A^\top A)^{-1}A^\top B \\ &\Leftrightarrow \quad Y = A(A^\top A)^{-1}A^\top B. \end{aligned}$$

Donc le projeté orthogonal de B sur $\mathrm{Im}(A)$ est

$$A(A^\top A)^{-1}A^\top B.$$

On en déduit bien que

$$K = A(A^\top A)^{-1}A^\top.$$

4) K est la matrice d'un projecteur, donc

$$K^2 = K,$$

et aussi

$$(I_n - K)^2 = I_n^2 - 2K + K^2 = I_n - K.$$

Remarque. Ce n'est pas surprenant : si K est la matrice du projecteur sur E parallèlement à F dans une base B, $I_n - K$ est la matrice du projecteur sur F parallèlement à E dans la même base B, donc ici $I_n - K$ est la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(A)^\perp$.

Puis, K est la matrice dans la base canonique (donc base orthonormée pour le produit scalaire usuel) d'un projecteur orthogonal (qui est un endomorphisme autoadjoint pour le produit scalaire en question), donc est symétrique :

$$K^\top = K.$$

Remarque. Cela se voit aussi directement :

$$K^\top = {}^t\big(A(A^\top A)^{-1}A^\top\big) = ({}^\top A^\top){}^t\big((A^\top A)^{-1}\big)A^\top = A\big(({}^\top A^\top A)\big)^{-1}A^\top = A\big({}^tA({}^\top A^\top)\big)^{-1}A^\top = A\big({}^tAA)\big)^{-1}A^\top = K,$$

en utilisant que $({}^\top PQ) = Q^\top P^\top$ dès que PQ a du sens, que $({}^\top P^{-1}) = (P^\top)^{-1}$ si P est inversible, et $({}^\top P^\top) = P$.

Puis, si X est tel que AX est le projeté orthogonal de B sur $\mathrm{Im}(A)$, alors

$$AX = KB, \qquad \text{et donc} \qquad B - AX = (I_n - K)B,$$

puis

$$\|B - AX\|^2 = \big\|(I_n - K)B\big\|^2 = {}^t\big((I_n - K)B\big)\big((I_n - K)B\big) = B^\top({}^\top I_n - K)(I_n - K)B = B^\top(I_n - K)B,$$

car

$$({}^\top I_n - K) = I_n^\top - K^\top = I_n - K$$

puisque la transposition est linéaire et que K et I_n sont symétriques, et car $(I_n - K)^2 = I_n - K$, comme vu précédemment.

Exercice 47. Premier produit scalaire :

1. $E = \mathbb{R}_2[X]$, et pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i).$$

★ $\langle .,. \rangle$ symétrique : pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i) = \sum_{i=0}^{4} Q(i)P(i) = \langle Q, P\rangle.$$

★ $\langle .,. \rangle$ linéaire à droite : pour tout $(P,Q,R) \in E^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle P, \lambda Q + R \rangle &= \sum_{i=0}^{4} P(i)(\lambda Q + R)(i) \\
&= \sum_{i=0}^{4} P(i)\big(\lambda Q(i) + R(i)\big) \\
&= \sum_{i=0}^{4} \big(\lambda P(i)Q(i) + P(i)R(i)\big) \\
&= \lambda \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i) + \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i) \\
&= \lambda \langle P, Q \rangle + \langle P, R \rangle
\end{aligned}$$

★ $\langle .,. \rangle$ est linéaire à droite et symétrique, donc bilinéaire.
★ $\langle .,. \rangle$ est positive : pour tout $P \in E$,

$$\langle P, P \rangle = \sum_{i=0}^{4} P(i)^2 \geq 0$$

car un réel au carré est positif, et car une somme de réels positifs est positif.
★ $\langle .,. \rangle$ est définie : Soit $P \in E$ tel que $\langle P \rangle P = 0$ alors $P(i) = 0$ pour tout $i \in [\![0,4]\!]$, car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul. Donc P a cinq racines (les entiers 0 à 4) et est de degré au plus deux, donc P est nul (car il a plus de racines que son degré).
★ Ainsi $\langle . \rangle$. est bien un produit scalaire.

2. Effectuons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur la base canonique $(1, X, X^2)$.
• On a

$$e_0 = \frac{1}{\|1\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

car $\|1\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{4} P(i)^2}$ avec $P = 1$, donc $\|1\| = \sqrt{1+1+1+1+1} = \sqrt{5}$.
• On a $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ avec

$$u_1 = X - \langle e_0, X \rangle e_0,$$

où

$$\langle e_0 \rangle X = \frac{1}{\sqrt{5}}(0+1+2+3+4) = \frac{10}{\sqrt{5}}.$$

On a donc $u_1 = X - 2$, ainsi on a :

$$\|u_1\|^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10.$$

Donc

$$\boxed{e_1 = \frac{X-2}{\sqrt{10}}}.$$

• On a $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$ avec

$$u_2 = X^2 - \langle e_1, X^2 \rangle e_1 - \langle e_0, X^2 \rangle e_0,$$

où

$$\langle e_0, X^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(0+1+4+9+16) = \frac{30}{\sqrt{5}} \qquad \text{et} \qquad \langle e_1, X^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(0-1+0+9+32) = \frac{40}{\sqrt{10}}.$$

On a donc $u_2 = X^2 - 4(X-2) - 6 = X^2 - 4X + 2$. Puis,

$$\|u_2\|^2 = 4 + 1 + 4 + 1 + 4 = 14.$$

Donc

$$\boxed{e_2 = \frac{X^2 - 4X + 2}{\sqrt{14}}}.$$

• Donc (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E.

Deuxième produit scalaire :

1. $E = \mathbb{R}_2[X]$, et pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P \rangle Q = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

★ Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle$ existe car P et Q sont des polynômes, donc continus sur le segment $[0, 1]$.
★ $\langle ., . \rangle$ symétrique : pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)P(t)\mathrm{d}t = \langle Q, P \rangle.$$

★ $\langle ., . \rangle$ linéaire à droite (provient de la linéarité de l'intégrale) : pour tout $(P, Q, R) \in E^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle P, \lambda Q + R \rangle &= \textstyle\int_0^1 P(t)(\lambda Q + R)(t)\mathrm{d}t \\
&= \textstyle\int_0^1 P(t)\big(\lambda Q(t) + R(t)\big)\mathrm{d}t \\
&= \textstyle\int_0^1 \big(\lambda P(t)Q(t) + P(t)R(t)\big)\mathrm{d}t \\
&= \lambda \textstyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 P(t)R(t)\mathrm{d}t \\
&= \lambda\langle P, Q \rangle + \langle P, R \rangle
\end{aligned}$$

★ $\langle ., . \rangle$ est linéaire à droite et symétrique, donc bilinéaire.
★ $\langle ., . \rangle$ est positive (par positivité de l'intégrale) : pour tout $P \in E$,

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 P(t)^2\mathrm{d}t \geq 0$$

car la fonction

$$t \mapsto P(t)^2$$

est continue positive sur $[0, 1]$ avec $0 < 1$.
★ $\langle ., . \rangle$ est définie : Soit P tel que $\langle P \rangle P = 0$ alors la fonction

$$t \mapsto P(t)^2$$

est continue positive d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc par stricte positivité de l'intégrale,

$$P^2(t) = 0$$

pour tout $t \in [0, 1]$, donc P a une infinité de racines (tout élément de $[0, 1]$), donc

$$P = 0.$$

★ Ainsi $\langle . \rangle$. est bien un produit scalaire.

2. Effectuons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur la base canonique $(1, X, X^2)$.
   • On a
$$e_0 = \frac{1}{\|1\|} = \boxed{1}$$
   car $\|1\| = \sqrt{\int_0^1 1^2 \mathrm{d}t} = 1$.
   • On a $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ avec
$$u_1 = X - \langle e_1, X\rangle e_1,$$
   où
$$\langle e_1\rangle X = \int_0^1 1 \times t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
   On a donc $u_1 = X - \dfrac{1}{2}$, puis
$$\|u_1\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{12}.$$
   Donc
$$\boxed{e_1 = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right)}.$$
   • On a $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$ avec
$$u_2 = X^2 - \langle e_1, X^2\rangle e_1 - \langle e_0, X^2\rangle e_0,$$
   où
$$\langle e_0, X^2\rangle = \int_0^1 1.t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \langle e_1, X^2\rangle = \sqrt{12}\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$
   On a donc
$$u_2 = X^2 - \left(X - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} = X^2 - X + \frac{1}{6}.$$
   Puis, $\|u_2\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \dfrac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}t = \dfrac{1}{180}$.
   Donc
$$\boxed{e_2 = \sqrt{180}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)}.$$
   • Donc (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E.

Exercice 48. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a en testant en $x = e_j$:
$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, e_i\rangle^2 = \underbrace{\|e_j\|^4}_{=1} + \sum_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ i\neq j}} \langle e_j, e_i\rangle^2.$$
Donc
$$\sum_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ i\neq j}} \underbrace{\langle e_j, e_i\rangle^2}_{\geq 0} = 0,$$
et comme une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul, on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$,
$$\langle e_i, e_j\rangle^2 = 0, \qquad \text{et donc} \qquad \langle e_i, e_j\rangle = 0.$$
Donc la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée (donc libre).
Il reste à montrer que c'est une famille génératrice de E. Posons $F = \mathrm{Vect}\big((e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\big)$. Comme E est un espace euclidien, on a
$$E = F \oplus F^{\perp}$$

(en fait F de dimension finie suffit).
Soit $x \in F^\perp$, comme $e_i \in F$ (pour $i \in [\![1,n]\!]$), on a alors $\langle x, e_i\rangle = 0$, et donc d'après l'hypothèse :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0.$$

Donc x est le vecteur nul et on a :

$$F^\perp \subset \{\vec{0}\}, \qquad \text{puis} \qquad F^\perp = \{\vec{0}\}.$$

Ainsi

$$F = (F^\perp)^\perp = \{\vec{0}\}^\perp = E$$

(la première égalité provenant de ce que E est euclidien), donc la famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de E.
C'est donc bien une base orthonormée de E.

Exercice 49.

1. Soit $n \in [\![1,p]\!]$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \vec{0}.$$

On a, par bilinéarité du produit scalaire, :

$$0 = \langle \vec{0}, \vec{0}\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} \lambda_i\lambda_j \langle e_i, e_j\rangle.$$

D'autre part, on a :

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| e_k\right\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i, \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} |\lambda_i|\,|\lambda_j| \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{<0} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i\neq j}} \lambda_i\lambda_j \langle e_i, e_j\rangle$$

(car, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a $\lambda_i\lambda_j \leq |\lambda_i||\lambda_j|$ et $\langle e_i, e_j\rangle < 0$). Comme une norme est positive, on a alors

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| e_k\right\|^2 = 0, \qquad \text{soit} \qquad \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| e_k = \vec{0}$$

(par l'axiome de séparation des normes).

2. Quitte à renuméroter, on peut supposer que l'on considère les $p-1$ premiers vecteurs de $\mathcal{F}$: $(e_1, \dots, e_{p-1})$. Soit alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i e_i = \vec{0}.$$

D'après la question précédente (*c'est pour cela qu'on a rédigé la question suivante en prenant un n, et pas directement avec $n = p$*), on a donc

$$\sum_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| e_i = \vec{0}.$$

En faisant le produit scalaire par e_p, on a donc par bilinéarité du produit scalaire,

$$0 = \langle \vec{0}, e_p\rangle = \langle \sum_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| e_i\rangle e_p = \sum_{i=1}^{p-1} \underbrace{|\lambda_i|}_{\geq 0} \underbrace{\langle e_i, e_p\rangle}_{<0}.$$

Donc, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, on a
$$\lambda_i \langle e_i, e_p \rangle = 0$$
(car une somme de réels négatifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul), puis
$$\lambda_i = 0$$
(car $\langle e_i, e_p \rangle < 0$). Ainsi la famille est libre.

Exercice 50.
1) Si ϕ est nulle,
$$a = \vec{0}$$
donne bien, pour tout $x \in E$,
$$\langle a, x \rangle = 0 = \phi(x).$$
De plus, si $b \in E$ vérifie : pour tout $x \in E$, $\langle b, x \rangle = 0$, alors en particulier pour $x = b$, on doit avoir
$$\|b\|^2 = \langle b, b \rangle = 0, \qquad \text{donc} \qquad b = \vec{0}.$$
Donc il y a bien existence et unicité du a dans ce cas précis.
2) Comme ϕ est non nul,
$$\mathrm{Im}(\phi) \neq \{0\}, \qquad \text{donc} \qquad \dim\big(\mathrm{Im}(\phi)\big) \geq 1.$$
Or, $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}$, donc
$$\dim\big(\mathrm{Im}(\phi)\big) \leq 1,$$
et donc
$$\dim\big(\mathrm{Im}(\phi)\big) = 1.$$
Le théorème du rang donne alors que
$$\dim(H) \quad = \quad \dim\big(\mathrm{Ker}(\phi)\big) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Im}(\phi)\big) = \dim(E) - 1$$
et comme E est euclidien,
$$\dim\left(H^\perp\right) \quad = \quad \dim\big(\mathrm{Ker}(\phi)^\perp\big) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Ker}(\phi)\big) = 1$$
Donc il existe b' non nul dans $H^\perp$, donc
$$b = \frac{1}{\|b'\|} b'$$
est encore un vecteur non nul de $H^\perp$, avec
$$\|b\| = \frac{\|b'\|}{\|b'\|} = 1,$$
et comme $\dim\left(H^\perp\right) = 1$, on en déduit bien que
$$H^\perp = \mathrm{Vect}(b),$$
ce b convient.
3) • Montrons l'existence.
Analyse : supposons que a existe avec $a \in H^\perp$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $a = \lambda b$, et on a
$$\phi(b) = \langle a, b \rangle = \lambda \langle b, b \rangle = \lambda$$
puisque b est de norme 1.
Synthèse : notons $\lambda = \phi(b)$, et prenons alors
$$a = \lambda b.$$
Si $x \in H^\perp$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha b$, et donc par linéarité de ϕ et bilinéarité du produit scalaire,
$$\phi(x) = \phi(\alpha b) = \alpha \phi(b) = \alpha \lambda = \alpha \lambda \underbrace{\langle b, b \rangle}_{=1} = \langle \lambda b, \alpha b \rangle = \langle a, x \rangle$$

car b est de norme 1 (donc $\langle b, b\rangle = \|b\|^2 = 1$).
Soit ensuite $x \in H$, alors comme $H = \mathrm{Ker}(\phi)$,

$$\phi(x) = 0,$$

et comme $a \in H^\perp$,

$$\langle a, x\rangle = 0.$$

On a donc bien

$$\langle a, x\rangle = \phi(x).$$

Soit enfin $x \in E$ quelconque. Comme

$$E = H \oplus H^\perp,$$

il existe $x' \in H$ et $x'' \in H^\perp$ tel que

$$x = x' + x''.$$

Alors, par linéarité de ϕ et bilinéarité du produit scalaire,

$$\phi(x) = \phi(x' + x'') = \phi(x') + \phi(x'') = \langle a, x'\rangle + \langle a, x''\rangle = \langle a, x' + x''\rangle = \langle a, x\rangle$$

On a donc bien montré que pour tout $x \in E$,

$$\phi(x) = \langle a, x\rangle.$$

Donc a convient, d'où l'existence.

Remarque. La partie analyse a montré l'unicité d'un tel a dans $H^\perp$, mais on veut l'unicité pour $a \in E$. Donc il reste la partie unicité à faire.

• Montrons l'unicité. Supposons qu'il existe a et b dans E tels que pour tout $x \in E$, on ait

$$\langle a, x\rangle = \phi(x) = \langle b, x\rangle$$

Alors, en soustrayant, et par bilinéarité du produit scalaire, pour tout $x \in E$,

$$\langle a - b, x\rangle = 0$$

En particulier, si $x = a - b$, on en déduit que

$$\|a - b\|^2 = \langle a - b, a - b\rangle = 0,$$

donc

$$a - b = \vec{0}, \qquad \text{puis} \qquad a = b.$$

D'où l'unicité.

Exercice 51. • Soit $x \in G^\perp$ et $y \in F$, alors comme $F \subset G$, $y \in G$, et donc

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

C'est vrai pour tout $y \in F$, donc

$$x \in F^\perp.$$

C'est vrai pour tout $x \in G^\perp$, donc

$$G^\perp \subset F^\perp.$$

• ⋄ Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$, soit $t \in F + G$, alors il existe $y \in F$ et $z \in G$ avec

$$t = y + z,$$

et donc par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle x, t\rangle = \langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle = 0 + 0 = 0.$$

Cela étant vrai pour tout $t \in F + G$, on a

$$x \in (F + G)^\perp.$$

Cela étant vrai pour tout $x \in F^\perp \cap G^\perp$, on a

$$F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp.$$

$\diamond$ Réciproquement, soit $x \in (F+G)^\perp$ et soit $y \in F$ et $z \in G$. Alors $y \in F+G$ et $z \in F+G$, donc

$$\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle = 0.$$

Cela étant vrai pour tout $y \in F$, on a

$$x \in F^\perp,$$

et cela étant vrai pour tout $z \in G$, on a

$$x \in G^\perp.$$

Donc

$$x \in F^\perp \cap G^\perp.$$

Cela étant vrai pour tout $x \in (F+G)^\perp$, on a

$$(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp.$$

D'où l'égalité par double inclusion.

Remarque. Pour la réciproque, on aurait aussi pu dire : $F \subset (F+G)$, donc

$$(F+G)^\perp \subset F^\perp$$

d'après le premier point. De même, $G \subset (F+G)$, donc

$$(F+G)^\perp \subset G^\perp.$$

Et donc

$$(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp.$$

• Le résultat précédent donne

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp.$$

Or, comme E est euclidien, pour tout sous-espace H de E, on a

$$(H^\perp)^\perp = H.$$

On a alors

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G \qquad \text{puis} \qquad (F \cap G)^\perp = \big((F^\perp + G^\perp)^\perp\big)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 52. • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors

$$P(1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P = (X-1)Q.$$

Donc

$$H = \big\{(X-1)Q \in \mathbb{R}_3[X] \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X]\big\},$$

et pour des raisons de degré,

$$\begin{aligned} H &= \big\{(X-1)Q \text{ avec } Q \in \mathbb{R}_2[X]\big\} \\ &= \big\{(X-1)(a+bX+cX^2),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\big\} \\ &= \big\{a(X-1)+b(X-1)X+c(X-1)X^2,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\big\} \end{aligned}$$

Donc la famille

$$\big(X-1, (X-1)X, (X-1)X^2\big) = \big(X-1, X^2-X, X^3-X\big)$$

est une famille génératrice de H. Elle est libre car échelonnée en degré (et ne contient pas le polynôme nul), donc c'est une base de H. Il y a trois vecteurs, donc

$$\boxed{\dim(H) = 3}.$$

• Appliquons alors le procédé de Gram-Schmidt à cette famille pour obtenir une base orthonormée de H.
◇ $\|X-1\| = \sqrt{2}$, donc on pose

$$\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)}.$$

◇ On a

$$X^2 - X - \underbrace{\langle X^2 - X, e_1\rangle}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}} e_1 = X^2 - X + \frac{1}{2}(X-1) = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2},$$

c'est un vecteur de norme

$$\sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

donc on pose

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}}(2X^2 - X - 1)}.$$

◇ On a

$$X^3 - X^2 - \underbrace{\langle X^3 - X^2, e_1\rangle}_{=0} e_1 - \underbrace{\langle X^3 - X^2, e_2\rangle}_{=-\frac{2}{\sqrt{6}}} e_2 = X^3 - X^2 + \frac{2}{6}(2X^2 - X - 1) = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3},$$

c'est un vecteur de norme

$$\sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

donc on pose

$$e_3 = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}(3X^3 - X^2 - X - 1)}.$$

◇ Alors (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de H.