

TD1 - SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1. Étudier la convergence des séries de terme général suivant :

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\frac{n^5}{2^n}$ | 7. $\ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right)$ | 13. $\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$ |
| 2. $\frac{4^n-n}{5^n+2n^3}$ | 8. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$ | 14. $(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ |
| 3. $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ | 9. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ | 15. $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ |
| 4. $\frac{\sin^3(n^2+1)}{n^2+n+1}$ | 10. $\frac{(-1)^n}{n+\ln(n)}$ | 16. $\frac{n!}{n^n}$ |
| 5. $\frac{\ln(n)}{n}$ | 11. $\sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$ | 17. $\frac{(2n)!}{n^n n!}$ |
| 6. $\frac{\sinh(n)}{\cosh(2n)}$ | 12. $\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ | 18. $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ |

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes (on pourra utiliser au besoin que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$) :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k}$ | 3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n}$ | 5. $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ |
| 2. $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right)$ | 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (utiliser (5)) |

Exercice 3. Soit $(a_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge. Qu'en est-il des séries de termes généraux suivants :

- | | | | | |
|------------|------------------------|----------------|-----------------|------------------------|
| 1. a_n^2 | 2. $\frac{a_n}{1+a_n}$ | 3. $\sin(a_n)$ | 4. $\sqrt{a_n}$ | 5. $\sqrt{a_{n+1}a_n}$ |
|------------|------------------------|----------------|-----------------|------------------------|

Exercice 4. Déterminer α et β tels que la série de terme général $\sqrt{n} + \alpha\sqrt{n+1} + \beta\sqrt{n+2}$ soit convergente. Lorsqu'elle converge, calculer sa somme.

Exercice 5. Soient pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, $I_n = \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n} - 2$ et $u_n = S_n - I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} + 2$.

1. Montrer que $S_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} I_n$.
2. Étudier la nature de la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, en déduire que (u_n) converge.

Exercice 6. Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$, puis étudier la série $\sum \frac{1}{S_n}$.

Exercice 7. Préciser la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, où $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$, en fonction des réels a et b .

Exercice 8. Préciser la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, où $u_n = \frac{\ln(1+a^{3n})}{a^n}$, en fonction du réel $a > 0$.

Exercice 9. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ puis calculer $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$.

Exercice 10 (Règle de Raabe-Duhamel). Soit (u_n) une suite de réels positifs et $\alpha > 0$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1. On pose $v_n = n^\alpha u_n$ et $w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$. Montrer que la série de terme général (w_n) est absolument convergente.
2. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$, puis conclure.

Exercice 11. Donner la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Même question avec $v_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Exercice 12. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$.

1. Montrer que pour tout n , $w_n = -\int_{n-1}^n (t - n + 1)f'(t)dt$.
2. En déduire que si f' est intégrable sur $[1, +\infty[$, la série des w_n est absolument convergente.
3. Application : montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$ diverge (*on admettra que la suite $(\sin(\ln(n)))_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge*).

Exercice 13. Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif α , la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3}.$$

Exercice 14. Montrer la convergence et calculer (*rappel* : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$) la somme de la série de terme général

$$1. \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(n-k)!}. \quad 2. \quad v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2}.$$

Exercice 15. Soit (u_n) une suite réelle définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

1. Étudier la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$.
3. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ (*on pourra montrer que $u_n^2 \sim u_n - u_{n+1}$*).
4. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Exercice 16. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(1) \leq u_n \leq 1$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leq (1 - \cos(1)) \sin^{n-1}(1)$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 17. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}n}}{n^\alpha}$.

1. Étudier la convergence de la série de terme général u_n si $\alpha > 1$ puis si $\alpha \leq 0$.
2. On suppose maintenant que $0 < \alpha \leq 1$. On pose $A_n = \sum_{k=1}^n e^{\frac{2i\pi}{7}k}$.
 - (a) Montrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}k}}{k^\alpha} = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$.
 - (c) En déduire la convergence de la série de terme général u_n .

Exercice 18. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. On lui associe une suite

$$(u_n) \text{ telle que pour } n \in \mathbb{N}, u_n = \prod_{k=0}^n \frac{x_k}{1+x_k}.$$

1. Démontrer que la suite (u_n) est monotone convergente, de limite λ telle que $\lambda \in [0, 1[$.
2. Que vaut λ lorsque pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = n + 1$?
3. Démontrer, en étudiant la suite $\ln(u_n)$, que $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow$ la série $\sum \frac{1}{x_k}$ est divergente.
4. Étudier le cas où la suite (x_n) est définie par $x_0 > 1$ et la relation $x_{n+1} = x_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$, et déterminer λ .

Exercice 19. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série absolument convergente, et $(a_{\phi(n)})$ une suite extraite de (a_n) . Montrer alors que $\sum_{n \geq 0} a_{\phi(n)}$ est une série absolument convergente.

Exercice 20 (CCP 2013 Officiel de la Taupe). Soit $u_n = \sum_{k=2}^n \ln^2(k)$ pour $n \geq 2$.

1. Montrer que $u_n \geq \ln^2(n)$, et en déduire que $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.
2. Montrer que $\int_1^n \ln^2(t) dt \leq u_n \leq \int_1^{n+1} \ln^2(t) dt$.
3. Calculer $\int_1^x \ln^2(t) dt$ et en déduire que, en $+\infty$, $\int_1^x \ln^2(t) dt \sim x \ln^2(x)$.
4. Trouver un équivalent de u_n , et déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$.

Exercice 21 (CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2). Montrer que $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 22. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série convergente mais pas absolument convergente (on dit qu'elle est semi-convergente). Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une réorganisation des termes de la série que sa somme fasse ℓ . Formellement, montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective telle que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{\varphi(n)} = \ell.$$

Indications :

- Soit (v_n) la suite des termes positifs de (u_n) (dans l'ordre) et (w_n) celle des termes négatifs. Que dire des séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$?
- Construire φ par récurrence.

Solutions

Exercice 1.

1. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{n^5}{2^n} = 0$$

par croissance comparée (car $2 > 1$). Ainsi

$$\frac{n^5}{2^n} = o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

or la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs.

Donc d'après le critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^5}{2^n}$ est absolument convergente, donc convergente.

Remarque. On peut aussi appliquer le critère de d'Alembert.

2. Comme $n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(4^n)$ et $2n^3 \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(5^n)$ (par croissance comparée, car $4 > 1$ et $5 > 1$), on a

$$\frac{4^n - n}{5^n + 2n^3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{4}{5} \right)^n.$$

Puis, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{4}{5} \right)^n$ est convergente (série géométrique de raison $\frac{4}{5}$ avec $\frac{4}{5} \in]-1, 1[$) et est à termes positifs.

Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{4^n - n}{5^n + 2n^3}$ est absolument convergente, donc convergente.

3. Comme $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, et que $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Puis, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente (Riemann) et à termes positifs.

Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ est divergente.

4. On sait $|\sin| \leq 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \left| \frac{\sin^3(n^2+1)}{n^2+n+1} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Puis, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$).

Donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin^3(n^2+1)}{n^2+n+1}$ est absolument convergente, donc convergente.

Remarque. Ici, on n'a pas précisé que $\frac{1}{n^2}$ est positif, car pour le critère de comparaison, c'est pas le majorant qui doit être positif, mais le terme majoré. Donc, ici, ce qui est important, c'est que $\left| \frac{\sin^3(n^2+1)}{n^2+n+1} \right|$ soit positif pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

5. La fonction $\ln$ est croissante sur $]0, +\infty[$, et $\ln(e) = 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq e$, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, on a

$$\ln(n) \geq 1, \quad \text{donc} \quad \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n} > 0.$$

Or, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente et à termes positifs.

Donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

6. On a

$$\frac{\sinh(n)}{\cosh(2n)} = \frac{e^n - e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{-n}$$

et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-n}$ est convergente (série géométrique de raison e^{-1} avec $e^{-1} \in]0, 1[- 1, 1[$) et à termes positifs.

Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sinh(n)}{\cosh(2n)}$ est absolument convergente, donc convergente.

7. On sait $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, donc

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right) &= \ln\left(1 + \left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1} - 1\right)\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1}\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1} \end{aligned}$$

car $\frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Puis,

$$\frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs.

Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

8. On a :

$$\begin{aligned} u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - e \\ &= \exp\left(n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) - e \\ &= \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - e \\ &= e \left(\exp\left(-\frac{1}{2n} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \\ &= -\frac{e}{2n} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} -\frac{e}{2n} \end{aligned}$$

Donc

$$-u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e}{2n},$$

et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e}{2n}$ est une série de Riemann divergente, et à termes positifs.

Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} -u_n$ diverge, donc, en multipliant par -1 , la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right]$$

diverge.

9. On utilise le DL $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + o_{u \rightarrow 0}(u)$, en mettant $\sqrt{n}$ en facteur pour utiliser $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) = \frac{1}{2\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq 0$$

et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente ($\frac{1}{2} \leq 1$) et à termes positifs.

Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ est divergente.

Remarque.

(a) On peut aussi passer par les sommes partielles ici, puisqu'elles sont télescopiques : pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^N (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{N+1} - \sqrt{0} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

(b) On peut aussi utiliser la quantité conjuguée : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

et de là,

- soit on dit

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

car

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + 1}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}},$$

- soit on dit

$$u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}},$$

et dans les deux cas, on conclut car la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (ou $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$) est une série de Riemann divergente, puisque $\frac{1}{2} \leq 1$, et à termes positifs.

10. Soit

$$f : x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{x + \ln(x)}$$

(bien définie car, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $x + \ln(x) \geq x \geq 1 > 0$), alors la fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$, et pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{1 + \frac{1}{x}}{(x + \ln(x))^2} \leq 0,$$

donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Donc la suite numérique

$$\left(\frac{1}{n + \ln(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} = (f(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$$

est décroissante. De plus, elle tend vers 0.

Enfin, $\frac{1}{n + \ln(n)} \geq 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc la série considérée est alternée.

Le critère des séries alternées s'applique, et donne que la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n + \ln(n)}$ est convergente.

11. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$, donc (par récurrence directe), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Puis :

Méthode 1 : On fait un DL : on a $\sin(u) = u + O(u^3)$, et $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc

$$\sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Puis,

- la série numérique $\sum_{n \rightarrow \infty} O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge absolument par le critère de domination des séries à termes positifs, car la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente (car $3 > 1$) et à termes positifs,
- et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, par application directe du critère des séries alternées (car la suite numérique $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien décroissante positive et tend vers 0).

Par addition, on en déduit que la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(n\pi + \frac{1}{n})$ converge.

Méthode 2 : • La suite numérique $(\sin(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante : la fonction $\sin$ est décroissante sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in I$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n},$$

par décroissance de la fonction sinus,

$$\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

- La suite numérique $(\sin(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 (car $\sin(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$, et car $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$).
- La suite numérique $(\sin(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs (car $\sin \geq 0$ sur I), donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(n\pi + \frac{1}{n})$ est alternée.
- Donc d'après le critère des séries alternées, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin(n\pi + \frac{1}{n})$ converge.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\ln(n)}{n} \geq 0,$$

donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ est alternée.

Étudions la décroissance possible de la suite numérique $(\frac{\ln(n)}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour cela, étudions la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}.$$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

On a donc $f'(x) \leq 0$ pour $x \geq e$, donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$. Donc la suite numérique

$$\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n \geq 3} = (f(n))_{n \geq 3}$$

est décroissante (on prend $n \geq 3$ pour que $n \geq e$).

Par croissance comparée, cette suite numérique tend vers 0.

Ainsi d'après le critère des séries alternées, la série numérique $\sum_{n \geq 3} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ est convergente, donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ aussi.

13. On utilise le DL $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + O(u^2)$, en mettant $\sqrt{n}$ en facteur pour utiliser $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}} - 1 \right) \\ &= \sqrt{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right) \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}_{v_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{w_n} \end{aligned}$$

Or

- d'après le critère des séries alternées, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge (la série numérique $(\frac{1}{2\sqrt{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien décroissante, tend vers 0, et est positive),
- et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} w_n$ est absolument convergente par critère de domination des séries à termes positifs (car la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$) et est à termes positifs).

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n} = v_n + w_n,$$

par addition de deux séries numériques convergentes, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.

14. Afin d'utiliser le critère des séries alternées, montrons que la suite numérique $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante, qui tend vers 0. Par la quantité conjuguée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Le résultat est alors direct.

Ainsi d'après le critère des séries alternées, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ est convergente.

Remarque. On peut aussi faire un DL :

$$\begin{aligned} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= (-1)^n \sqrt{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &= (-1)^n \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Puis,

- la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge par le critère des séries alternées,
- et la série numérique $\sum_{n \rightarrow \infty} O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ converge (absolument) par le critère de domination des séries à termes positifs, puisque la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série à termes positifs, et convergente (Riemann avec $\frac{3}{2} > 1$).

Par somme de séries numériques convergente, on conclut bien que la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ est convergente.

15. On utilise le DL $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + O(u^3)$, car $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right) - 1 = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{v_n} + \underbrace{\frac{-1}{8} \frac{1}{n}}_{w_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{z_n}.$$

Or

- la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ est convergente d'après le critère des séries alternées
- et la série numérique $\sum z_n$ est une série absolument convergente par le critère de domination des séries à termes positifs (car la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$) et est à termes positifs).

Si la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ était convergente, par combinaison linéaire, on aurait que la série numérique

$$\sum w_n = \sum u_n - \sum v_n - \sum z_n$$

serait convergente, ce qui est faux (Riemann).

Donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est divergente (bien qu'elle soit alternée!).

16. D'après la formule de Stirling, on a :

$$\frac{n!}{n^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} = 0$$

par croissance comparée (car $e > 1$), donc

$$\frac{n!}{n^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs.

Ainsi d'après le critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n}$ est absolument convergente, donc convergente.

17. D'après la formule de Stirling, on a :

$$\frac{(2n)!}{n^n n!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n)} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{n^n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2} 2^{2n}}{e^n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2} \left(\frac{4}{e}\right)^n$$

et $\sqrt{2} \left(\frac{4}{e}\right)^n$ est le terme général d'une série divergente (série géométrique de raison $\frac{4}{e} > 1$) et positif.

Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(2n)!}{n^n n!}$ est donc divergente.

Remarque. Ou, plus simplement, comme $\frac{4}{e} > 1$, $\sqrt{2} \left(\frac{4}{e}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, et donc on a divergence grossière.

18. D'après la formule de Stirling, on a :

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2^{2n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ est divergente (Riemann), et à termes positifs.

Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ est divergente.

Exercice 2. 1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k - 1} - \frac{1}{k}.$$

Donc, par somme télescopique, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - k} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k - 1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Ainsi on a la convergence de la série numérique (car la limite de ses sommes partielles **existe et est finie**), et

$$\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - k} = 1}.$$

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$, on a :

$$\ln \left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \right) = \ln(k) + \ln(k+2) - 2 \ln(k+1).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \right) &= \sum_{k=2}^n \ln(k) + \sum_{k=2}^n \ln(k+2) - 2 \sum_{k=2}^n \ln(k+1) \\ &\underset{\substack{i=k+2 \\ j=k+1}}{=} \sum_{k=2}^n \ln(k) + \sum_{\substack{i=4 \\ n+2}}^{\substack{n+2 \\ n+2}} \ln(i) - 2 \sum_{j=3}^{n+1} \ln(j) \\ &= \ln(2) + \ln(3) + \sum_{k=4}^n \ln(k) + \sum_{i=4}^n \ln(i) + \ln(n+1) + \ln(n+2) - 2 \ln(3) - 2 \sum_{j=4}^n \ln(j) - 2 \ln(n) \\ &= \ln(2) - \ln(3) + \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(2) - \ln(3) \end{aligned}$$

Donc la série numérique est convergente (car la limite de ses sommes partielles **existe et est finie**) et sa somme vaut

$$\boxed{\ln(2) - \ln(3)}.$$

3) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq n^2 \left| (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n} \right| \leq \frac{n^2}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(par croissance comparée, car $2 > 1$), donc le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left| (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n} \right| = 0, \quad \text{soit} \quad (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs, donc le critère de domination des séries à termes positifs donne que la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n}$ est absolument convergente donc convergente.

• La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{-e^i}{2}\right)^n$ converge absolument (c'est une série géométrique de raison $\frac{-e^i}{2}$ avec $\left|\frac{-e^i}{2}\right| = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$), donc en prenant la partie réelle de sa somme, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n} = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-e^i}{2}\right)^n \right).$$

Or, on a

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-e^i}{2}\right)^n = \frac{1}{1 + \frac{e^i}{2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\cos(1)}{2}\right) + i \frac{\sin(1)}{2}}$$

(somme d'une série géométrique).

En multipliant/divisant par le conjugué du dénominateur, on a :

$$S = \frac{\left(1 + \frac{\cos(1)}{2}\right) - i \frac{\sin(1)}{2}}{\left(1 + \frac{\cos(1)}{2}\right)^2 + \frac{\sin^2(1)}{4}} = \frac{\left(1 + \frac{\cos(1)}{2}\right) - i \frac{\sin(1)}{2}}{\frac{5}{4} + \cos(1)}.$$

En prenant la partie réelle, on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n)}{2^n} = \frac{4 + 2 \cos(1)}{5 + 4 \cos(1)}}.$$

4) On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{n^2}{n!} = 0, \quad \text{ainsi} \quad \frac{n^2}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puis, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs. Donc d'après le critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{n!}$ est absolument convergente, donc convergente. Puis,

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

car les deux sommes sont convergentes. Donc

$$S = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = \boxed{2e}$$

5) La série numérique $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2p+1)^2}$ converge absolument (donc converge), par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, car

$$\frac{1}{(2p+1)^2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4p^2},$$

et que la série numérique $\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^2}$ est une série convergente (Riemann, $2 > 1$) à termes positifs. Puis : pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} &= \sum_{\substack{1 \leq n \leq 2N \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{1 \leq n \leq 2N \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{1 \leq 2p \leq 2N} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{1 \leq 2p+1 \leq 2N} \frac{1}{(2p+1)^2} \\ &= \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2} + \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{p=1}^N \frac{1}{p^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}.$$

6) Puis, $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente (Riemann, $2 > 1$), donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.

Remarque. On peut aussi appliquer le critère des séries alternées...

Pour calculer la somme de la série, il suffit alors de calculer la limite des sommes partielles d'indice paire (par exemple) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{\substack{1 \leq n \leq 2N \\ n \text{ pair}}} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{\substack{1 \leq n \leq 2N \\ n \text{ impair}}} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= \sum_{1 \leq 2p \leq 2N} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{1 \leq 2p+1 \leq 2N} \frac{1}{(2p+1)^2} \\ &= \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2} - \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

(en réutilisant la série calculée en (5)). Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}.$$

Exercice 3. Comme la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est convergente, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$,

$$0 \leq a_n \leq 1$$

(car la suite numérique $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de termes positifs par hypothèse).

1. Avec le n_0 fixé précédemment, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$,

$$0 \leq a_n^2 \leq a_n \quad \text{car} \quad 0 \leq a_n \leq 1.$$

Comme la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge, d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2$ est convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + a_n \geq 1 > 0$, donc $\frac{a_n}{1+a_n}$ existe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \left| \frac{a_n}{1+a_n} \right| \leq a_n$$

car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ donc $1 + a_n \geq 1$. Donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{1+a_n}$ est convergente.

3. Comme $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a

$$\sin(a_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a_n.$$

Et $a_n \geq 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Comme la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin(a_n)$ est convergente.

4. On ne sait pas : par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{1}{n^2},$$

alors la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt{a_n}$ est divergente. Par contre, si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{n^4},$$

la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt{a_n}$ est convergente.

Et dans les deux cas, on a bien $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$ convergente...

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

(car $(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}})^2 \geq 0$, il suffit de développer...).

Puis, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge, donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1}$ converge aussi, et enfin par combinaison linéaire, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ converge.

Ainsi d'après le critère de comparaison des séries à terme positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ est convergente.

Exercice 4. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, un DL donne :

$$\begin{aligned} u_n := \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n+1} + \beta\sqrt{n+2} &= \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \beta\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}} \\ &= \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \beta\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (1 + \alpha + \beta)\sqrt{n} + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

Donc, si $1 + \alpha + \beta \neq 0$,

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (1 + \alpha + \beta)\sqrt{n},$$

et u_n ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.

Si $1 + \alpha + \beta = 0$ et $\beta + \frac{\alpha}{2} \neq 0$, alors

$$\frac{u_n}{\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann, $\frac{1}{2} \leq 1$) et est à termes positifs, donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}$ diverge, donc (en multipliant par la constante non nulle $\frac{\alpha}{2} + \beta$), la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

Si $1 + \alpha + \beta = 0$ et $\beta + \frac{\alpha}{2} = 0$, alors

$$u_n = o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

or la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$) et est à termes positifs, donc par le critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge (absolument).

Donc

la série converge si et seulement si $\left(1 + \alpha + \beta = 0 \text{ et } \frac{\alpha}{2} + \beta = 0\right)$,

c'est-à-dire si et seulement si

$$\boxed{\alpha = -2} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = 1}.$$

Puis,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) = \sum_{n=0}^{\infty} ((\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})).$$

On a donc une série télescopique et $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (quantité conjuguée). Ainsi

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) = \sqrt{0} - \sqrt{0+1} = -1.}$$

Exercice 5. 1) Remarquons que

$$I_n = 2\sqrt{n} - 2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} I_{n+1}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [k, k+1]$, on a

$$0 < k \leq t \leq k+1, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

(car la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$).

Alors, par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens »),

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} dt = \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

donc en sommant ces inégalités pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient (par relation de Chasles) :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dt \underset{\text{Chasles}}{\sim} \int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = I_{n+1} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}} \underset{p=k+1}{=} \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{p}} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1.$$

Donc $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ (car $S_n \geq I_{n+1} = 2\sqrt{n+1} - 2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$), et

$$1 \geq \frac{I_{n+1}}{S_n} \geq 1 + \frac{1}{S_n \sqrt{n+1}} - \frac{1}{S_n},$$

donc par théorème d'encadrement,

$$S_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} I_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} I_n.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + O_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\sqrt{n} \left(\frac{1}{2n} + O_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente (car $\frac{3}{2} > 1$) et à termes positifs. Donc le critère de domination des séries à termes positifs donne que la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (u_{n+1} - u_n)$$

converge absolument, donc converge.

Or, d'après le cours de PCSI, la convergence de la série télescopique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (u_{n+1} - u_n)$ est équivalente à la convergence de la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 6. Soit

$$f : t \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{t} \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est continue et croissante sur $[0, +\infty[$. On pourra s'aider d'un dessin pour mieux comprendre la suite de l'exercice.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [k-1, k]$ on a :

$$0 \leq k-1 \leq t \leq k, \quad \text{donc} \quad f(t) \leq f(k),$$

et pour tout $t \in [k, k+1]$ on a :

$$0 \leq k \leq t \leq k+1, \quad \text{donc} \quad f(k) \leq f(t).$$

Par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens »), on a alors

$$\int_{k-1}^k f(t)dt \leq \int_{k-1}^k f(k)dt = f(k) \quad \text{et} \quad f(k) = \int_k^{k+1} f(k)dt \leq \int_k^{k+1} f(t)dt$$

Donc, pour $N \in \mathbb{N}^*$, en sommant pour $k = 1$ à N , on a :

$$\sum_{k=1}^N \int_{k-1}^k f(t)dt \leq \sum_{k=1}^N f(k) = S_N \leq \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} f(t)dt$$

soit par la relation de Chasles :

$$\frac{2}{3}N^{\frac{3}{2}} = \int_0^N \sqrt{t}dt \leq S_N \leq \int_1^{N+1} \sqrt{t}dt = \underbrace{\frac{2}{3}((N+1)^{\frac{3}{2}} - 1)}_{n \rightarrow \infty \frac{2}{3}N^{\frac{3}{2}}}$$

Donc

$$S_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3}N^{\frac{3}{2}}$$

par le théorème des gendarmes.

Ainsi

$$\frac{1}{S_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{2} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$) et est à termes positifs, donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{S_n}$ est convergente.

Exercice 7. • Si $b > a$ (donc $n^a = \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} o(n^b)$), on a alors :

$$\frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^b} > 0,$$

et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^b}$ est à termes positifs, et convergente si et seulement si $b > 1$ (Riemann). Le critère d'équivalence des séries à termes positifs donne alors que

$$\text{la série numérique } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad b > 1.$$

• Si $a > b$ (donc $(-1)^n n^b = \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} o(n^a)$) : si $a \leq 0$, alors

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^a}$$

ne tend pas vers 0, donc il y a divergence grossière.

On suppose donc $a > 0$. On a alors (en faisant un DL, car $n^{b-a} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$) :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b} &= \frac{(-1)^n}{n^a} \frac{1}{1 + (-1)^n n^{b-a}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^a} \left(1 - (-1)^n n^{b-a} + \underset{n \rightarrow \infty}{o}(n^{b-a}) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a-b}} + \underset{n \rightarrow \infty}{o}\left(\frac{1}{n^{2a-b}}\right) \end{aligned}$$

Or la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^a}$ est convergente si $a > 0$ (par le critère des séries alternées, qui s'applique car la suite numérique $(\frac{1}{n^a})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante (car $a > 0$) et tend vers 0 (car $a > 0$)).

Puis,

$$\frac{1}{n^{2a-b}} + o\left(\frac{1}{n^{2a-b}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^{2a-b}} > 0,$$

or la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2a-b}}$ est à termes positifs, et converge si et seulement si $2a - b > 1$ (Riemann). Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{(-1)^n}{n^a} - u_n \right)$ converge si et seulement si $2a - b > 1$.

Par addition (d'une série convergente et d'une série divergente, ou bien de deux séries convergentes), on en déduit que

la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} -u_n$ converge $\Leftrightarrow 2a - b > 1$,

donc en multipliant par -1 , que

la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge $\Leftrightarrow 2a - b > 1$.

- Si $a = b$, u_n n'existe pas, car on a une division par 0 pour les n impairs.

Donc

la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$ est convergente $\Leftrightarrow \left((b > a \text{ et } b > 1) \text{ ou } (a > b \text{ et } a > 0 \text{ et } b < 2a - 1) \right)$.

Exercice 8. • Si $0 < a < 1$, $a^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc

$$\ln(1 + a^{3n}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a^{3n}, \quad \text{puis} \quad u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a^{2n} > 0.$$

Comme la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^{2n}$ est une série géométrique de raison a^2 avec $a^2 \in]0, 1[$, elle converge. Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.

- Si $a > 1$, $a^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, et donc

$$\ln(1 + a^{3n}) = \ln(a^{3n}) + \ln(a^{-3n} + 1) = \underbrace{3n \ln(a)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty} + \underbrace{\ln(a^{-3n} + 1)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 3n \ln(a),$$

donc

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3n \ln(a)}{a^n} > 0.$$

Notons $v_n = \frac{n}{a^n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{an} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \in]0, 1[,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge absolument, donc converge, et donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.

- Si $a = 1$, $u_n = \ln(2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et la série diverge donc grossièrement.

Exercice 9. Comme $\ln(1 + u) = u + \underset{u \rightarrow 0}{O}(u^2)$ et $\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{v_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{w_n}.$$

Or

- la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ est convergente d'après le critère des séries alternées (car la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et tend vers 0).
- Et la série numérique $\sum w_n$ est absolument convergente par le critère de domination (car la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs).

Ainsi la série numérique $\sum_{n \geq 2} u_n$ s'écrit comme la somme de deux séries convergentes, donc est convergente.

Calcul de la somme : Notons $(S_n)_{n \geq 2}$ la suite numérique des sommes partielles de la série numérique $\sum_{n \geq 2} u_n$. Regardons ce qu'il se passe pour les premiers termes :

$$S_3 = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$S_5 = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{2n} + u_{2n+1} = \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \ln \left(\frac{2n+1}{2n} \right) + \ln \left(\frac{2n}{2n+1} \right) = 0.$$

Donc la suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite nulle : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} u_k = \sum_{k=1}^n (u_{2k} + u_{2k+1}) = \sum_{k=1}^n 0 = 0,$$

elle converge donc vers 0.

Comme la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est convergente (car la série converge), elle a nécessairement la même limite que la suite extraite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$, donc la somme vaut

$$\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0}.$$

Exercice 10.

1. On fait un DL, compte tenu du fait que $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$\begin{aligned} w_n &= \ln \left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \right) + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \\ &= \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha \right) + \ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) + \ln \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= \frac{\alpha}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) - \frac{\alpha}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ &= O \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Or, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs.

Donc, d'après le critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

2. La série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n$ est convergente, or elle est télescopique, donc par le cours de PCSI, on en déduit que la suite $(\ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .

Donc, par continuité de la fonction exp en ℓ , on a

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^\ell > 0.$$

Notons alors $A = e^\ell$, on a bien $A > 0$, et

$$n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A.$$

Donc $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$ (car $A \neq 0$). Or la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ est à termes positifs, et converge si et seulement si $\alpha > 1$ (Riemann), et donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{A}{n^\alpha}$ est à termes positifs, et converge si et seulement si $\alpha > 1$ (car $A \neq 0$).

Donc, par critère d'équivalence des séries à termes positifs (car $A > 0$),

$$\text{la série numérique } \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Exercice 11. • Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie car il s'agit du reste d'une série de Riemann convergente ($2 > 1$).

On pose

$$f : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{t^2} \in \mathbb{R},$$

la fonction f est une fonction décroissante et continue sur $[1, +\infty[$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a

$$0 < k \leq t \leq k+1, \quad \text{donc} \quad f(t) \leq f(k),$$

et pour tout $t \in [k-1, k]$, on a

$$0 < k-1 \leq t \leq k, \quad \text{donc} \quad f(k) \leq f(t).$$

Alors, par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens »),

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k) \quad \text{et} \quad f(k) = \int_{k-1}^k f(k)dt \leq \int_{k-1}^k f(t)dt$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $N \geq n+1 \geq 2$, en sommant les inégalités précédentes (qui sont dans le même sens) pour k variant de $n+1$ à N , on a (par la relation de Chasles) :

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)dt \underset{\text{Chasles}}{=} \sum_{k=n+1}^N \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^N f(k) \leq \sum_{k=n+1}^N \int_{k-1}^k f(t)dt \underset{\text{Chasles}}{=} \int_n^N f(t)dt.$$

Puis on sait calculer une primitive de la fonction f :

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{n+1}^{N+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1}$$

et

$$\int_n^N f(t)dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_n^N = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}.$$

Comme on sait que la série définissant u_n converge, on a aussi

$$\sum_{k=n+1}^N f(k) = \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} u_n.$$

Par conséquent, en faisant tendre $N \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, et est à termes positifs. Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est divergente.

• Attention, ici on **ne** peut **pas** appliquer le même raisonnement que précédemment car on a une série alternée. Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien définie car c'est le reste d'une série absolument convergente (cf. le début de l'exercice).

Puis, la suite numérique

$$\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$$

est positive (donc la série définissant v_n est alternée), décroissante et tend vers 0, donc le critère des séries alternées s'applique. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |v_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

(la somme d'une série alternée est majorée, en valeur absolue, par la valeur absolue de son premier terme).

Or, la série numérique

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^2} \underset{k=n+1}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$$

est une série convergente (Riemann, $2 > 1$), donc le critère de comparaison des séries à termes positifs donne que la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 12. 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Intégrons par parties : les fonctions

$$f \quad \text{et} \quad t \mapsto (n-1-t)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, donc sur $[n-1, n]$ (car $n \geq 2$), et donc le théorème de PCSI s'applique :

$$\int_{n-1}^n (n-1-t)f'(t)dt = [(n-1-t)f(t)]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n -f(t)dt = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n) = w_n.$$

2) Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, par inégalité triangulaire généralisée (car « les bornes sont dans le bon sens »), puis croissance de l'intégrale (en utilisant que, pour $t \in [n-1, n]$, on a $0 \leq t+1-n \leq 1$) (et là encore car « les bornes sont dans le bon sens »),

$$0 \leq |w_n| \leq \int_{n-1}^n |n-1-t||f'(t)|dt = \int_{n-1}^n (t+1-n)|f'(t)|dt \leq \int_{n-1}^n |f'(t)|dt.$$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$, par positivité de l'intégrale, comme « les bornes sont dans le bon sens » (et que la fonction f' est intégrable sur $[N, +\infty[$, donc $|f'|$ aussi), et $|f'| \geq 0$, on a

$$0 \leq \int_N^{+\infty} |f'(t)|dt.$$

On en déduit : pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n |f'(t)|dt \underset{\text{Chasles}}{=} \int_1^N |f'(t)|dt \leq \int_1^N |f'(t)|dt + \int_N^{+\infty} |f'(t)|dt \underset{\text{Chasles}}{=} \int_1^{+\infty} |f'(t)|dt < +\infty$$

(car f' est intégrable), donc la suite des sommes partielles de la série numérique à termes positifs

$$\sum_{n \geq 2} \int_{n-1}^n |f'(t)|dt$$

est majorée (par $\int_1^{+\infty} |f'(t)|dt$), donc converge. Donc la série numérique $\sum_{n \geq 2} \int_{n-1}^n |f'(t)|dt$ converge.

Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \geq 2} w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Remarque. Donc, sous les hypothèses de l'exercice, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)$ converge si et seulement si la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{n-1}^n f(t)dt$ converge, donc (par la relation de Chasles) si et seulement si la suite numérique $(\int_1^n f(t)dt)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite finie si $n \rightarrow \infty$ (ce qui est le cas si l'intégrale est semi-convergente en $+\infty$, mais ce n'est pas nécessaire *a priori*).

3) Application : • Soit

$$f : t \mapsto \frac{\cos(\ln(t))}{t},$$

alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$f'(t) = -\frac{\sin(\ln(t))}{t^2} - \frac{\cos(\ln(t))}{t^2},$$

donc

$$|f''(t)| \leq \frac{2}{t^2}$$

(car $|\sin| \leq 1$ et $|\cos| \leq 1$). La fonction f' étant continue sur $[1, +\infty[$, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann, $2 > 1$), le critère de comparaison permet d'affirmer que la fonction f' est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc les hypothèses de la question 2 sont vérifiées.

• Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^N \frac{\cos(\ln(t))}{t} dt \underset{u=\ln(t)}{=} \int_0^{\ln(N)} \cos(u) du = \sin(\ln(N))$$

qui n'a pas de limite si $N \rightarrow +\infty$, donc (par la remarque précédente), la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$ diverge

Remarque. On peut justifier cette absence de limite assez facilement en fait : pour $k \in \mathbb{N}$, si $N_k = \lfloor e^{2k\pi} \rfloor = e^{2k\pi} + O_{k \rightarrow +\infty}(1)$, on a

$$\ln(N_k) = \ln(e^{2k\pi}) + \ln\left(1 + O_{k \rightarrow +\infty}(e^{-2k\pi})\right) = 2k\pi + O_{k \rightarrow +\infty}(e^{-2k\pi})$$

et donc

$$\sin(\ln(N_k)) = \sin\left(2k\pi + O_{k \rightarrow +\infty}(e^{-2k\pi})\right) = \sin\left(O_{k \rightarrow +\infty}(e^{-2k\pi})\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

mais si, pour $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \lfloor e^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \rfloor = e^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} + O_{k \rightarrow +\infty}(1)$, on a alors

$$\sin(\ln(N_k)) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} + O_{k \rightarrow +\infty}(e^{-2k\pi})\right) = \cos\left(O_{k \rightarrow +\infty}(e^{-2k\pi})\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc il existe deux suites extraites de la suite numérique $\left(\sin(\ln(n))\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui n'ont pas la même limite, donc la suite numérique $\left(\sin(\ln(n))\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.

Exercice 13. Étudions u_n grâce à la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

donc

$$(n!)^3 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\pi n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^{3n}$$

puis

$$(3n)! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi(3n)} \left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}.$$

Donc :

$$u_n = \frac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(3n)} \left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}{\alpha^{3n} \sqrt{2\pi n}^3 \left(\frac{n}{e}\right)^{3n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{2\pi n} \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{3n}$$

• Si $\alpha > 3$ la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est convergente. En effet

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{\sqrt{3}}{2\pi n} \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{3n} = 0$$

par croissance comparée (car $\frac{3}{\alpha} \in]-1, 1[$). Donc

$$u_n = O_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs. D'après le critère de domination des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est convergente.

• Si $0 < \alpha < 3$, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est divergente (grossièrement) car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}}{2\pi n} \left(\frac{3}{\alpha}\right)^{3n} = +\infty$$

par croissance comparée (car $\frac{3}{\alpha} > 1$). Donc la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

• Si $\alpha = 3$ alors

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{2\pi n},$$

et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge (Riemann), et est à termes positifs, d'où par le critère d'équivalence des séries à termes positifs (et car $\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \neq 0$), la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.

Exercice 14.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$z_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad w_k = \frac{1}{k!}.$$

Alors les séries numériques

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} z_k \quad \text{et} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} w_k$$

convergent absolument et

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k \right) = \frac{\pi^2 e}{6}.$$

De plus la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est le produit de Cauchy de ces deux séries absolument convergentes (car, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k}$$

(en faisant attention que le terme $k = 0$ de la somme est nul, puisque $z_0 = 0$)). Donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente et sa somme vaut

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{\pi^2 e}{6}}$$

(on peut faire partir la somme de $n = 1$, car $u_0 = z_0 w_0 = 0$).

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}.$$

La série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ est le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (car, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

(en faisant attention que le terme $k = 0$ et $k = n$ de la somme est nul, puisque $a_0 = b_0 = 0$)), donc converge absolument. Et

$$\sum_{n=2}^{\infty} v_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) = \boxed{\frac{\pi^4}{36}}.$$

(la somme part de $n = 2$, car $v_0 = a_0 b_0 = 0$ et $v_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 + 0 = 0$).

Exercice 15.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$1 + x \leq e^x,$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - e^x \leq -x.$$

En remplaçant x par $-x$ (cela reste bien un réel), on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - e^{-x} \leq x.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Donc la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Elle est strictement positive. En effet, montrons $u_n > 0$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 > 0$ par hypothèse.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n > 0$. Alors $-u_n < 0$, et par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$e^{-u_n} < e^0 = 1, \quad \text{soit} \quad u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} > 0,$$

d'où l'hérédité.

Conclusion : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Remarque. Pour cette question, positif suffit. Mais $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ permet de justifier l'existence de la série considérée à la question 4.

La suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante positive (donc minorée par 0), donc convergente (par le théorème de la limite monotone), et converge vers un réel ℓ qui vérifie

$$\ell = 1 - e^{-\ell}$$

(par continuité de la fonction exp en $-\ell$).

Or, si on pose

$$g : x \mapsto 1 - e^{-x} - x,$$

alors la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^{-x} - 1.$$

Donc $g' < 0$ sur $]0, +\infty[$ et $g' > 0$ sur $] -\infty, 0[$. Donc la fonction g est strictement croissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) < g(0) = 0.$$

Or, $g(\ell) = 0$, donc

$$\ell = 0.$$

Donc la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. La série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n u_n$ est une série alternée car $u_n \geq 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

La suite numérique

$$(|(-1)^n u_n|)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

est décroissante et tend vers 0 (cf. question 1), donc d'après le critère des séries alternées, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n u_n$ est convergente.

3. On a en effectuant un DL de u_{n+1} (car $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$) :

$$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = 1 - \left(1 - u_n + u_n^2 + o_{n \rightarrow \infty}(u_n^2)\right) \quad \text{donc} \quad u_n^2 + o_{n \rightarrow \infty}(u_n^2) = u_n - u_{n+1}$$

Donc

$$u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n - u_{n+1}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n - u_{n+1})$ est une série télescopique, qui converge si et seulement si la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (cours de PCSI), ce qui est le cas (puisque la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0).

Puis, $u_n^2 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc le critère d'équivalence des séries à termes positifs donne que la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2$ a même nature que la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n - u_{n+1})$, donc converge.

4. On a de nouveau une série télescopique car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

mais la suite numérique $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge (tend vers $-\infty$, puisque la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0) donc la série considérée est divergente.

Exercice 16. 1) On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : pour $n = 1$, on a

$$u_1 = \cos(0) = 1,$$

donc l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\cos(1) \leq u_n \leq 1$. Comme la fonction $\cos$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \cos(1) \leq \cos(x) \leq 1$$

(car $[0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$). Donc si

$$0 \leq \cos(1) \leq u_n \leq 1,$$

alors en prenant $x = u_n$ dans l'inégalité précédente, on a

$$\cos(1) \leq u_{n+1} = \cos(u_n) \leq 1,$$

d'où l'hérédité.

Conclusion : on a bien montré, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que $\cos(1) \leq u_n \leq 1$.

2) La fonction $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $x \in [0, 1]$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ donc

$$|\cos'(x)| \leq \sin(x) \leq \sin(1)$$

(car $\sin$ est croissant et positif sur $[0, 1]$), donc par inégalité des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$,

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y| \sin(1).$$

On montre alors le résultat demandé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

Initialisation : pour $n = 1$,

$$|u_2 - u_1| = |\cos(1) - 1| = 1 - \cos(1) = (1 - \cos(1)) \sin^0(1) = (1 - \cos(1)) \sin^{1-1}(1),$$

donc on a même l'égalité.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons

$$|u_{n+1} - u_n| \leq (1 - \cos(1)) \sin^{n-1}(1).$$

Alors

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |\cos(u_{n+1}) - \cos(u_n)| \leq |u_{n+1} - u_n| \sin(1) \leq (1 - \cos(1)) \sin^{n-1}(1) \sin(1) = (1 - \cos(1)) \sin^{(n+1)-1}(1)$$

(car u_n et u_{n+1} sont dans $[0, 1]$). D'où l'hérédité.

Conclusion : on a bien montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq (1 - \cos(1)) \sin^{n-1}(1).$$

3) Comme

$$0 \leq \sin(1) < 1,$$

la série géométrique de raison $\sin(1)$ converge, donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (1 - \cos(1)) \sin^{n-1}(1)$ est convergente. Donc par le critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série télescopique $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, donc convergente. Donc (cours de PCSI), la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 17.

1. • Si $\alpha > 1$, on

$$\left| \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}n}}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$$

qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Donc si $\alpha > 1$, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

• Si $\alpha \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n|$ ne tend pas vers 0 (tend vers $+\infty$ si $\alpha < 0$, 1 si $\alpha = 0$). Donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement.

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{2i\pi}{7}} \right)^k = e^{\frac{2i\pi}{7}} \frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{7}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{7}}}$$

(car $e^{\frac{2i\pi}{7}} \neq 1$, et on a reconnu la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{2i\pi}{7}}$), donc par inégalité triangulaire,

$$|A_n| \leq \frac{|1| + \left| e^{\frac{2in\pi}{7}} \right|}{\left| 1 - e^{\frac{2i\pi}{7}} \right|} = \frac{2}{\left| 1 - e^{\frac{2i\pi}{7}} \right|} = M.$$

Donc la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée (par M).

(b) On remarque que pour $k \geq 2$:

$$e^{\frac{2ik\pi}{7}} = A_k - A_{k-1}$$

(et cela reste vrai pour $k = 1$ si l'on pose $A_0 = 0$, ce que l'on fera). Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}k}}{k^\alpha} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} (A_k - A_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{A_{k-1}}{k^\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{(k+1)^\alpha} \\ &= \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) - \underbrace{A_0}_{=0} \end{aligned}$$

(c) D'après le résultat de la question 2a, on a :

$$\left| \frac{A_n}{n^\alpha} \right| \leq \frac{M}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(car $\alpha > 0$). De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq \left| A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) \right| \leq M \left| \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right| = M \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$$

Or

$$\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha} \right) = \frac{1}{k^\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{k} + \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{k}\right) \right) \right) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha}{k^{\alpha+1}},$$

et la série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha > 0$, et est à termes positifs.

Donc, par le critère d'équivalence, puis par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$ est absolument convergente, donc convergente. Donc la suite de ses sommes partielles a une limite finie. Or, on a vu :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \underbrace{\frac{A_n}{n^\alpha}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + M \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)}_{\substack{\text{Somme partielle d'une} \\ \text{série convergente} \\ \text{donc a une limite finie}}}$$

Donc la suite numérique $(\sum_{k=1}^n u_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. Donc la série de terme général u_n est convergente, puisque la suite de ses sommes partielles a une limite finie.

Exercice 18. 1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x_k > 0$, donc $x_k + 1 > 1$, et donc $\frac{1}{x_k + 1}$ existe. Donc par produit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe. De plus, comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k > 0$, on a

$$\frac{x_k}{x_k + 1} > 0,$$

et comme le produit de réels strictement positif est un réel strictement positif, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n > 0.$$

Pour étudier la monotonie de la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut alors regarder : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1} + 1} < 1,$$

et donc la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante.

La suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée (par 0), donc par le théorème de la limite monotone, la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\lambda \geq 0$.

De plus, comme la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante, on a $u_n \leq u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc à la limite,

$$\lambda \leq u_0 = \frac{x_0}{x_0 + 1} < 1.$$

2) On pose $x_n = n + 1$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (donc $x_n > 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et la suite numérique $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un produit télescopique et on a

$$u_n = \frac{\prod_{k=0}^n (k+1)}{\prod_{k=0}^n (k+2)} \stackrel{p=k+1}{=} \frac{\prod_{k=0}^n (k+1)}{\prod_{p=1}^{n+1} (p+1)} = \frac{(0+1)}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}.$$

Donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}.$$

3) O a :

$$\lambda \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ll \text{la suite numérique } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \lambda > 0 \gg \quad \Leftrightarrow \quad \ll \text{la suite numérique } (\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \gg$$

(si on note μ la limite de la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, alors on a $\mu = \ln(\lambda)$, ou ce qui revient au même, $\lambda = e^\mu > 0$). Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{x_k}{x_k + 1}\right) = - \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{x_k + 1}{x_k}\right) = - \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{x_k}\right),$$

donc

$$\ll \text{la suite numérique } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \lambda > 0 \gg \quad \Leftrightarrow \quad \ll \text{la série numérique } \sum_{k \in \mathbb{N}} \ln\left(1 + \frac{1}{x_k}\right) \text{ converge} \gg.$$

Or, comme $x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \longrightarrow +\infty$, on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x_k}\right) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x_k},$$

et comme la série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{x_k}$ est une série à termes positifs, le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs donne :

$$\ll \text{la série numérique } \sum_{k \in \mathbb{N}} \ln\left(1 + \frac{1}{x_k}\right) \text{ converge} \gg \quad \Leftrightarrow \quad \ll \text{la série numérique } \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{x_k} \text{ converge} \gg.$$

On a donc bien montré :

$$\ll \text{la suite numérique } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \lambda > 0 \gg \quad \Leftrightarrow \quad \ll \text{la série numérique } \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{x_k} \text{ converge} \gg.$$

4) • Par récurrence immédiate, on a $x_n > 1$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On peut donc considérer la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(x_n)$.

La relation de récurrence sur la suite numérique $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donne alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = 2v_n.$$

Donc la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 2^n v_0.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \exp(v_n) = \exp(2^n \ln(x_0)) = x_0^{2^n}$$

(donc on a bien que la suite numérique $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini, car $x_0 > 1$).

Comme $x_0 > 1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = x_0^{2^n} \geq x_0^n \geq 1,$$

car pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n}{k}}_{\geq 1} \geq \sum_{k=0}^n 1 = n+1 \geq n.$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{x_n} \leq \left(\frac{1}{x_0}\right)^n.$$

Comme $x_0 > 1$, on a

$$0 < \frac{1}{x_0} < 1,$$

donc la série géométrique de raison $\frac{1}{x_0}$ converge, donc par critère comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{x_n}$ converge. Donc, d'après la question précédente, la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel non nul.

• Pour trouver la limite, il faut penser à l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on regarde $\frac{1}{1-x_0} u_n$:

$$\frac{1}{1-x_0} u_n = \frac{1}{1-x_0} \frac{x_0}{1+x_0} \prod_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k+1} = \frac{x_0}{1-x_0^2} \prod_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k+1}.$$

Or $1-x_0^2 = 1-x_1$, donc en reportant :

$$\frac{1}{1-x_0} u_n = \frac{x_0}{1-x_1} \frac{x_1}{1+x_1} \prod_{k=2}^n \frac{x_k}{x_k+1} = \frac{x_0 x_1}{1-x_1^2} \prod_{k=2}^n \frac{x_k}{x_k+1} = \frac{x_0 x_1}{1-x_2} \prod_{k=2}^n \frac{x_k}{x_k+1}.$$

Par récurrence, on obtient

$$\frac{1}{1-x_0} u_n = \frac{x_0 x_1 \dots x_n}{1-x_{n+1}} = \frac{\sum_{k=0}^n 2^k}{x_0^{2^{n+1}-1}} = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1-x_0^{2^{n+1}}}.$$

Montrons-le :

Initialisation : pour $n=0$, $u_0 = \frac{x_0}{1+x_0}$, donc

$$\frac{1}{1-x_0} u_0 = \frac{x_0}{(1-x_0)(1+x_0)} = \frac{x_0}{1-x_0^2} \quad \text{et} \quad \frac{x_0^{2^{0+1}-1}}{1-x_0^{2^{0+1}}} = \frac{x_0^{2-1}}{1-x_0^2} = \frac{x_0}{1-x_0^2},$$

on a donc bien l'égalité. D'où l'initialisation.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\frac{1}{1-x_0} u_n = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1-x_0^{2^{n+1}}}$. Alors

$$\frac{1}{1-x_0} u_{n+1} = \frac{1}{1-x_0} u_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1-x_0^{2^{n+1}}} \frac{x_{n+1}}{1+x_{n+1}} = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1-x_0^{2^{n+1}}} \frac{x_0^{2^{n+1}}}{1+x_0^{2^{n+1}}}$$

puis

$$(1 - x_0^{2^{n+1}})(1 + x_0^{2^{n+1}}) = 1^2 - (x_0^{2^{n+1}})^2 = 1 - x_0^{2^{n+1} \cdot 2} = 1 - x_0^{2^{(n+1)+1}},$$

et

$$x_0^{2^{n+1}-1} \cdot x_0^{2^{n+1}} = x_0^{2^{n+1}-1+2^{n+1}} = x_0^{2^{(n+1)+1}-1}$$

car

$$2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2} = 2^{(n+1)+1}.$$

En reportant, on en déduit bien l'égalité voulue, d'où l'hérédité.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{1 - x_0} u_n = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1 - x_0^{2^{n+1}}}.$$

Puis, comme $x_0 > 1$, $x_0^{2^{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \longrightarrow +\infty$, et donc

$$1 - x_0^{2^{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -x_0^{2^{n+1}},$$

puis

$$\frac{1}{1 - x_0} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{-x_0^{2^{n+1}}} = -x_0^{-1}.$$

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1-x_0}{-x_0}$, donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{x_0 - 1}{x_0}}.$$

Exercice 19. Soit $N \in \mathbb{N}$, alors l'ensemble

$$E_N = \{\phi(0), \dots, \phi(N)\}$$

est fini, et donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\phi(0) \leq M, \quad \dots, \quad \phi(N) \leq M,$$

donc

$$E_N \subset \llbracket 0, M \rrbracket.$$

Comme la fonction ϕ est injective, on a

$$\sum_{n=0}^N |a_{\phi(n)}| = \sum_{n \in E_N} |a_n|$$

(il n'y a pas plusieurs $\phi(n)$ qui prennent la même valeur), et comme $E_N \subset \llbracket 0, M \rrbracket$, on a

$$\sum_{n \in E_N} |a_n| \leq \sum_{n \in E_N} |a_n| + \underbrace{\sum_{n \in \llbracket 0, M \rrbracket \setminus E_N} \underbrace{|a_n|}_{\geq 0}}_{\geq 0} = \sum_{n \in \llbracket 0, M \rrbracket} |a_n| = \sum_{n=0}^M |a_n|.$$

Or, comme la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente, on a

$$\sum_{n=0}^M |a_n| \leq K := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N |a_{\phi(n)}| \leq K,$$

donc la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{\phi(n)}|$ est majorée (toutes ses sommes partielles sont majorées par K), donc converge.

Remarque. On peut montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

mais cela ne marche **que pour les séries absolument convergentes...**

Exercice 20. 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Pour tout $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, on a $\ln^2(k) \geq 0$, donc

$$u_n = \ln^2(n) + \sum_{k=2}^{n-1} \ln^2(k) \geq \ln^2(n) + \sum_{k=2}^{n-1} 0 = \ln^2(n)$$

(inégalité qui reste vraie si $n = 2$). Donc

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

donc la série numérique $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge grossièrement.

2) On fait une comparaison série/intégrale.

La fonction

$$f : x \mapsto \ln^2(x),$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 2 \frac{\ln(x)}{x},$$

donc $f(x) > 0$ pour $x \in]1, +\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Soit ensuite $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a alors par croissance de la fonction f ,

$$\ln^2(k) \leq \ln^2(t) \leq \ln^2(k+1).$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens), on a alors

$$\ln^2(k) = \int_k^{k+1} \ln^2(k) dt \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t) dt \leq \int_k^{k+1} \ln^2(k+1) dt = \ln^2(k+1).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on somme alors les inégalités de gauche pour k variant de 1 à n , ce qui donne (en appliquant la relation de Chasles) :

$$u_n = \ln^2(1) + u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \ln^2(t) dt \stackrel{\text{Chasles}}{=} \int_1^{n+1} \ln^2(t) dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on somme ensuite les inégalités de droite pour k variant de 1 à $n-1$, ce qui donne (en appliquant la relation de Chasles) :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln^2(t) dt \stackrel{\text{Chasles}}{=} \int_1^n \ln^2(t) dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln^2(k+1) \stackrel{p=k+1}{=} \sum_{p=2}^n \ln^2(p) = u_n$$

3) On intègre par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto t \quad \text{et} \quad v : t \mapsto \ln^2(t)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $[1, x]$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, de dérivées

$$u' : t \mapsto 1 \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto 2 \frac{\ln(t)}{t}.$$

Alors le théorème d'intégration par parties de PCSI s'applique :

$$\int_1^x \ln^2(t) dt = [t \ln^2(t)]_1^x - \int_1^x t 2 \frac{\ln(t)}{t} dt = x \ln^2(x) - 2 \int_1^x \ln(t) dt.$$

On calcule cette nouvelle intégrale de la même façon :

$$\int_1^x \ln(t) dt = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x t \frac{1}{t} dt = x \ln(x) - x + 1.$$

Donc

$$\boxed{\int_1^x \ln^2(t) dt = x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x - 2}.$$

Puis,

$$\frac{1}{x \ln^2(x)} \int_1^x \ln^2(t) dt = 1 - \frac{2}{\ln(x)} + \frac{2}{\ln^2(x)} - \frac{2}{x \ln^2(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1,$$

d'où l'équivalent demandé.

4) • On a

$$(n+1) \ln^2(n+1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln^2(n+1), \quad \text{puis} \quad \ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$$

(car $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, qui tend vers 0, est négligeable devant $\ln(n)$, qui tend vers l'infini), et donc

$$(n+1) \ln^2(n+1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln^2(n).$$

Donc

$$\int_1^{n+1} \ln^2(t) dt \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (n+1) \ln^2(n+1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln^2(n).$$

En divisant alors les deux inégalités de la question 2 par $n \ln^2(n)$, le théorème des gendarmes donne alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n \ln^2(n)} = 1, \quad \text{et donc} \quad \boxed{u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln^2(n)}.$$

Donc

$$\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n \ln^2(n)}.$$

• Comme $u_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 2$, le critère d'équivalence des séries à termes positifs s'applique, et donne que la série numérique $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$ est de même nature que la série numérique $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2(n)}$.

Faisons à nouveau une comparaison série/intégrale : la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{x \ln^2(x)}$$

est dérivable sur $[2, +\infty[$, avec, pour tout $x \in [2, +\infty[$,

$$g'(x) = -\frac{2 + \ln(x)}{x^2 \ln^3(x)} \leq 0,$$

donc la fonction g est décroissante sur $[2, +\infty[$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, pour tout $t \in [n-1, n]$, par décroissance de la fonction g sur $[n-1, n] \subset [2, +\infty[$, on a

$$g(n) \leq g(t),$$

donc par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens »),

$$g(n) = \int_{n-1}^n g(n) dt \leq \int_{n-1}^n g(t) dt.$$

En sommant des inégalités dans le même sens, pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$, on a alors

$$\sum_{n=3}^N g(n) \leq \sum_{n=3}^N \int_{n-1}^n g(t) dt \stackrel{\text{Chasles}}{=} \int_2^N g(t) dt = \int_2^N \frac{1}{t \ln^2(t)} dt = \left[-\frac{1}{\ln(t)} \right]_2^N = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(N)} \leq \frac{1}{\ln(2)}.$$

Donc la suite des sommes partielles de la série numérique

$$\sum_{n \geq 3} g(n) = \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln^2(n)}$$

est majorée (par $\frac{1}{\ln(2)}$), et de plus cette série numérique est à termes positifs. Alors on peut affirmer que cette série numérique converge.

Donc, avec ce qui précède, la série numérique $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{u_n}$ converge.

Exercice 21. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n := \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$$

car $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et car $-\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc

$$-u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

or la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$), et est à termes positifs, donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum_{n \geq 2} -u_n$ converge, donc que la série numérique

$\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

• Puis, pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$,

$$\begin{aligned} S_N := \sum_{n=2}^N \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) &= \sum_{n=2}^N \ln \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \right) \\ &= \sum_{n=2}^N (\ln(n+1) + \ln(n-1) - 2 \ln(n)) \\ &= \sum_{n=2}^N \ln(n+1) + \sum_{n=2}^N \ln(n-1) - 2 \sum_{n=2}^N \ln(n) \end{aligned}$$

On pose alors $p = n+1$ dans la première somme et $q = n-1$ dans la deuxième, on a alors

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{p=3}^{N+1} \ln(p) + \sum_{q=1}^{N-1} \ln(q) - 2 \sum_{n=2}^N \ln(n) \\ &= \ln(N+1) - \ln(2) - \ln(N) + \ln(1) \\ &= -\ln(2) + \ln \left(\frac{N+1}{N} \right) \\ &= -\ln(2) + \ln \left(1 + \frac{1}{N} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\ln(2) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = -\ln(2)}.$$

Exercice 22. Pas de correction pour l'instant