

TD0B - RÉVISIONS ANALYSE

1 Inégalités

Exercice 1. Le but de l'exercice est d'obtenir des majorations. Chaque inégalité intermédiaire devra être justifiée par l'un des arguments suivants, sauf si elle résulte d'un calcul de simplification, ou si c'est une inégalité établie précédemment dans l'exercice.

1. Transitivité : si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.
2. Addition d'une même constante (positive ou négative) de chaque côté d'une inégalité : si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ (même si $c \leq 0$).
3. Addition d'inégalités **dans le même sens** : si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
Version plus générale (qui ne servira pas dans cet exercice) : si $a_i \leq b_i$ pour $i \in I$, alors $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$ (si convergence).
4. Multiplication par une même constante **positive** de chaque côté d'une inégalité **sans changer le sens** : si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$. De même, on peut diviser par un nombre **strictement positif, sans changer le sens**.
5. Multiplication par une même constante **négative** de chaque côté d'une inégalité **à condition de changer le sens** : si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$. De même, on peut diviser par un nombre **strictement négatif, à condition de changer le sens**.
6. Multiplication d'inégalités **positives** qui sont **dans le même sens** : si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$.
7. Application d'une fonction (strictement) monotone sur un domaine : si f est une fonction croissante sur I (ce que l'on peut vérifier par une étude du signe de f' si f est dérivable et que I est un intervalle...), **et** si $a \in I$ et $b \in I$, alors $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. Autrement dit, une fonction croissante préserve les inégalités, **à condition** de prendre les éléments là où f est croissante. De même pour les fonctions décroissantes qui renversent les inégalités, et de même pour les fonctions strictement monotones.

Cas particuliers :

- fonctions puissance ;
- fonction inverse ;
- fonctions exponentielle et logarithme...

8. Définition de la valeur absolue : en particulier, pour tout réel x , $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$, et aussi deux équivalences fondamentales :

$$-a \leq x \leq a \Leftrightarrow |x| \leq a \quad \text{et} \quad -a < x < a \Leftrightarrow |x| < a.$$

9. Propriétés de la valeur absolue (à savoir : $|x^n| = |x|^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ si $x \neq 0$, $|xy| = |x||y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$).

10. Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$ et $|x - y| \leq |x| + |y|$.

Version plus générale (qui ne servira pas dans cet exercice) : $\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i|$ (si convergence).

11. Encadrements connus de fonctions de référence : $0 \leq |\sin(x)| \leq 1$ pour tout réel x , $0 \leq |\cos(x)| \leq 1$ pour tout réel x .

Remarque.

1. Si on utilise l'argument « application d'une fonction monotone », on précisera quelle fonction f on utilise, et sur quel domaine I .
2. Si on veut majorer $f(x)$ pour $x \in [a, b]$ avec $a \leq 0 \leq b$, une façon de faire consiste à majorer sur $[a, 0]$ et $[0, b]$, et de prendre majoration la moins fine...

Préliminaires : majorer $|y|$ lorsque :

1. $0 \leq y \leq b$;
2. $a \leq y \leq 0$;
3. $a \leq y \leq b$ **sans connaître à priori le signe de a ou b .**

L'exercice : on considérera que $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé mais quelconque. On pourra majorer en fonction de n .

1. (a) Majorer $|x^n|$ lorsque $0 \leq x \leq b$
 (b) Majorer $|x^n|$ lorsque $a \leq x \leq 0$
 (c) Majorer $|x^n|$ lorsque $a \leq x \leq b$ **sans connaître à priori le signe de a ou b** , puis si $b = -a > 0$.
 (d) Minorer $1 - x^n$ lorsque $-1 < -b \leq x \leq b < 1$ (avec $b > 0$)
 (e) En déduire une majoration de $\frac{1}{|1 - x^n|}$ lorsque $-1 < -b \leq x \leq b < 1$ (avec $b > 0$)
 (f) En déduire une majoration de $\left| \frac{x^n}{1 - x^n} \right|$ lorsque $-1 < -b \leq x \leq b < 1$ (avec $b > 0$)
2. Majorer $|\sin(x) \cos^n(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}$, puis pour $0 < a \leq x \leq b < \frac{\pi}{2}$.
3. (a) Majorer $\left| \frac{(-1)^n x}{(1 + x^2)^n} \right|$ pour $0 < a \leq x \leq b$
 (b) Majorer $\left| \frac{(-1)^n x}{(1 + x^2)^n} \right|$ pour $a \leq x \leq b < 0$
 (c) Majorer $\left| \frac{(-1)^n (1 + x - 2nx^2)}{(1 + x^2)^n} \right|$ pour $0 < a \leq x \leq b$
4. (a) Majorer $\left| \frac{e^{-nx^2}}{n^2} \right|$ pour $x \in \mathbb{R}$
 (b) Majorer $\left| -\frac{2xe^{-nx^2}}{n} \right|$ pour $0 < a \leq x \leq b$
 (c) Majorer $\left| -\frac{2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2 e^{-nx^2} \right|$ pour $0 < a \leq x \leq b$
5. Majorer $\left| \frac{2x}{n^2 - x^2} \right|$ pour $x \in [0, 1]$ (on supposera $n \geq 1$).
6. Majorer $\left| \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right|$ pour $x \leq -2$
7. Majorer $|\cosh(x)|$ et $|\sinh(x)|$ pour $-M \leq x \leq M$.
8. Majorer $|t^{-x}|$ pour $0 < a \leq x \leq b$ en fonction de t (*Une distinction à faire*).

Exercice 2. Quelques inégalités classiques à savoir redémontrer. Pour les deux premières, cela repose sur le principe clé suivant : **montrer que les fonctions f et g vérifient $f \leq g$ revient à montrer que $0 \leq g - f$** , ce qui est beaucoup plus simple (par exemple à l'aide d'un tableau de variation). Pour la troisième, la méthode précédente marche aussi, mais il y a nettement plus simple (l'inégalité des accroissements finis). La dernière est une astuce de calcul.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.
2. Pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leq x$.
3. Pour tout réel x , $|\sin(x)| \leq |x|$.
4. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ et $|a| + |b| \geq 2\sqrt{|ab|}$.

Exercice 3. Un exercice sur les carrés et racines carrées qui ne parle (presque) pas d'inégalités : compléter les trous par des implications (dans un sens ou un autre), des équivalences ou par des propositions sur x ou y

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 \quad \boxed{} \quad x = y$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 \Leftrightarrow \left(x = y \quad \boxed{} \right)$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x} = y \quad \boxed{} \quad x = y^2$
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2 \text{ et } \boxed{}$
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \boxed{}$
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y^2 \quad \boxed{} \quad 0 \leq x \leq y$

2 Intégrales

Exercice 4. Parmi les intégrales suivantes, certaines s'évaluent directement (**sans calcul** autre que l'évaluation du crochet). Déterminer lesquelles, et les évaluer (pas les autres!).

- | | | | |
|---|--|--|---|
| 1. $\int_0^1 \arctan(x) dx$ | 5. $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt$ | 9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} dt$ | 13. $\int_0^1 \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$ |
| 2. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$ | 6. $\int_2^3 \frac{dt}{t \ln^2(t)}$ | 10. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ | 14. $\int_0^x \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) dt$ |
| 3. $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$ | 7. $\int_0^1 (t+1)^5 (t-2) dt$ | 11. $\int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{t^3 + 8}} dt$ | 15. $\int_1^x \frac{(1 + \frac{1}{t})^4}{t^2} dt$ |
| 4. $\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt$ | 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{(1 + \cos(x))^2} dx$ | 12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin^5(t) dt$ | 16. $\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} dt$ |

Exercice 5. Calculer les intégrales restantes de l'exercice précédent.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|---|---------------------------------|------------------------|
| 1. $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$ | 3. $\int_0^2 t^2 - 3t + 2 dt$ | 5. $\int_0^4 t e^t dt$ |
| 2. $\int_0^1 \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} dt$ | 4. $\int_0^x t^2 \cos(t) dt$ | |

Exercice 7 (changements de variable).

- | | |
|---|--|
| 1. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin(t)}$ (avec $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$) | 3. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}$ (avec $u = \sqrt{t^2 - 1}$) |
| 2. $\int_1^2 \frac{dt}{t(t^3 + 1)}$ (avec $u = t^3$) | |

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente?
2. Calculer $u_{n+2} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire un équivalent de u_n .

Exercice 9. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que, si $P \neq 0$ et de signe constant sur $[0, 1]$, alors $\int_0^1 P(x) dx \neq 0$.

Exercice 10 (lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas $\mathcal{C}^1$). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\int_a^b f(t) e^{ist} dt \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 11. Soit $I(n, p) = \int_{-1}^1 (x+1)^n (1-x)^p dx$ pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

1. Établir que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, $I(n, p) = \frac{n}{p+1} I(n-1, p+1)$ (faire une intégration par parties).

2. En déduire que $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$, $I(n, p) = 2^{n+p+1} \frac{n! \times p!}{(n+p+1)!}$.

Exercice 12.

- Démontrer que si f est continue sur l'intervalle $] -a, a[$, et si F est définie sur $] -a, a[$ par $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, alors : f paire $\Rightarrow F$ impaire et f impaire $\Rightarrow F$ paire. Réciproque ?
- Démontrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Exercice 13. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x \frac{\ln(t)}{t + i\sqrt{t^3+1}} dt$.

Exercice 14 (théorème de relèvement). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{U})$, où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

On définit $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ par $g(x) = ib + \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt$, où $b \in \mathbb{R}$ est un argument de $f(a)$.

- Vérifier que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- Soit $h : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(x) = f(x) \exp(-g(x))$. Calculer h' et en déduire h .
- Montrer qu'il existe une fonction $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ (remarquez le domaine d'arrivée de θ), de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f = e^{i\theta}$.

Exercice 15. Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

- Déterminer le domaine de définition, le signe puis la limite en $+\infty$ de f .
- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition, calculer f' et donner les variations de f .
- A l'aide de $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$, déterminer la limite de f en 1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 1 et donner $f'(1)$.
- Montrer que $f(x) = \int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)} dt$.
- En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_1^x e^{-(xt)^2} \frac{dt}{t}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' .

Exercice 17. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{1 - \cos(t)}{t^3} dt \quad \lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{t-1}{\ln^2(t)} dt$$

Indication : penser aux DL.

Exercice 18. Soit E l'ensemble des fonctions ϕ de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \phi''(x) = (1+x^2)\phi(x). \quad (\star)$$

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Montrer que si u et v sont deux éléments de E , alors $u'v - uv'$ est une fonction constante.
- Soit f la fonction définie, pour tout réel x , par $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.
 - Vérifier que f est élément de E .
 - Soit g la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2}$. Montrer que g est élément de E .

4. (a) Soit $h \in E$. Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliquée aux fonctions f et h , que h est combinaison linéaire de f et g (*Indication : on pourra considérer $\frac{h'(x)f(x) - h(x)f'(x)}{f(x)^2}$...*).
- (b) Montrer finalement que (f, g) est une base de E .

Exercice 19. On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1. On désigne par f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$.
2. (a) On rappelle que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
Exprimer, pour tout réel t , $\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.
- (b) En déduire que :

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right).$$

(c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin(k)}{k} = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}$.

3. Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 20 (CCP 2014 Officiel de la Taupe). Soit $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$. On pourra utiliser, **sans le démontrer**, le résultat : $a_{n+2} = a_n \frac{n+1}{n+4}$.

1. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, et calculer a_1 et a_0 (on pourra utiliser le changement de variable $t = \sin(x)$).
2. Montrer que la suite $(n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.
3. En remarquant que $a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n$, montrer que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_{n+1}$, et en déduire un équivalent de a_n .
4. Donner le comportement de $\sum_{n \geq 0} a_n$.

Remarque. Les années précédentes, il était demandé de montrer la relation admise, l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt$, puis de calculer l'intégrale !

Exercice 21 (CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2). Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} dx$.

Exercice 22 (CCP 2011 Officiel de la Taupe - exo 2). Convergence et limite de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solutions

Exercice 1. Préliminaires

(P1) Si $0 \leq y \leq b$, alors $|y| = y$, donc

$$\boxed{|y| \leq b}.$$

(P2) Si $a \leq y \leq 0$, on a $|y| = -y$, or $-y \leq -a$, donc

$$\boxed{|y| \leq -a}.$$

(P3) Deux cas sont possibles :

- soit $0 \leq y$, alors on a $0 \leq y \leq b$, et par (P1), on a alors $|y| \leq b$
- soit $y \leq 0$, et on a alors $a \leq y \leq 0$, donc par (P2) on a $|y| \leq -a$.

Dans tous les cas,

$$\boxed{|y| \leq \max(b, -a)}.$$

Une version plus simple de ceci est de dire : $b \leq |b|$, et $-a \leq |-a| = |a|$, donc

$$\max(b, -a) \leq \max(|b|, |a|).$$

Donc

$$\boxed{|y| \leq \max(|b|, |a|)}.$$

Remarque. En fait, ces deux versions sont équivalentes...

1a) Par (P1), on a $|x| \leq b$.

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$t \mapsto t^n$$

est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et **comme** $|x| \in \mathbb{R}_+$ **et** $b \in \mathbb{R}_+$,

$$|x|^n \leq b^n.$$

Puis, $|x^n| = |x|^n$, donc

$$\boxed{|x^n| \leq b^n = |b|^n}.$$

1b) Par (P2), on a $|x| \leq -a = |a|$.

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$t \mapsto t^n$$

est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et **comme** $|x| \in \mathbb{R}_+$ **et** $|a| \in \mathbb{R}_+$,

$$|x|^n \leq |a|^n.$$

Puis, $|x^n| = |x|^n$, donc

$$\boxed{|x^n| \leq |a|^n}.$$

1c) • Par (P3), on a $|x| \leq \max(|a|, |b|)$.

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$t \mapsto t^n$$

est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et **comme** $|x| \in \mathbb{R}_+$ **et** $\max(|a|, |b|) \in \mathbb{R}_+$,

$$|x|^n \leq \max(|a|, |b|)^n.$$

Puis, $|x^n| = |x|^n$, donc

$$\boxed{|x^n| \leq \max(|a|, |b|)^n}.$$

• Si $b = -a$, alors $a \leq x \leq b$ donne $-b \leq x \leq b$, donc on a $|x| \leq b$. Comme la fonction

$$t \mapsto t^n$$

est croissant sur $\mathbb{R}_+$ **et que** $|x|$ **et** b **sont dans** $\mathbb{R}_+$, on en déduit

$$|x|^n \leq b^n.$$

Puis, par propriété de la valeur absolue, $|x^n| = |x|^n$, et donc

$$\boxed{|x^n| \leq b^n}.$$

1d) Par la question précédente, on a $|x^n| \leq b^n$. Or, par définition de la valeur absolue, $x^n \leq |x^n|$, donc $x^n \leq b^n$ (par transitivité de l'inégalité, c'est-à-dire l'argument (h)).

Donc, en multipliant par -1 (et on a $-1 < 0$), on a $-x^n \geq -b^n$, donc

$$\boxed{1 - x^n \geq 1 - b^n}.$$

1e) Comme $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$t \mapsto t^n$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et **comme** $1 \in \mathbb{R}_+$ **et** $b \in \mathbb{R}_+$ **et** $b < 1$,

$$b^n < 1^n = 1, \quad \text{soit} \quad 1 - b^n > 0$$

. Donc (grâce à la question précédente puis par transitivité des inégalités, c'est-à-dire l'argument (h)),

$$1 - x^n \geq 1 - b^n > 0.$$

En particulier, $1 - x^n \geq 0$, donc $|1 - x^n| = 1 - x^n$.

Comme la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

est décroissante sur $]0, +\infty[$, et que

$$|1 - x^n| > 0 \quad \text{et} \quad 1 - b^n > 0,$$

$$\boxed{0 \leq \frac{1}{|1 - x^n|} \leq \frac{1}{1 - b^n}}.$$

1f) Puis, on a vu à la question 1c que si $-b \leq x \leq b$, alors

$$|x^n| \leq b^n.$$

De plus, une valeur absolue est positive, donc

$$0 \leq |x^n| \leq b^n.$$

Comme on peut multiplier des inégalités **positives** et **dans le même sens**,

$$0 \leq |x^n| \frac{1}{|1 - x^n|} \leq b^n \frac{1}{1 - b^n}.$$

Enfin, par propriétés de la valeur absolue (argument (n)),

$$|x^n| \frac{1}{|1 - x^n|} = \left| \frac{x^n}{1 - x^n} \right|,$$

donc on en déduit

$$\boxed{0 \leq \left| \frac{x^n}{1 - x^n} \right| \leq \frac{b^n}{1 - b^n}}.$$

2) ★ Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $0 \leq |\cos(x)| \leq 1$. Donc $|\cos(x)| \geq 0$, $1 \geq 0$ et comme la fonction

$$t \mapsto t^n$$

est croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$0 = 0^n \leq |\cos(x)|^n \leq 1^n = 1.$$

Puis, $0 \leq |\sin(x)| \leq 1$, et comme on peut multiplier des inégalités **positives** et **dans le même sens**, on obtient

$$0 \leq |\sin(x)| |\cos(x)|^n \leq 1 \times 1 = 1.$$

Enfin, par propriétés de la valeur absolue, on a $|\sin(x)| |\cos(x)|^n = |\sin(x) \cos^n(x)|$, et donc

$$\boxed{0 \leq |\sin(x) \cos^n(x)| \leq 1}.$$

★ Pour $0 < a \leq x \leq b < \frac{\pi}{2}$, on a mieux. D'abord, on a $\sin(x) \geq 0$ et $\cos(x) \geq 0$, donc (par exemple par la règle des signes), on a $\sin(x) \cos^n(x) \geq 0$, donc

$$|\sin(x) \cos^n(x)| = \sin(x) \cos^n(x).$$

Puis, $\sin$ est strictement croissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $\cos$ est strictement décroissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc pour $0 < a \leq x \leq b < \frac{\pi}{2}$ (donc tous ces nombres sont dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$),

$$0 = \sin(0) < \sin(a) \leq \sin(x) \leq \sin(b) < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad 1 = \cos(0) > \cos(a) \geq \cos(x) \geq \cos(b) > \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Donc, par stricte croissance de la fonction

$$x \mapsto x^n$$

sur $\mathbb{R}_+$, comme $1, \cos(a), \cos(x), \cos(b)$ et 0 sont dans $\mathbb{R}_+$, on en déduit

$$1 = 1^n > \cos^n(a) \geq \cos^n(x) \geq \cos^n(b) > 0^n = 0,$$

que l'on réécrit

$$0 < \cos^n(b) \leq \cos^n(x) \leq \cos^n(a) < 1.$$

Puis des inégalités positives dans le même sens se multiplient, donc

$$\boxed{0 < \sin(a) \cos^n(b) \leq \sin(x) \cos^n(x) \leq \sin(b) \cos^n(a) < 1}.$$

3a) Comme $x^2 \geq 0$, on a $1 + x^2 \geq 1$. Donc $|1 + x^2| = 1 + x^2$. Puis, par propriétés de la valeur absolue (argument (n)),

$$\left| \frac{(-1)^n x}{(1 + x^2)^n} \right| = \frac{|-1|^n |x|}{|1 + x^2|^n} = \frac{|x|}{(1 + x^2)^n}$$

(car $|-1| = 1$).

Puis, $x \geq a > 0$, donc x et a (et 0) sont dans $\mathbb{R}_+$. Or, la fonction

$$t \mapsto t^2$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$x^2 \geq a^2 > 0^2 = 0.$$

Donc, $x^2 + 1 \geq a^2 + 1 > 1$.

Puis, $1 + x^2 \geq 1 + a^2 \geq 1 \geq 0$, donc $1 + x^2$ et $1 + a^2$ (et 1) sont dans $\mathbb{R}_+$, or la fonction

$$t \mapsto t^n$$

est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (car $n \in \mathbb{N}^*$), donc on en déduit que

$$(1 + x^2)^n \geq (1 + a^2)^n \geq 1^n = 1.$$

Puis, $(1 + x^2)^n \geq (1 + a^2)^n \geq 1 > 0$, donc $(1 + x^2)^n$ et $(1 + a^2)^n$ (et 1) sont dans $\mathbb{R}_+^*$, or la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$0 < \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+a^2)^n} \leq \frac{1}{1} = 1.$$

Enfin, on a $0 < a \leq x \leq b$, donc (cf. (P1), mais c'est direct en fait!), on a $0 \leq |x| \leq b$. Par produit d'inégalités positives et dans le même sens,

$$0 \leq \frac{|x|}{(1+x^2)^n} = \left| \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

Remarque. La série de terme général $\frac{b}{(1+a^2)^n}$ converge, car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+a^2}$, et que $\frac{1}{1+a^2} \in [0, 1[$ puisque $a^2 > 0$...

3b) De même qu'en 3a,

$$\left| \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} \right| = \frac{|x|}{(1+x^2)^n}.$$

Puis, $x \leq b < 0$, donc x et b (et 0) sont dans $\mathbb{R}_-$. Or la fonction

$$t \mapsto t^2$$

est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}_-$ donc

$$x^2 \geq b^2 > 0^2 = 0.$$

Donc, $x^2 + 1 \geq b^2 + 1 > 1$.

Puis, de même qu'en 3a, on en déduit

$$0 < \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+b^2)^n} \leq 1.$$

Enfin, on a $a \leq x \leq b < 0$, donc (cf. (P2)),

$$0 \leq |x| \leq -a = |a|.$$

Par produit d'inégalités positives et dans le même sens,

$$0 \leq \frac{|x|}{(1+x^2)^n} = \left| \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{|a|}{(1+b^2)^n}.$$

Remarque. La série de terme général $\frac{|a|}{(1+b^2)^n}$ converge, car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{1+b^2}$, et que $\frac{1}{1+b^2} \in [0, 1[$ puisque $b^2 > 0$...

3c) Par propriétés de la valeur absolue,

$$\left| \frac{(-1)^n (1+x-2nx^2)}{(1+x^2)^n} \right| = \frac{|-1|^n |1+x-2nx^2|}{|1+x^2|^n} = \frac{|1+x-2nx^2|}{(1+x^2)^n}$$

car $1+x^2 \geq 0$ (déjà vu avant) et $|-1| = 1$.

Or, par inégalité triangulaire,

$$|1+x-2nx^2| \leq |1| + |x| + |-2nx^2|,$$

et par propriétés de la valeur absolue,

$$|1| + |x| + |-2nx^2| = 1 + |x| + |-2n||x^2| = 1 + |x| + 2nx^2$$

(car $-2n \leq 0$ et $x^2 \geq 0$), donc

$$|1+x-2nx^2| \leq 1 + |x| + 2nx^2.$$

Puis, $0 < a \leq x \leq b$, donc $0 \leq |x| \leq b$ (cf. (P1), mais c'est direct ici), donc $|x|$ et b (et 0) sont dans $\mathbb{R}_+$. Or, la fonction

$$t \mapsto t^2$$

est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$0 \leq x^2 = |x|^2 \leq b^2.$$

En multipliant par $2n$ qui est positif, on a $0 \leq 2nx^2 \leq 2nb^2$. Par addition d'inégalités dans le même sens,

$$|x| + 2nx^2 \leq b + 2nb^2.$$

Par addition d'un nombre,

$$1 + |x| + 2nx^2 \leq 1 + b + 2nb^2.$$

Par transitivité des inégalités,

$$|1 + x - 2nx^2| \leq 1 + b + 2nb^2.$$

Puis, $(1 + x^2)^n \geq (1 + a^2)^n \geq 1 > 0$ (déjà vu avant : idem qu'en 3a), donc $(1 + x^2)^n$ et $(1 + a^2)^n$ (et 1) sont dans $\mathbb{R}_+^*$. Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$0 < \frac{1}{1} \leq \frac{1}{(1 + x^2)^n} \leq \frac{1}{(1 + a^2)^n}.$$

Comme on peut multiplier des inégalités positives dans le même sens,

$$\frac{|1 + x - 2nx^2|}{(1 + x^2)^n} \leq \frac{1 + b + 2nb^2}{(1 + a^2)^n}.$$

On a donc

$$\left| \frac{(-1)^n (1 + x - 2nx^2)}{(1 + x^2)^n} \right| \leq \frac{1 + b + 2nb^2}{(1 + a^2)^n}.$$

Remarque. Là encore la série de terme général $\frac{1 + b + 2nb^2}{(1 + a^2)^n}$ converge, mais c'est plus subtil (par exemple on peut vérifier que, puisque $a^2 > 0$, $\frac{1 + b + 2nb^2}{(1 + a^2)^n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right) \dots$).

4a) Pour tout réel x , on a $x^2 \geq 0$. Puis, $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n \geq 0$. Un produit de nombre positif est positif (conséquence de l'argument (m) si on veut), donc $nx^2 \geq 0$. Puis, $-1 < 0$, donc

$$-nx^2 \leq -0 = 0.$$

Comme $\exp$ est croissant sur $\mathbb{R}$ (et $-nx^2 \in \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$),

$$e^{-nx^2} \leq e^0 = 1.$$

Enfin, par propriétés de la valeur absolue,

$$\left| \frac{e^{-nx^2}}{n^2} \right| = \frac{|e^{-nx^2}|}{|n^2|} = \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$$

(car une exponentielle est toujours positive et un carré aussi).

Donc, comme $n^2 > 0$, en divisant l'inégalité précédente par n^2 , on a $\frac{e^{-nx^2}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Donc

$$\left| \frac{e^{-nx^2}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

4b) Par propriétés de la valeur absolue,

$$\left| -\frac{2xe^{-nx^2}}{n} \right| = |-2||x| \frac{|e^{-nx^2}|}{|n|} = 2|x| \frac{e^{-nx^2}}{n}.$$

Or, pour $0 < a \leq x \leq b$,

$$0 \leq |x| = x \leq b.$$

Puis, pour $0 < a \leq x \leq b$, on a a , x et b (et 0) dans $\mathbb{R}_+$. Or la fonction

$$t \mapsto t^2$$

est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$, donc on en déduit

$$0 = 0^2 < a^2 \leq x^2 \leq b^2, \quad \text{puis} \quad 0 > -na^2 \geq -nx^2 \geq -nb^2$$

(car $n > 0$, donc $-n < 0$, et on utilise l'argument (k)). Par stricte croissance de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$ (et car $-na^2 \in \mathbb{R}$, $-nx^2 \in \mathbb{R}$, $-nb^2 \in \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$), on a :

$$e^0 = 1 > e^{-na^2} \geq e^{-nx^2} \geq e^{-nb^2} > 0,$$

que l'on réécrit

$$0 < e^{-nb^2} \leq e^{-nx^2} \leq e^{-na^2} < 1.$$

Par multiplication d'inégalités positives dans le même sens, on en déduit

$$|x|e^{-nx^2} \leq be^{-na^2}.$$

Puis, en multipliant par la constante positive $\frac{2}{n}$, on a $2|x|\frac{e^{-nx^2}}{n} \leq 2b\frac{e^{-na^2}}{n}$. Donc

$$\left| -\frac{2xe^{-nx^2}}{n} \right| \leq \frac{2be^{-na^2}}{n}.$$

Remarque. Comme $n \geq 1$, on peut encore majorer :

$$\left| -\frac{2xe^{-nx^2}}{n} \right| \leq 2be^{-na^2} = 2b(e^{-a^2})^n,$$

et le terme de droite de cette inégalité est le terme général d'une série géométrique de raison e^{-a^2} , convergente car $e^{-a^2} \in [0, 1[$ puisque $a > 0$...

4c) Par inégalité triangulaire et propriété de la valeur absolue,

$$\left| -\frac{2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2e^{-nx^2} \right| \leq \left| -\frac{2e^{-nx^2}}{n} \right| + |4x^2|e^{-nx^2} = \frac{2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2e^{-nx^2}$$

(car $4x^2$ est positif, c'est un carré, et qu'une exponentielle est positive).

Or, pour $0 < a \leq x \leq b$, on a vu (à la question 4b) :

$$0 < e^{-nb^2} \leq e^{-nx^2} \leq e^{-na^2} < 1$$

(inégalité $(\star)$).

Puis, des inégalités positives dans le même sens se multiplient, donc $0 \leq x^2e^{-nx^2} \leq b^2e^{-na^2}$, puis

$$0 \leq 4x^2e^{-nx^2} \leq 4b^2e^{-na^2}$$

.

Mais on peut aussi multiplier l'inégalité $(\star)$ par le nombre strictement positif $\frac{2}{n}$, ce qui donne

$$0 \leq \frac{2e^{-nx^2}}{n} \leq \frac{2e^{-na^2}}{n} < \frac{2}{n}.$$

Par addition d'inégalités dans le même sens, on a alors :

$$\frac{2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2e^{-nx^2} \leq \frac{2e^{-na^2}}{n} + 4b^2e^{-na^2}.$$

Par transitivité des inégalités, on conclut :

$$\left| -\frac{2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2e^{-nx^2} \right| \leq \frac{2e^{-na^2}}{n} + 4b^2e^{-na^2}.$$

Remarque. Comme $n \geq 1$, on peut encore majorer :

$$\left| -\frac{2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2e^{-nx^2} \right| \leq 2e^{-na^2} + 4b^2e^{-na^2} = (2 + 4b^2)(e^{-a^2})^n,$$

et le terme de droite de cette inégalité est le terme général d'une série géométrique de raison e^{-a^2} , convergente car $e^{-a^2} \in [0, 1[$ puisque $a > 0$...

5) On a $0 \leq x \leq 1$, donc x est dans $\mathbb{R}_+$ (et 0 et 1 aussi...), or la fonction

$$t \mapsto t^2$$

est croissant sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$0 = 0^2 \leq x^2 \leq 1^2 = 1.$$

On multiplie alors par le réel négatif -1 , on a : $0 \geq -x^2 \geq -1$. On additionne la constante n^2 de chaque côté des inégalités,

$$n^2 \geq n^2 - x^2 \geq n^2 - 1.$$

On a supposé $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \neq 1$, donc $n \geq 2$. Donc, comme la fonction

$$t \mapsto t^2$$

est croissant sur $\mathbb{R}_+$, et que $n \in \mathbb{R}_+$ et $2 \in \mathbb{R}_+$,

$$n^2 \geq 2^2 = 4.$$

On additionne la constante -1 de chaque côté des inégalités, on a alors $n^2 - 1 \geq 3$. Comme $3 > 0$, par transitivité des inégalités, on en déduit

$$n^2 \geq n^2 - x^2 \geq n^2 - 1 > 0.$$

En particulier, $n^2 - x^2 \geq 0$, donc $|n^2 - x^2| = n^2 - x^2$, et donc

$$n^2 \geq |n^2 - x^2| \geq n^2 - 1 > 0.$$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et que n^2 , $|n^2 - x^2|$ et $n^2 - 1$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{|n^2 - x^2|} \leq \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Puis, $0 \leq x \leq 1$, donc $0 \leq 2x \leq 2$ en multipliant par la constante positive 2, donc

$$0 \leq |2x| = 2x \leq 2.$$

On multiplie alors des inégalités positives dans le même sens,

$$0 \leq \frac{|2x|}{|n^2 - x^2|} \leq \frac{2}{n^2 - 1}.$$

Les propriétés de la valeur absolue permettent de conclure :

$$0 \leq \left| \frac{2x}{n^2 - x^2} \right| = \frac{|2x|}{|n^2 - x^2|} \leq \frac{2}{n^2 - 1}$$

6) Remarquons que (pour $x \neq -1$),

$$\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

Si $x \leq -2$, alors $x+1 \leq -2+1 = -1$. Comme $-1 < 0$, par transitivité des inégalités, on a aussi $x+1 < 0$, donc $x+1 \in \mathbb{R}_-^*$ (et $-1 \in \mathbb{R}_-^*$). Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, donc on en déduit

$$0 > \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{-1} = -1.$$

Par multiplication avec le réel négatif -2 , on obtient alors

$$0 < -\frac{2}{x+1} \leq 2.$$

En additionnant 1,

$$1 < 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} \leq 3$$

(ce qui justifie entre autre que l'expression a du sens, autrement dit que $\frac{x-1}{x+1}$ est dans le domaine de définition de $\ln$).

Puis, $\ln$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\frac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R}_+^*$ pour $x \leq -2$ (et 1 et 3 sont dans $\mathbb{R}_+^*$), donc

$$0 = \ln(1) < \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \leq \ln(3).$$

On en déduit

$$\left| \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right| = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right),$$

et donc

$$\boxed{\left| \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right| \leq \ln(3)}.$$

7) ★ Si $-M \leq x \leq 0$, alors x est dans $\mathbb{R}_-$ (et $-M$ et 0 aussi), or $\cosh$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, donc :

$$\cosh(-M) \geq \cosh(x) \geq \cosh(0) = 1.$$

Si $0 \leq x \leq M$, alors x est dans $\mathbb{R}_+$ (et M et 0 aussi), or $\cosh$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$1 = \cosh(0) \leq \cosh(x) \leq \cosh(M).$$

Or, $\cosh$ est paire, donc $\cosh(-M) = \cosh(M)$. Par conséquent, pour x avec $-M \leq x \leq M$, on a (que $x \leq 0$ ou $x \geq 0$) :

$$1 \leq \cosh(x) \leq \cosh(M).$$

En particulier, $\cosh(x) \geq 0$ (car $1 > 0$, puis on utilise la transitivité des inégalités), donc $|\cosh(x)| = \cosh(x)$. Et donc

$$\boxed{1 \leq |\cosh(x)| \leq \cosh(M)}.$$

★ $\sinh$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (et $-M$, M et x sont dans $\mathbb{R}$), donc, si $-M \leq x \leq M$, on a alors l'inégalité

$$\sinh(-M) \leq \sinh(x) \leq \sinh(M).$$

Or, $\sinh$ est impaire, donc $\sinh(-M) = -\sinh(M)$.

Donc

$$-\sinh(M) \leq \sinh(x) \leq \sinh(M).$$

Par propriétés de la valeur absolue,

$$\boxed{|\sinh(x)| \leq \sinh(M)}.$$

8) Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $t^{-x} = e^{-x \ln(t)}$ par définition, et comme une exponentielle est toujours positive,

$$|t^{-x}| = t^{-x} = e^{-x \ln(t)}.$$

On a $0 < a \leq x \leq b$. On veut multiplier par $\ln(t)$, mais pour cela il faut savoir le signe de $\ln(t)$.

Premier cas : si $t \geq 1$, alors par croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et car 1 et t sont dans $\mathbb{R}_+^*$), on a :

$$\ln(t) \geq \ln(1) = 0.$$

Donc,

$$0 \leq a \ln(t) \leq x \ln(t) \leq b \ln(t).$$

On multiplie alors par le réel négatif -1 , on en déduit

$$0 \geq -a \ln(t) \geq -x \ln(t) \geq -b \ln(t).$$

Comme la fonction $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $0, -a \ln(t), -x \ln(t)$ et $-b \ln(t)$ sont dans $\mathbb{R}$, on en déduit

$$1 = \exp(0) \geq \exp(-a \ln(t)) \geq \exp(-x \ln(t)) \geq \exp(-b \ln(t)) > 0.$$

Par conséquent,

$$0 < t^{-b} \leq t^{-x} = |t^{-x}| \leq t^{-a} \leq 1.$$

Deuxième cas : si $0 < t \leq 1$, alors par croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et car 1 et t sont dans $\mathbb{R}_+^*$), on a :

$$\ln(t) \leq \ln(1) = 0.$$

Donc,

$$0 \geq a \ln(t) \geq x \ln(t) \geq b \ln(t).$$

On multiplie alors par le réel négatif -1 , on en déduit

$$0 \leq -a \ln(t) \leq -x \ln(t) \leq -b \ln(t).$$

Comme la fonction $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $0, -a \ln(t), -x \ln(t)$ et $-b \ln(t)$ sont dans $\mathbb{R}$, on en déduit

$$1 = \exp(0) \leq \exp(-a \ln(t)) \leq \exp(-x \ln(t)) \leq \exp(-b \ln(t)).$$

Par conséquent,

$$1 < t^{-a} \leq t^{-x} = |t^{-x}| \leq t^{-b}.$$

Exercice 2. 1) Posons

$$f : x \mapsto e^x - x - 1.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Or, la fonction $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $e^0 = 1$. Donc, si $x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq e^0 = 1$, donc

$$f'(x) \geq 0,$$

et si $x \in \mathbb{R}_-$, $e^x \leq e^0 = 1$, donc

$$f'(x) \leq 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(0) = 0$	$\nearrow$

Donc la fonction f est décroissante sur (l'intervalle) $]-\infty, 0]$ et croissante sur (l'intervalle) $[0, +\infty[$. Donc, pour tout $x \in]-\infty, 0]$, on a $f(x) \geq f(0)$ par décroissance, et pour $x \in [0, +\infty[$, on a $f(x) \geq f(0)$ par croissance.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \geq f(0) = 0,$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

2) Posons

$$f : x \mapsto x - \ln(1 + x).$$

La fonction f est dérivable sur $] -1, +\infty[$, et pour tout $x \in] -1, +\infty[$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Donc

$$f'(x) \geq 0$$

si $x \in \mathbb{R}_+$ et

$$f'(x) \leq 0$$

si $x \in] -1, 0]$.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$-$	$+$
$f(x)$	$\parallel$	$\searrow$	$\nearrow$

Donc la fonction f est décroissante sur (l'intervalle) $] -1, 0]$ et croissante sur (l'intervalle) $[0, +\infty[$. Donc, pour tout $x \in] -1, 0]$,

$$f(x) \geq f(0)$$

par décroissance, et pour $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) \geq f(0)$$

par croissance.

Donc, pour tout $x \in] -1, +\infty[$,

$$f(x) \geq f(0) = 0,$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

3) La fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur (l'intervalle) $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leq 1.$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq 1 \times |x - y|$$

(autrement dit, $\sin$ est 1-Lipschitzienne). Avec $y = 0$, et comme $\sin(0) = 0$, cela donne bien : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x)| \leq |x|.$$

4) ★ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $a^2 = |a|^2$ et $b^2 = |b|^2$, donc

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |ab| \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2} - |ab| = \frac{1}{2}(|a| - |b|)^2,$$

ce qui est vrai. Donc pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

★ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$|a| = (\sqrt{|a|})^2 \quad \text{et} \quad |b| = (\sqrt{|b|})^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{|ab|} = \sqrt{|a||b|} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|},$$

donc

$$\begin{aligned} |a| + |b| \geq 2\sqrt{|ab|} &\Leftrightarrow (\sqrt{|a|})^2 + (\sqrt{|b|})^2 \geq 2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{|a|})^2 + (\sqrt{|b|})^2 - 2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui est vrai. Donc pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$|a| + |b| \geq 2\sqrt{|ab|}.$$

Remarque. Cette deuxième inégalité est en fait la même que la première : on a juste remplacé $|a|$ par $\sqrt{|a|}$ et $|b|$ par $\sqrt{|b|}$.

Exercice 3. 1) $\boxed{(x^2 = y^2) \Leftarrow (x = y)}$ de manière évidente.

Attention, ce n'est pas équivalent ! car par exemple si $x = -2$ et $y = 2$, on a bien $x^2 = y^2$, mais $x \neq y$.

2) $\boxed{(x^2 = y^2) \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)}$.

Une façon simple de le voir :

$$x^2 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)(x + y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y = 0 \text{ ou } x + y = 0).$$

3) $\boxed{(\sqrt{x} = y) \Rightarrow (x = y^2)}$.

En effet, si $\sqrt{x} = y$, alors $(x \geq 0)$ car l'expression doit avoir du sens, mais cela n'a pas d'influence ici, et)

$$x = \sqrt{x}^2 = y^2.$$

Mais ce n'est pas équivalent : si $x = y^2$, alors $x \geq 0$ (là c'est important) car $y^2 \geq 0$ (tout réel au carré est positif), et donc

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^2} = |y|,$$

donc par exemple si $y = -2$ et $x = 4$, on a bien $x = y^2$, mais $\sqrt{x} = 2 \neq -2 = y$.

4) $\boxed{(\sqrt{x} = y) \Leftrightarrow (x = y^2 \text{ et } y \geq 0)}$.

En effet, si $\sqrt{x} = y$, alors $(x \geq 0)$ car l'expression doit avoir du sens, mais cela n'a pas d'influence ici, et)

$$x = \sqrt{x}^2 = y^2,$$

et $y \geq 0$ car une racine carrée est toujours positive.

Puis, si $x = y^2$ et $y \geq 0$, alors $x \geq 0$ (là c'est important) car $y^2 \geq 0$ (tout réel au carré est positif), et donc

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^2} = |y| = y,$$

la dernière égalité utilisant le fait que $y \geq 0$.

5) $\boxed{(x = y^2) \Leftrightarrow (\sqrt{x} = |y|)}$.

En effet, si $x = y^2$, alors $x \geq 0$ (car un carré est toujours positif), et

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^2} = |y|.$$

Puis, si $\sqrt{x} = |y|$ (alors $x \geq 0$ pour que l'expression ait du sens, mais cela n'a pas d'influence ici, et)

$$x = \sqrt{x}^2 = |y|^2 = y^2.$$

6) $\boxed{x^2 \leq y^2 \Leftarrow 0 \leq x \leq y}$.

En effet, si $0 \leq x \leq y$, comme la fonction

$$t \mapsto t^2$$

est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit bien

$$x^2 \leq y^2.$$

La réciproque est fausse : par exemple $x = -2$ et $y = -3$ vérifient

$$x^2 = 4 < 9 = y^2, \quad \text{mais} \quad y = -3 < -2 = x < 0.$$

En fait, si $x^2 \leq y^2$, comme un carré est positif et que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a l'inégalité

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{y^2} = |y|.$$

La réciproque étant comme ci-dessus, on a en fait

$$\boxed{x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow |x| \leq |y|}.$$

Exercice 4. Les intégrales qui se calculent directement seront dites ici « **Direct** ».

Normalement il faut vérifier que les intégrandes sont bien continues sur le segment là où l'on intègre ! C'est bien le cas ici (vérifiez-le).

1) On intègre par parties en dérivant la fonction arctan et en primitivant la fonction $t \mapsto 1$:

$$\int_0^1 \arctan(x) dx = [x \arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \arctan(1) - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)}.$$

2) **Direct** de la forme $\frac{u'}{u^2+1}$:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = [\arctan(e^x)]_0^1 = \boxed{\arctan(e) - \frac{\pi}{4}}.$$

3) **Direct** de la forme $u'e^u$ (à une constante près) :

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1-e^{-1}}{2}}.$$

4) On intègre par parties en dérivant la fonction

$$t \mapsto \ln(1+t^2)$$

et en primitivant la fonction $t \mapsto t$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+t^2) dt &= [t \ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt \\ &= \ln(2) - \int_0^1 2 \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2} dt \\ &= \ln(2) - [2t - 2 \arctan(t)]_0^1 \\ &= \boxed{\ln(2) - 2 + 2 \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

5) **Direct** de la forme $u'u$ (l'intégrale n'existe que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, car il faut que la fonction

$$t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$$

soit continue sur $[1, x]$ ou $[x, 1]$) :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{1}{2} \ln^2(t) \right]_1^x = \boxed{\frac{1}{2} \ln^2(x)}.$$

6) **Direct** de la forme $\frac{u'}{u^2}$:

$$\int_2^3 \frac{dt}{t \ln^2(t)} = \left[-\frac{1}{\ln(t)} \right]_2^3 = \boxed{\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(3)}}.$$

7) Ce n'est pas direct : soit on développe, et on intègre terme à terme (mais c'est long!), soit on pose $u = t + 1$, alors

$$\int_0^1 (t+1)^5 (t-2) dt = \int_1^2 u^5 (u-3) du = \int_1^2 (u^6 - 3u^5) du = \left[\frac{u^7}{7} - \frac{3u^6}{6} \right]_1^2 = \boxed{-\frac{187}{14}}.$$

8) On pose $u = \cos(x)$ (la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$), alors $du = -\sin(x)dx$, et donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{(1 + \cos(x))^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2(x)}{(1 + \cos(x))^2} \sin(x) dx \\ &= \int_1^0 \frac{1 - u^2}{(1 + u)^2} (-1) du \\ &= \int_0^1 \frac{(1 + u)(1 - u)}{(1 + u)^2} du \\ &= \int_0^1 \frac{1 - u}{1 + u} du \\ &= \int_0^1 \frac{2 - (1 + u)}{1 + u} du = [2 \ln(1 + u) - u]_0^1 \\ &= \boxed{2 \ln(2) - 1} \end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi poser $v = 1 + u$ pour simplifier le dénominateur, et là plus besoin de voir les astuces de simplification.

9) **Direct** de la forme $\frac{u'}{u^3}$ (à une constante près) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} dt = \left[\frac{1}{2 \cos^2(t)} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Remarque. Un élève m'a proposé de la forme $u'u$. En effet, en posant $u = \tan$, on a $u' = \frac{1}{\cos^2}$, et donc $u'u = \frac{\sin}{\cos^3}$, ce qui donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} dt = \left[\frac{1}{2} \tan^2(t) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

10) **Direct** de la forme $u'e^u$ (à une constante près) :

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left[2e^{\sqrt{x}} \right]_1^4 = \boxed{2e^2 - 2e}.$$

11) **Direct** de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ (à une constante près) :

$$\int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{t^3 + 8}} dt = \left[\frac{2}{3} \sqrt{t^3 + 8} \right]_0^2 = \boxed{\frac{2}{3}(4 - 2\sqrt{2})}.$$

12) **Direct** de la forme $u'u^5$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin^5(t) dt = \left[\frac{1}{6} \sin^6(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

13) Presque direct :

$$\int_0^1 \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 \frac{(t^2 + 1) - 1}{t^2 + 1} dt = [t - \arctan(t)]_0^1 = \boxed{1 - \frac{\pi}{4}}.$$

14) Intégrons par parties : dérivons la fonction

$$t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) dt$$

et primitivons la fonction $t \mapsto 1$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) dt &= \left[t \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \right]_0^x - \int_0^x t \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}}{t + \sqrt{t^2 + 1}} dt \\
 &= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \\
 &= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \left[\sqrt{t^2 + 1} \right]_0^x \\
 &= \boxed{x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + 1}
 \end{aligned}$$

Remarque. L'intégrale existe pour tout x réel, car pour tout réel t , $t < \sqrt{t^2 + 1}$, et donc la fonction

$$t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (comme composée de fonctions qui sont bien définies et continues).

Autre méthode : on fait le changement de variable $t = \sinh(u)$. La fonction

$$u \in [0, \operatorname{arcsinh}(x)] \mapsto \sinh(u) \in [0, x]$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ (et bijectif), et $dt = \cosh(u)du$, et

$$\begin{aligned}
 \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) &= \ln(\sinh(u) + \sqrt{\sinh^2(u) + 1}) \\
 &= \ln(\sinh(u) + \sqrt{\cosh^2(u)}) \\
 &= \ln(\sinh(u) + |\cosh(u)|) \\
 &= \ln(\sinh(u) + \cosh(u))
 \end{aligned}$$

(car $\cosh \geq 0$). Or, $\sinh(u) + \cosh(u) = e^u$, donc

$$\ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) = u$$

(cela revient à dire que $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, ce qui est la raison du changement de variable proposé...).

Donc

$$\int_0^x \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) dt = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(x)} u \cosh(u) du.$$

On intègre alors par parties (en dérivant la fonction $u \mapsto u$) :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) dt &= [u \sinh(u)]_0^{\operatorname{arcsinh}(x)} - \int_0^{\operatorname{arcsinh}(x)} \sinh(u) du \\
 &= x \cdot \operatorname{arcsinh}(x) - [\cosh(u)]_0^{\operatorname{arcsinh}(x)} \\
 &= x \cdot \operatorname{arcsinh}(x) + 1 - \cosh(\operatorname{arcsinh}(x))
 \end{aligned}$$

Enfin, $\cosh = \sqrt{1 + \sinh^2}$, donc

$$\cosh(\operatorname{arcsinh}(x)) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Et donc

$$\int_0^x \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) dt = x \cdot \operatorname{arcsinh}(x) + 1 - \sqrt{1 + x^2} = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 1 - \sqrt{1 + x^2}.$$

15) Direct de la forme $u'u^4$ (au signe près) :

$$\int_1^x \frac{(1 + \frac{1}{t})^4}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^5 \right]_1^x = \boxed{\frac{2^5 - (1 + \frac{1}{x})^5}{5}}.$$

16) Direct de la forme $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ (au signe près) :

$$\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} dt = [-\arcsin(e^{-t})]_0^x = \boxed{\frac{\pi}{2} - \arcsin(e^{-x})}.$$

Exercice 6. 1) On fait le changement de variable $u = e^x$ (possible car la fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\ln(2), \ln(3)]$, avec $du = e^x dx$) :

$$\begin{aligned} \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} &= \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx \\ &\stackrel{u=e^x}{=} \int_2^3 \frac{du}{u^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \int_2^3 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{2} [\ln(u-1) - \ln(u+1)]_2^3 \\ &= \frac{\ln(2) - \ln(4) + \ln(3)}{2} \\ &= \boxed{\frac{\ln(3) - \ln(2)}{2}} \end{aligned}$$

2) On pose $t = 2 \sin(x)$. On peut faire ce changement de variable, car la fonction

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \mapsto 2 \sin(x) \in [0, 1]$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_0^1 \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \sin^2(x)} 2 \cos(x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} |\cos(x)| \cos(x) dx$$

(car $1 - \sin^2(x) = \cos^2(x)$, et $\sqrt{\cos^2(x)} = |\cos(x)|$). Puis, sur l'intervalle d'intégration, $\cos \geq 0$, donc

$$\int_0^1 \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos(2x)) dx = \left[x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boxed{\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2),$$

donc est positif si $t \in [0, 1]$ et négatif si $t \in [1, 2]$. Donc

$$\int_0^2 |t^2 - 3t + 2| dt = \int_0^1 (t^2 - 3t + 2) dt + \int_1^2 (t^2 - 3t + 2) - dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_0^1 - \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_1^2 = \boxed{1}$$

4) On intègre deux fois par parties, en dérivant chaque fois la partie polynomiale (les fonctions adéquates sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$...) :

$$\int_0^x t^2 \cos(t) dt = [t^2 \sin(t)]_0^x - \int_0^x 2t \sin(t) dt = x^2 \sin(x) + [2t \cos(t)]_0^x - \int_0^x 2 \cos(t) dt = \boxed{x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x)}$$

5) On intègre par parties, en dérivant la partie polynomiale (les fonctions adéquates sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$...) :

$$\int_0^4 te^t dt = [te^t]_0^4 - \int_0^4 e^t dt = 4e^4 - [e^t]_0^4 = \boxed{1 + 3e^4}$$

Exercice 7. 1) La fonction

$$t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$, le changement de variable est donc valide.

Puis,

$$du = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt = \frac{1+u^2}{2} dt, \quad \text{donc} \quad dt = \frac{2du}{1+u^2}.$$

Et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin(t) = \sin\left(2\frac{t}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{t}{2}\right) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

Or, $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, donc

$$\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{1+u^2}, \quad \text{et donc} \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Donc

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin(t)} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1+u^2}{2u} \frac{2du}{1+u^2} = [\ln|u|]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\frac{\ln(3)}{2}}.$$

2) La fonction

$$t \mapsto t^3$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[1, 2]$ sur $[1, 8]$, le changement de variable est donc valide.

Puis, $du = 3t^2 dt$, et

$$\frac{dt}{t(t^3+1)} = \frac{t^2 dt}{t^3(t^3+1)},$$

donc

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dt}{t(t^3+1)} &= \int_1^8 \frac{du}{3u(u+1)} \\ &= \frac{1}{3} \int_1^8 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \frac{1}{3} [\ln|u| - \ln|u+1|]_1^8 \\ &= \frac{\ln(8) - \ln(9) + \ln(2)}{3} \\ &= \boxed{\frac{4\ln(2) - 2\ln(3)}{3}} \end{aligned}$$

3) La fonction

$$t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\sqrt{2}, 2]$ (ce n'est pas évident !) car pour tout $t \in [\sqrt{2}, +\infty[$,

$$t^2 - 1 \geq 1 > 0.$$

Le changement de variable est donc valide.

Puis, $du = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt$, et

$$\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{t^2} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt = \frac{1}{u^2+1} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt.$$

Donc

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_1^3 \frac{du}{u^2+1} = [\arctan(u)]_1^3 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{12}}.$$

Exercice 8. 1) La fonction $\tan$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\tan^n$ aussi. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe (intégrale d'une fonction continue sur le segment formé par les bornes d'intégration). On a

$$\tan \geq 0$$

sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tan^n \geq 0$$

sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Comme $0 < \frac{\pi}{4}$, par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \geq 0.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\tan^n(t)}_{\geq 0} (\underbrace{\tan(t) - 1}_{\leq 0}) dt \leq 0$$

par croissance de l'intégrale (« les bornes sont dans le bon sens »), car pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, par croissance de la fonction $\tan$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a

$$0 = \tan(0) \leq \tan(t) \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Donc la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

La suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante et minorée par 0, donc convergente (théorème de la limite monotone).

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale,

$$u_{n+2} + u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) (\underbrace{\tan^2(t) + 1}_{=\tan'(t)}) dt = \left[\frac{1}{n+1} \tan^{n+1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}.$$

Par décroissance de la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n+1} = u_{n+2} + u_n \leq 2u_n \leq u_n + u_{n-2} = \frac{1}{n-1}.$$

En multipliant par n et en utilisant le théorème des gendarmes, on en déduit

$$2nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \quad \text{donc} \quad \boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}.$$

Exercice 9. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors la fonction polynomiale P est continue sur $[0, 1]$.

Si la fonction polynomiale P était la fonction nulle sur $[0, 1]$, alors le polynôme P aurait une infinité de racines, donc serait le polynôme nul. Donc $P \neq 0$ assure que la fonction polynomiale P n'est pas la fonction nulle sur $[0, 1]$. Enfin, la fonction polynomiale P est de signe constant.

Donc, par stricte positivité de l'intégrale,

$$\int_0^1 P(x) dx \neq 0$$

(> 0 si $P > 0$, < 0 si $P < 0$, car « les bornes sont dans le bon sens »).

Exercice 10. Comme les fonctions

$$f \quad \text{et} \quad t \mapsto -i \frac{e^{ist}}{s}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ (pour $s \in \mathbb{R}_+^*$), de dérivées respectives

$$f' \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{ist},$$

en intégrant par parties, on a

$$\int_a^b f(t)e^{ist} dt = \left[-if(t)\frac{e^{ist}}{s} \right]_a^b - \int_a^b -if'(t)\frac{e^{ist}}{s} dt = \frac{i}{s} \left(f(a)e^{ia} - f(b)e^{ib} + \int_a^b f'(t)e^{ist} dt \right).$$

Or, comme $a < b$, par inégalité triangulaire généralisée, on a

$$\left| \int_a^b f'(t)e^{ist} dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)||e^{ist}| dt = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Puis, par inégalité triangulaire classique, on a

$$0 \leq \left| \int_a^b f(t)e^{ist} dt \right| \leq \frac{1}{|s|} \left(|f(a)||e^{ia}| + |f(b)||e^{ib}| + \left| \int_a^b f'(t)e^{ist} dt \right| \right) \leq \frac{1}{|s|} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right).$$

Or, cette majoration est de la forme $\frac{K}{|s|}$ avec K constante (ne dépend pas de s), donc tend vers 0 si $s \rightarrow +\infty$.

Donc, par le théorème des gendarmes, on a bien

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)e^{ist} dt = 0.$$

Exercice 11. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $I(n, p)$ existe car c'est l'intégrale sur un segment d'un polynôme, qui est donc continue sur le segment en question.

1) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors les fonctions

$$x \mapsto -\frac{(1-x)^{p+1}}{p+1} \quad \text{et} \quad x \mapsto (1+x)^n$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$, de dérivées respectives

$$x \mapsto (1-x)^p \quad \text{et} \quad x \mapsto n(1+x)^{n-1},$$

donc par intégration par parties, on a

$$I(n, p) = \left[-\frac{(1-x)^{p+1}}{p+1} (1+x)^n \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -\frac{(1-x)^{p+1}}{p+1} n(1+x)^{n-1} dx = \frac{n}{p+1} I(n-1, p+1).$$

2) Montrons, par récurrence sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mathbb{N}$:

$$I(n, p) = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(p+1)(p+2) \dots (p+k)} I(n-k, p+k).$$

Initialisation : pour $k = 1$,

$$\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(p+1)(p+2) \dots (p+k)} I(n-k, p+k) = \frac{n}{p+1} I(n-1, p+1) = I(n, p)$$

par la question précédente. D'où l'initialisation.

Hérédité : soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, supposons

$$I(n, p) = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(p+1)(p+2) \dots (p+k)} I(n-k, p+k).$$

Alors, la question précédente donne

$$I(n-k, p+k) = \frac{n-k}{p+k+1} I(n-k-1, p+k+1)$$

(en remplaçant n par $n-k$ et p par $p+k$, ce qui est possible, car $n-k \in \mathbb{N}^*$, et car $p+k \in \mathbb{N}$). En reportant, on a alors

$$\begin{aligned} I(n, p) &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(p+1)(p+2) \dots (p+k)} \frac{n-k}{p+k+1} I(n-k-1, p+k+1) \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n-(k+1)-1)}{(p+1)(p+2) \dots (p+k)(p+(k+1))} I(n-(k+1), p+(k+1)) \end{aligned}$$

d'où l'hérédité.

Conclusion : on a bien, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$I(n, p) = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(p+1)(p+2) \dots (p+k)} I(n-k, p+k).$$

Donc, si $k = n$, on obtient l'égalité

$$I(n, p) = \frac{n!}{(p+1) \dots (p+n)} I(0, p+n) = \frac{n!p!}{(n+p)!} I(0, p+n).$$

Or,

$$I(0, p+n) = \int_{-1}^1 (1-x)^{p+n} dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+p+1}}{n+p+1} \right]_{-1}^1 = \frac{2^{n+p+1}}{n+p+1}.$$

En reportant, on a bien l'égalité voulue.

Exercice 12. 1) Faisons le changement de variable (affine) $u = -t$: pour tout réel $x \in]-a, a[$,

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^{-x} f(-u) (-du) = - \int_0^{-x} f(-u) du.$$

- Si la fonction f est paire, alors pour tout $x \in]-a, a[$,

$$F(x) = - \int_0^{-x} f(u) du = -F(-x),$$

donc la fonction F est impaire.

- Si la fonction f est impaire, alors pour tout $x \in]-a, a[$,

$$F(x) = \int_0^{-x} f(u) du = F(-x),$$

donc la fonction F est paire.

Remarque. On peut aussi dériver : la fonction f est continue sur l'intervalle $] -a, a[$ (et $0 \in] -a, a[$), donc la fonction F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0 (par le théorème fondamental de l'analyse), donc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -a, a[$ et $F' = f$.

Posons alors

$$g : x \in] -a, a[\mapsto F(x) + F(-x).$$

Alors, par composition de la fonction F avec un polynôme (ici $x \mapsto -x$) puis par addition, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -a, a[$, et pour tout $x \in] -a, a[$,

$$g'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x).$$

Donc, si la fonction f est paire, $g' = 0$ sur **l'intervalle** $] -a, a[$, et alors la fonction g est constante sur $] -a, a[$. Comme

$$g(0) = 2F(0) = 0,$$

on a alors $g = 0$ sur $] -a, a[$, donc la fonction F est impaire.

Posons enfin

$$h : x \in] -a, a[\mapsto F(x) - F(-x).$$

Alors, par composition de la fonction F avec un polynôme (ici $x \mapsto -x$) puis par soustraction, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -a, a[$, et pour tout $x \in] -a, a[$,

$$h'(x) = F'(x) - (-1)F'(-x) = f(x) + f(-x).$$

Donc, si la fonction f est impaire, $h' = 0$ sur **l'intervalle** $] -a, a[$, et alors h est constante sur $] -a, a[$. Comme

$$h(0) = F(0) - F(0) = 0,$$

on a alors $h = 0$ sur $] -a, a[$, donc la fonction F est paire.

La réciproque est vraie : comme la fonction f est continue sur l'intervalle $] -a, a[$ (et $0 \in] -a, a[$), alors la fonction F est une primitive de f sur $] -a, a[$ (par le théorème fondamental de l'analyse). Or

$$F \text{ paire} \Rightarrow F' = f \text{ impaire} \quad \text{et} \quad F \text{ impaire} \Rightarrow F' = f \text{ paire.}$$

2) ★ Faisons le changement de variable affine $u = t + T$ (avec $du = dt$) :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(u-T)du = \int_{a+T}^{b+T} f(u)du$$

car, la fonction f étant T -périodique,

$$f(u) = f(u - T + T) = f(u - T)$$

pour tout réel $u \in \mathbb{R}$.

Remarque. Là aussi, on peut raisonner par dérivation, mais ce n'est pas ce qu'il y a de plus utile à faire !

★ Par la relation de Chasles,

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt.$$

Par le point précédent, on a

$$\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(t)dt = - \int_a^0 f(t)dt,$$

et donc en reportant, on a bien

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Remarque. Par contre, ici la dérivation permet de conclure rapidement : la fonction f est continue sur l'intervalle $] -a, a[$, donc il existe F primitive de f sur $] -a, a[$ (ce peut-être la fonction F de la question 1, mais pas forcément). Alors la fonction

$$g : a \in \mathbb{R} \mapsto \int_a^{a+T} f(t)dt = [F(t)]_a^{a+T} = F(a+T) - F(a)$$

est dérivable sur $] -a, a[$ (par composition de la fonction F avec un polynôme (ici $a \mapsto a+T$) puis par soustraction), et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$g'(a) = F'(a+T) - F'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$$

(car la fonction f est T -périodique). Donc $g' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc la fonction g est constante, et donc pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$g(a) = g(0), \quad \text{autrement dit} \quad \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Exercice 13. Soit

$$F : x \mapsto \int_2^x \frac{\ln(t)}{t + i\sqrt{t^3 + 1}} dt.$$

Comme la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t + i\sqrt{t^3 + 1}}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur qui ne s'annule jamais (en effet, si la partie réelle du dénominateur est nulle, donc $t = 0$, alors sa partie imaginaire vaut 1) (et on a bien $t^3 + 1 \geq 0$ pour tout $t > 0$), et que $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle contenant 2, par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Et

$$F(2) = 0.$$

Donc par définition de la dérivée en 2,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x \frac{\ln(t)}{t + i\sqrt{t^3 + 1}} dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} = F'(2) = f(2) = \frac{\ln(2)}{2 + i\sqrt{2^3 + 1}} = \boxed{\frac{\ln(2)}{2 + 3i}}.$$

Exercice 14. 1) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , donc la fonction f' est continue sur I .

La fonction f est à valeurs dans $\mathbb{U}$ (le cercle unité), donc ne s'annule jamais, donc le quotient de f' par f est une fonction continue sur I .

Comme de plus $a \in I$ et I est un intervalle, le théorème fondamental de l'analyse donne que la fonction g est bien définie et est une primitive de la fonction

$$\frac{f'}{f}$$

sur I , donc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (et pour tout $x \in I$, $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$).

2) On dérive un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: pour tout $x \in I$,

$$h'(x) = f'(x) \exp(-g(x)) - \underbrace{g'(x)f(x)}_{=f'(x)} \exp(-g(x)) = 0.$$

Comme c'est vrai pour tout x de l'intervalle I , on en déduit que la fonction h est une constante.

Or,

$$g(a) = ib \quad \text{et} \quad f(a) = e^{ib}$$

par définition de b , donc $h(a) = 1$, donc

$$\boxed{h = 1}.$$

3) On a donc pour tout $x \in I$,

$$f(x) = e^{g(x)}.$$

Alors, si pour tout $x \in I$, on note

$$g(x) = \phi(x) + i\theta(x)$$

où ϕ et ψ sont les fonctions partie réelle et imaginaire respectivement de g (qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ car la fonction g l'est), pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = e^{\phi(x)} e^{i\theta(x)},$$

avec la fonction $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que, pour tout $x \in I$,

$$|f(x)| = e^{\phi(x)}$$

car $\theta(x) \in \mathbb{R}$, et comme la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{U}$,

$$|f(x)| = 1,$$

ce qui donne $e^{\phi(x)} = 1$ (donc $\phi(x) = 0$) et donc

$$f(x) = e^{i\theta(x)}.$$

Exercice 15. 1) • La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$$

est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Puis, pour $x \in]0, 1[$, on a $0 < x < 1$ donc

$$0 < x^2 < x < 1,$$

donc la fonction g est continue sur $[x^2, x]$ (car $[x^2, x] \subset]0, 1[$), donc $f(x)$ existe. Et pour $x \in]1, +\infty[$, on a

$$1 < x < x^2,$$

donc g est continue sur $[x, x^2]$ (car $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$), donc $f(x)$ existe.

Donc la fonction f est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Il ne peut pas être défini ailleurs, car la fonction g n'existe pas sur les négatifs, donc $x < 0$ est impossible. Et $x = 1$ est impossible aussi, car la fonction g ne peut être intégrée sur $[1, 1]$ (elle n'existe pas en 1).

On peut par contre prolonger la fonction g par continuité en 0 (en posant $g(0) = 0$), et on verra alors que l'on pourra prolonger f par continuité en 0.

Donc pour le moment,

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[}.$$

- Pour $x \in]0, 1[$, on a $x^2 < x$, et pour $t \in [x^2, x]$, $\ln(t) < 0$. Donc, par croissance de l'intégrale, les bornes étant « dans le bon sens »,

$$-f(x) = \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln(t)} \leq 0$$

(et même < 0 par stricte positivité de l'intégrale, car la fonction g est continue non nulle sur $[x^2, x]$). Donc

$$f(x) \geq 0$$

(et même $f(x) > 0$).

Pour $x \in]1, +\infty[$, on a $x < x^2$, et pour $t \in [x, x^2]$, $\ln(t) > 0$. Donc, par croissance de l'intégrale, les bornes étant « dans le bon sens »,

$$f(x) \geq 0$$

(et même > 0 par stricte positivité de l'intégrale, car la fonction g est continue non nulle sur $[x, x^2]$). Donc

$$f(x) \geq 0$$

(et même $f(x) > 0$).

- Pour la limite, deux approches différentes :

★ Une méthode propre à cet exercice : on sait que pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\ln(t) \leq t - 1 \leq t$$

(cela se montre facilement par une étude de fonction). Donc, pour $x \in]1, +\infty[$, pour tout $t \in [x, x^2]$, on a

$$0 < \ln(t) \leq t, \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{t}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a (puisque $x \leq x^2$) :

$$f(x) \geq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} = \ln(x^2) - \ln(x) = \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

★ Une méthode plus générale : on cherche à encadrer directement l'intégrale : pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $1 < x < x^2$, donc pour $t \in [x, x^2]$, on a

$$1 < x \leq t \leq x^2$$

(on part de la seule chose que l'on sait : la variable d'intégration est encadrée par les bornes d'intégration), donc par stricte croissance de $\ln$, on a

$$0 < \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x^2),$$

et comme la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{\ln(x)} \geq \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{\ln(x^2)}.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $t \in [x, x^2]$ et que $x < x^2$, la croissance de l'intégrale donne :

$$\frac{x^2 - x}{\ln(x)} = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(x)} \geq f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \geq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(x^2)} = \frac{x^2 - x}{\ln(x^2)} = \frac{x^2 - x}{2 \ln(x)}$$

On conclut par le théorème des gendarmes, en remarquant que

$$\frac{x^2 - x}{2 \ln(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2 \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

(croissance comparée).

2) • La fonction g , prolongée par continuité en 0, est continue sur l'intervalle $]0, 1[$, donc il existe G primitive de g sur cet intervalle. Alors, pour tout $x \in]0, 1[$, comme x et $x^2 \in]0, 1[$, on a

$$f(x) = [G(t)]_x^{x^2} = G(x^2) - G(x).$$

Or, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ (comme primitive d'une fonction continue) sur $]0, 1[$, donc par composition avec un polynôme puis soustraction, la fonction f aussi.

Plus précisément, la fonction

$$x \mapsto G(x^2) - G(x)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$ (*on remarquera que la borne est fermée en 0*), et coïncide avec la fonction f sur $]0, 1[$. Donc on peut prolonger la fonction f de manière $\mathcal{C}^1$ en 0, en posant

$$f(0) = G(0^2) - G(0) = 0.$$

On le fera dans la suite.

• La fonction g est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$, donc il existe G primitive de g sur cet intervalle. Alors, pour tout $x \in]1, +\infty[$, comme x et $x^2 \in]1, +\infty[$, on a

$$f(x) = [G(t)]_x^{x^2} = G(x^2) - G(x).$$

Or, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ (comme primitive d'une fonction continue) sur $]1, +\infty[$, donc par composition avec un polynôme puis soustraction, la fonction f aussi.

Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son nouveau domaine de définition

$$\mathcal{D}_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[,$$

et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)} & \text{si } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\\ -g(0) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Sur $]0, 1[$,

$$f' > 0,$$

puis

$$f'(0) = 0,$$

donc la fonction f est strictement croissante sur $[0, 1[$. Sur $]1, +\infty[$,

$$f' > 0,$$

donc la fonction f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

Remarque. Si on montre que la fonction f se prolonge par continuité en 1, on pourra alors conclure que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

3) ★ Pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, l'intégrale

$$h(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$$

existe (de même qu'à la question 1), et on peut la calculer :

$$h(x) = [\ln |\ln(t)|]_x^{x^2} = \ln \left| \frac{\ln(x^2)}{\ln(x)} \right| = \ln(2).$$

Puis, pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$,

$$f(x) - h(x) = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \ln(t)} dt.$$

Or, si on pose

$$\phi : t \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\mapsto \frac{t-1}{t \ln(t)},$$

la fonction ϕ est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et se prolonge par continuité en 1 en posant $\phi(1) = 1$, car

$$\ln(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} t - 1.$$

La fonction ϕ ainsi prolongée est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, par conséquent (par le théorème fondamental de l'analyse), il existe Φ primitive de ϕ sur $]0, +\infty[$, et donc pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$,

$$f(x) - h(x) = \Phi(x^2) - \Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \Phi(1) - \Phi(1) = 0$$

par **continuité de la fonction Φ en 1**. Et donc, comme la fonction h a une limite en 1, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \ln(2).$$

On peut donc prolonger la fonction f par continuité en 1 en posant

$$\boxed{f(1) = \ln(2)}.$$

Autre méthode : on encadre :

- si $x \in]1, +\infty[$, on a $x^2 > x > 1$, et pour $t \in [x, x^2]$, on a

$$0 < x \leq t \leq x^2,$$

donc (la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$),

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x^2}.$$

Comme $\ln(t) > 0$ (car $t \geq x > 1$), on a

$$\frac{1}{x \ln(t)} \geq \frac{1}{t \ln(t)} \geq \frac{1}{x^2 \ln(t)}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $t \in [x, x^2]$, et ayant $x < x^2$, on a alors par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{x} f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{x \ln(t)} \geq \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln |\ln(t)|]_x^{x^2} = \ln(2) \geq \int_x^{x^2} \frac{dt}{x^2 \ln(t)} = \frac{1}{x^2} f(x)$$

que l'on réécrit

$$x^2 \ln(2) \geq f(x) \geq x \ln(2).$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln(2)$$

(puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 \ln(2) = \ln(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} x \ln(2) = \ln(2)$).

- Pour $x \in]0, 1[$, on a $0 < x^2 < x < 1$, et pour tout $t \in [x^2, x]$, on a

$$0 < x^2 \leq t \leq x,$$

donc (la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$),

$$\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x}.$$

Comme $\ln(t) < 0$ (car $t \leq x < 1$), on a

$$\frac{1}{x^2 \ln(t)} \leq \frac{1}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{x \ln(t)}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $t \in [x^2, x]$, et $x > x^2$, on a alors par croissance de l'intégrale,

$$-\frac{1}{x^2}f(x) = \int_{x^2}^x \frac{dt}{x^2 \ln(t)} \leq \int_{x^2}^x \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln |\ln(t)|]_{x^2}^x = -\ln(2) \leq \int_{x^2}^x \frac{dt}{x \ln(t)} = -\frac{1}{x}f(x)$$

que l'on réécrit

$$x \ln(2) \geq f(x) \geq x^2 \ln(2).$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln(2)$$

(puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 \ln(2) = \ln(2)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} x \ln(2) = \ln(2)$).

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(2),$$

on peut donc prolonger f par continuité en 1 en posant

$$\boxed{f(1) = \ln(2)}.$$

★ Puis, la fonction f (une fois prolongée) est continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$, et pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1.$$

Donc, le théorème de prolongement de la dérivée s'applique : on en déduit que la fonction f est $\mathcal{C}^1$ en 1 et

$$\boxed{f'(1) = 1}.$$

Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln(x)} & \text{pour } x > 0 \text{ avec } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

4) Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (donc la fonction f' est continue sur $\mathbb{R}_+$, et f est une primitive de f'), on a pour tout réel $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt.$$

Comme $f(0) = 0$ et $f'(t) = \frac{t-1}{\ln(t)}$ (sauf en 1 et 0 où l'on prolonge par continuité), on peut écrire, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f(x) = \int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)} dt.$$

Remarque. Si l'on n'a pas fait l'étude de f en 0 : on va montrer « à la main » que la fonction f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Pour tout $x \in]0, 1[$, on a $x^2 \leq x$, donc pour tout $t \in [x^2, x]$, on a

$$0 < x^2 \leq t \leq x < 1.$$

Par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$, on a alors

$$\ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0.$$

La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty, 0[$, donc on a

$$\frac{1}{\ln(x^2)} \geq \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{\ln(x)}.$$

Cette inégalité est vraie pour tout $t \in [x^2, x]$, et $x^2 \leq x$, donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x^2)} dt \geq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt = -f(x) \geq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x)} dt.$$

Les deux intégrales qui encadrent se calculent directement (intégrale d'une constante), ce qui donne

$$\frac{x - x^2}{\ln(x^2)} \geq -f(x) \geq \frac{x - x^2}{\ln(x)}.$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x^2}{\ln(x^2)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x^2}{\ln(x)} = 0,$$

le théorème des gendarmes donne que $-f$ a une limite en 0, et que

$$\lim_{x \rightarrow 0} -f(x) = 0, \quad \text{soit} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Donc la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant

$$f(0) = 0.$$

La fonction f ainsi prolongé est alors continue sur $[0, 1[$, dérivable sur $]0, 1[$, avec

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\ln(x)}$$

pour tout $x \in]0, 1[$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{\ln(x)} = 0,$$

le théorème de la limite de la dérivée s'applique et donne que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, avec

$$f'(0) = 0.$$

5) On a

$$\int_0^1 \frac{t - 1}{\ln(t)} dt = f(1) = \boxed{\ln(2)}.$$

Exercice 16. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{e^{-(xt)^2}}{t}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, comme composition de la fonction $\exp$ et d'un polynôme, puis quotient avec un polynôme qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ existe (on intègre la fonction précédente sur un segment où elle y est continue).

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Faisons le changement de variable affine $u = xt$ (avec $du = xdt$), qui est possible car $x \neq 0$:

$$f(x) = \int_x^{x^2} e^{-u^2} \frac{x}{u} \frac{du}{x} = \int_x^{x^2} \frac{e^{-u^2}}{u} du.$$

Or, la fonction

$$g : u \mapsto \frac{e^{-u^2}}{u}$$

est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc (par le théorème fondamental de l'analyse) admet une primitive G sur $]0, +\infty[$ (donc $G' = g$), et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = [G(u)]_x^{x^2} = G(x^2) - G(x).$$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée puis différence de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = 2x \frac{e^{-x^4}}{x^2} - \frac{e^{-x^2}}{x} = \boxed{\frac{2e^{-x^4} - e^{-x^2}}{x}}.$$

Exercice 17. ★ L'intégrale a du sens pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, car la fonction

$$t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^3}$$

est continue sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, le segment de bornes x et $3x$ est inclus dans $\mathbb{R}^*$.

Puis,

$$\frac{1 - \cos(t)}{t^3} = \frac{1}{2t} + o_{t \rightarrow 0}(1),$$

donc la fonction

$$f : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^3} - \frac{1}{2t}$$

se prolonge par continuité en 0 en posant

$$f(0) = 0,$$

et devient donc une fonction continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Donc (par le théorème fondamental de l'analyse), il existe F primitive de f sur $\mathbb{R}$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_x^{3x} \left(\frac{1 - \cos(t)}{t^3} - \frac{1}{2t} \right) dt = [F(t)]_x^{3x},$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_x^{3x} \frac{1 - \cos(t)}{t^3} dt &= \int_x^{3x} \frac{1}{2t} dt + F(3x) - F(x) \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(t) \right]_x^{3x} + F(3x) - F(x) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3x}{x}\right) + F(3x) - F(x) \\ &= \frac{\ln(3)}{2} + F(3x) - F(x) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3)}{2} + F(0) - F(0) = \boxed{\frac{\ln(3)}{2}} \end{aligned}$$

car la fonction F est continue en 0.

★ L'intégrale a du sens pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x \neq 1$, car la fonction

$$t \mapsto \frac{t - 1}{\ln^2(t)}$$

est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x \neq 1$, le segment de bornes x et x^2 est inclus dans $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ (si $x > 1$, alors $x^2 > x > 1$ et donc $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$, et si $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < x < 1$ et donc $[x^2, x] \subset]0, 1[$).

Puis, en posant $t = 1 - x$, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{t-1}{\ln^2(t)} &= \frac{-x}{\ln^2(1-x)} \\
 &= \frac{-x}{\left(-x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right)^2} \\
 &= \frac{-x}{x^2 + x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\
 &= -\frac{1}{x} \frac{1}{1+x+o_{x \rightarrow 0}(x)} \\
 &= -\frac{1}{x} \left(1 - x + o_{x \rightarrow 0}(x)\right) \\
 &= -\frac{1}{x} + 1 + o_{x \rightarrow 0}(1)
 \end{aligned}$$

Donc, si on pose

$$g : t \mapsto \frac{t-1}{\ln^2(t)} + \frac{1}{1-t},$$

alors la fonction g se prolonge par continuité en 1 en posant

$$g(1) = 1,$$

et devient donc une fonction continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Donc, il existe G primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$ (théorème fondamental de l'analyse), et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x \neq 1$,

$$\int_x^{x^2} \left(\frac{t-1}{\ln^2(t)} + \frac{1}{1-t} \right) dt = [G(t)]_x^{x^2},$$

donc

$$\begin{aligned}
 \int_x^{x^2} \frac{t-1}{\ln^2(t)} dt &= \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt + G(x^2) - G(x) \\
 &= [\ln |t-1|]_x^{x^2} + G(x^2) - G(x) \\
 &= \ln \left| \frac{x^2-1}{x-1} \right| + G(x^2) - G(x) \\
 &= \ln |x+1| + G(x^2) - G(x) \\
 &\xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln(2) + G(1) - G(1) = \boxed{\ln(2)}
 \end{aligned}$$

car la fonction G est continue en 1.

Exercice 18. 1) • $E \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition.

• La fonction nulle ϕ est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi''(x) = 0$ et

$$(1+x^2)\phi(x) = (1+x^2) \cdot 0 = 0, \quad \text{donc} \quad \phi''(x) = (1+x^2)\phi(x).$$

Donc la fonction nulle est dans E .

• Soit f et g dans E , $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f + g)''(x) = \lambda f''(x) + g''(x) = \lambda((1+x^2)f(x)) + (1+x^2)g(x)$$

car les fonctions f et g sont dans E . Et donc, en factorisant par $(1+x^2)$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f + g)''(x) = (1+x^2)(\lambda f + g)(x).$$

Donc $\lambda f + g \in E$.

• Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2) Si u et v sont dans E , les fonctions u' et v' sont de classe $\mathcal{C}^1$, et donc la fonction $u'v - uv'$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par produit. On dérive alors : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(u'v - uv')'(x) = (u''v + u'v' - u'v' - uv'')(x) = u''(x)v(x) - u(x)v''(x).$$

Puis, comme les fonctions u et v sont dans E ,

$$u''(x) = (1+x^2)u(x) \quad \text{et} \quad v''(x) = (1+x^2)v(x),$$

donc

$$(u'v - uv')(x) = (1+x^2)u(x)v(x) - u(x)(1+x^2)v(x) = 0$$

(pour tout $x \in \mathbb{R}$). Comme on est sur $\mathbb{R}$ (qui est un **intervalle**), on en déduit bien que la fonction $u'v - uv'$ est constante.

3a) Par composition de la fonction $\exp$ et d'un polynôme, la fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} = xf(x), \quad \text{et} \quad f''(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + x^2e^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)f(x).$$

Donc $f \in E$.

3b) La fonction f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc continue) sur $\mathbb{R}$, donc la fonction

$$k : t \mapsto \frac{1}{f(t)^2}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc continue) sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$ (et $0 \in \mathbb{R}$), donc par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$K : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2}$$

est (définie sur $\mathbb{R}$ et est) la primitive de la fonction k qui s'annule en 0.

En particulier, la fonction K est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction

$$K' = k$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction K est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc, par produit, la fonction g est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Puis, $g = fK$ donne, en dérivant le produit :

$$g' = f'K + fK' = f'K + fk = f'K + \frac{1}{f}, \quad \text{puis} \quad g'' = f''K + f'K' - \frac{f'}{f^2} = f''K + f'k - f'k = f''K,$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g''(x) = f''(x) \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2} = (1+x^2)f(x) \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2} = (1+x^2)g(x)$$

car $f \in E$. Et donc $g \in E$.

4a) La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $\frac{h}{f}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (par quotient de telles fonctions), et

$$\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{h'f - hf'}{f^2}.$$

Or, d'après la question 2, comme h et $f \in E$, il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $h'f - hf' = \alpha$, et donc

$$\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{\alpha}{f^2} = \alpha k = \alpha K'.$$

Par conséquent, les fonctions $\frac{h}{f}$ et αK sont deux primitives de la fonction αk sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est un **intervalle**, donc il existe une constante $\beta \in \mathbb{R}$ avec

$$\frac{h}{f} = \alpha K + \beta, \quad \text{et donc} \quad h = \alpha f K + \beta f = \alpha g + \beta f.$$

Donc $h \in \text{Vect}(f, g)$, ce qui donne

$$E \subset \text{Vect}(f, g).$$

Comme f et $g \in E$ (et que E est un espace vectoriel), l'inclusion réciproque est vraie, et donc

$$E = \text{Vect}(f, g),$$

donc (f, g) est une famille génératrice de E .

4b) Il reste à voir que la famille (f, g) est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, si $\alpha g + \beta f = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha g(x) + \beta f(x) = 0,$$

donc évalué en $x = 0$ (comme $g(0) = 0$ et $f(0) = 1$), on a

$$\beta = 0,$$

donc $\alpha g = 0$, et comme la fonction g n'est pas la fonction nulle,

$$\alpha = 0.$$

Donc la famille (f, g) est libre, et donc c'est une base de E .

Remarque. La fonction g n'est pas la fonction nulle, car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{f(t)^2}$$

est continue et positive sur $\mathbb{R}$, n'est pas la fonction nulle sur $[0, x]$ (par exemple) - et même, ne s'annule jamais, car l'inverse d'un réel n'est jamais nul - et donc par stricte positivité de l'intégrale,

$$\int_0^x \frac{dt}{f(t)^2} > 0.$$

Puis, $f(x) > 0$, et donc

$$g(x) > 0.$$

Exercice 19. 1) Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, intégrons le cos dans l'intégration par parties (pour $\lambda \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt &= \left[f(t) \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} dt \\ &= \frac{f(b) \sin(\lambda b)}{\lambda} - \frac{f(a) \sin(\lambda a)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \end{aligned}$$

Puis, $\left| \frac{f(b) \sin(\lambda b)}{\lambda} \right| \leq \frac{|f(b)|}{\lambda}$ puisque $|\sin| \leq 1$. Or,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{|f(b)|}{\lambda} = 0,$$

donc le théorème des gendarmes donne que $\frac{f(b) \sin(\lambda b)}{\lambda}$ a une limite lorsque λ tend vers $+\infty$, et

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(b) \sin(\lambda b)}{\lambda} = 0.$$

De même,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(a) \sin(\lambda b)}{\lambda} = 0.$$

Puis : $|\sin| \leq 1$, donc par inégalité triangulaire généralisée et croissance de l'intégrale, car $a < b$,

$$\left| \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \int_a^b |f'(t) \sin(\lambda t)| dt \leq \int_a^b |f'(t)| dt = K.$$

Donc, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq \frac{1}{\lambda} \left| \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{K}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, par encadrement, $\frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt$ a une limite lorsque λ tend vers $+\infty$, qui vaut 0. En additionnant, on obtient bien la limite voulue.

2a) On a la formule trigonométrique : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b),$$

et en remplaçant b par $-b$ (et en utilisant que la fonction $\sin$ est impaire et la fonction $\cos$ paire), on a aussi

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b).$$

En additionnant ces deux formules, il vient

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a + b) + \cos(a - b).$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$2 \cos(kt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \cos\left(\frac{t}{2} + kt\right) + \cos\left(kt - \frac{t}{2}\right) = \cos\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) + \cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right).$$

La relation cherchée est donc

$$\boxed{\cos(kt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) + \cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right)}{2}}$$

2b) Pour tout $t \in [0, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a via la question précédente

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\frac{\cos\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) + \cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right)}{2} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{(-1)^k \cos\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) - (-1)^{k-1} \cos\left(\frac{(2k-1)t}{2}\right)}{2} \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{2} \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{(-1)^0}{2} \cos\left(\frac{2-1}{2}t\right) \end{aligned}$$

en reconnaissant une somme télescopique. C'est bien l'égalité voulue car $(-1)^0 = 1$.

2c) Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = (-1)^k \frac{\sin(k)}{k} = \int_0^1 (-1)^k \cos(kt) dt.$$

Donc par linéarité de l'intégrale, on a

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-1)^k \cos(kt) dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) dt.$$

Puis, à l'aide de la question précédente, on a l'égalité (en remarquant que $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ ne s'annule pas si $t \in [0, 1]$)

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

En intégrant cette égalité pour t variant entre 0 et 1, et par linéarité de l'intégrale, on obtient bien que

$$\sum_{k=1}^n u_k = \int_0^1 \left((-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \int_0^1 \frac{1}{2} dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}$$

3) Notons

$$f : t \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} \in \mathbb{R}.$$

C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $[0, 1]$ (comme inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annule pas sur l'intervalle considéré). En posant $\lambda = \frac{2n+1}{2}$, la première question montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 0.$$

On en déduit que la suite des sommes partielles de la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$$

converge (autrement dit que la série numérique converge), et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin(k)}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2} \right) = 0 - \frac{1}{2}$$

Exercice 20. Remarquons que, pour $n \in \mathbb{N}$, a_n existe, car la fonction

$$t \mapsto t^n \sqrt{1-t^2}$$

est définie et continue sur $[0, 1]$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ (car $1-t^2 \geq 0$ pour $t \in [0, 1]$).

1) • Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale,

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 t^n (t-1) \sqrt{1-t^2} dt,$$

or pour tout $t \in [0, 1]$,

$$t-1 \leq 0, \quad t^n \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{1-t^2} \geq 0,$$

donc

$$t^n (t-1) \sqrt{1-t^2} \leq 0.$$

Comme « les bornes sont dans le bon sens », la positivité de l'intégrale donne

$$a_{n+1} - a_n \leq 0.$$

C'est vrai pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donc la suite numérique $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• La fonction

$$x \mapsto \sin(x)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $[0, 1]$, avec $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, donc on peut appliquer le théorème de changement de variable de première année, et comme $dt = \cos(x)dx$, on a

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(x)| \cos(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

Le même changement de variable donne

$$a_1 = \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) |\cos(x)| \cos(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos^2(x) dx = \left[-\frac{\cos^3(x)}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Mais on n'est pas obligé : pour a_1 , on reconnaît directement une forme $u' \sqrt{u}$ (à constante près), et donc

$$a_1 = \left[-\frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$u_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1},$$

alors

$$u_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)a_{n+1}a_n,$$

et donc

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)(n+2)a_n((n+3)a_{n+1} - na_{n-1}) = 0$$

car $a_{n+1} = \frac{n}{n+3}a_{n-1}$ d'après la relation admise au début de l'énoncé (en l'évaluant en $n-1$ au lieu de n , ce qui est possible car on a $n-1 \geq 0$).

Donc la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien constante, et vaut

$$u_1 = 6a_1a_0 = \frac{\pi}{2}.$$

3) La suite numérique $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n.$$

Comme $a_n \geq 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (par application de la positivité de l'intégrale, comme à la première question), on peut multiplier par a_{n+1} , et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2}a_{n+1} \leq a_{n+1}^2 \leq a_{n+1}a_n.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2}a_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)} \quad \text{et} \quad a_{n+1}a_n = \frac{u_{n+1}}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

D'où :

$$\frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)} \leq a_{n+1}^2 \leq \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Par conséquent, en divisant par $\frac{\pi}{2(n+1)^3}$, on a

$$\frac{(n+1)^3}{(n+2)(n+3)(n+4)} \leq \frac{a_{n+1}^2}{\frac{\pi}{2(n+1)^3}} \leq \frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+3)}.$$

Les deux expressions encadrantes tendent vers 1 en l'infini, donc le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}^2}{\frac{\pi}{2(n+1)^3}} = 1,$$

soit l'équivalent

$$a_{n+1}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)^3}.$$

On peut prendre la racine carrée d'équivalents, et comme $a_{n+1} \geq 0$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), on en déduit

$$a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)^3}}.$$

Donc

$$\boxed{a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n^3}}}.$$

4) La série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt{\frac{1}{n^3}} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

converge (série de Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$) et est à termes positifs, donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

converge.

Remarque. Montrons les résultats des années d'avant :

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \int_0^1 t^{n+1} t \sqrt{1-t^2} dt$, or les fonctions

$$u : t \mapsto t^{n+1} \quad \text{et} \quad v : t \mapsto -\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$, de dérivées

$$u' : t \mapsto (n+1)t^n \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto t\sqrt{1-t^2},$$

le produit uv a une limite finie (nulle) en 1 (en fait, les deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, mais on n'a pas besoin de le vérifier ici), donc le théorème d'intégration par parties de PC s'applique : comme l'intégrale définissant a_{n+2} converge, on a

$$a_{n+2} = \left[-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}} t^{n+1} \right]_0^1 + (n+1) \int_0^1 t^n \frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{n+1}{3} \int_0^1 t^n (1-t^2) \sqrt{1-t^2} dt = \frac{n+1}{3} (a_n - a_{n+2})$$

Donc

$$(n+4)a_{n+2} = (n+1)a_n, \quad \text{puis} \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}a_n.$$

★ Pour tout $t \in [0, 1[$, on a

$$\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t}.$$

On utilise alors le DSE de la série géométrique :

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

valable pour tout $t \in]-1, 1[$, on a alors, pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sqrt{1-t^2}.$$

On veut alors intervertir série et intégrale. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n : t \mapsto t^n \sqrt{1-t^2}$$

est continue sur $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$. Et la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} t^n \sqrt{1-t^2}$$

converge pour tout $t \in [0, 1[$, de somme $\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$. Donc la série de fonctions

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

converge simplement sur $[0, 1[$, de somme la fonction

$$t \mapsto \sqrt{\frac{1+t}{1-t}},$$

qui est continue sur $[0, 1[$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 |t^n \sqrt{1-t^2}| dt = a_n$$

et la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

converge.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, qui donne directement

$$I := \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

(avec l'assurance que I est une intégrale convergente).

★ Pour calculer l'intégrale I , faisons le changement de variable $x = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$. La fonction

$$t \mapsto \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} = \sqrt{-1 + \frac{2}{1-t}}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]0, 1[$ (cela se voit directement à partir de la deuxième expression : si $0 < s < t < 1$, alors $0 < 1-t < 1-s < 1$, puis $1 < 2 < \frac{2}{1-s} < \frac{2}{1-t}$, puis $0 < -1 + \frac{2}{1-s} < -1 + \frac{2}{1-t}$, et on conclut par stricte croissance de la fonction racine carrée), va de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$, et

$$dx = \frac{\frac{2}{(1-t)^2}}{2\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}} dt, \quad \text{donc} \quad x dx = \frac{dt}{(1-t)^2},$$

or $x^2 + 1 = \frac{2}{1-t}$, donc

$$\frac{4x}{(x^2 + 1)^2} dx = dt,$$

ce qui donne par le théorème de changement de variable :

$$I = \int_1^{+\infty} x \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

(avec l'assurance que l'intégrale de droite converge, puisque l'intégrale I converge).

On intègre alors par parties : les fonctions

$$u : x \mapsto x \quad \text{et} \quad v : x \mapsto \frac{-2}{1+x^2}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivée

$$u' : x \mapsto 1 \quad \text{et} \quad v' : x \mapsto \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Puis,

$$u(x)v(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc le théorème d'intégration par parties s'applique : comme on sait que l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} u(x)v'(x)dx$$

converge, alors on a que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)dx = \int_1^{+\infty} -\frac{2}{x^2+1}dx$$

converge, et

$$I = \left[2x \frac{-1}{x^2+1} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\frac{2}{x^2+1}dx = 1 + [2 \arctan(x)]_1^{+\infty} = 1 + 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{1 + \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 21. On peut sans souci utiliser le théorème de convergence dominée (à condition de se placer sur $]0, 1[$!). Mais ici il y a plus simple : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \right| dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}$$

car « les bornes étant dans le bon sens », on peut utiliser l'inégalité triangulaire généralisée et la croissance de l'intégrale (et aussi car $1+x \geq 1$), et donc le théorème des gendarmes conclut :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} dx = 0}.$$

Exercice 22. On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \boxed{\ln(2)}$$

car on reconnaît une somme de Riemann pour la fonction continue

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

sur le segment $[0, 1]$.