# TD1 - Séries numériques

**Exercice 1.** Étudier la convergence des séries de terme général suivant :

1. $\frac{n^5}{2^n}$
2. $\frac{4^n-n}{5^n+2n^3}$
3. $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
4. $\frac{\sin^3(n^2+1)}{n^2+n+1}$
5. $\frac{\ln(n)}{n}$
6. $\frac{\sinh(n)}{\cosh(2n)}$
7. $\ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right)$
8. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$
9. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
10. $\frac{(-1)^n}{n+\ln(n)}$
11. $\sin\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)$
12. $\frac{(-1)^n\ln(n)}{n}$
13. $\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$
14. $(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
15. $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$
16. $\frac{n!}{n^n}$
17. $\frac{(2n)!}{n^n n!}$
18. $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$

**Exercice 2.** Calculer les sommes suivantes (*on pourra utiliser au besoin que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$) :

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(n)}{2^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$
5. $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ (utiliser (5))

**Exercice 3.** Soit $(a_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Qu'en est-il des séries de termes généraux suivants :

1. $a_n^2$
2. $\frac{a_n}{1+a_n}$
3. $\sin(a_n)$
4. $\sqrt{a_n}$
5. $\sqrt{a_{n+1}a_n}$

**Exercice 4.** Déterminer $\alpha$ et $\beta$ tels que la série de terme général $\sqrt{n}+\alpha\sqrt{n+1}+\beta\sqrt{n+2}$ soit convergente. Lorsqu'elle converge, calculer sa somme.

**Exercice 5.** Soient pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, $I_n=\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}=2\sqrt{n}-2$ et $u_n=S_n-I_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}+2$.

1. Montrer que $S_n \underset{n\to\infty}{\sim} I_n$.
2. Étudier la nature de la série de terme général $v_n=u_{n+1}-u_n$, en déduire que $(u_n)$ converge.

**Exercice 6.** Donner un équivalent de $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$, puis étudier la série $\sum\frac{1}{S_n}$.

**Exercice 7.** Préciser la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$, où $u_n=\frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n n^b}$, en fonction des réels $a$ et $b$.

**Exercice 8.** Préciser la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$, où $u_n=\frac{\ln(1+a^{3n})}{a^n}$, en fonction du réel $a>0$.

**Exercice 9.** Montrer la convergence de la série de terme général $u_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ puis calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}u_n$.

**Exercice 10** (Règle de Raabe-Duhamel)**.** Soit $(u_n)$ une suite de réels positifs et $\alpha>0$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+\underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1. On pose $v_n=n^\alpha u_n$ et $w_n=\ln\left(v_{n+1}\right)-\ln\left(v_n\right)$. Montrer que la série de terme général $(w_n)$ est absolument convergente.
2. En déduire qu'il existe $A>0$ tel que $u_n\sim\frac{A}{n^\alpha}$, puis conclure.

**Exercice 11.** Donner la nature de la série de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Même question avec $v_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

**Exercice 12.** Soit $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)$.

1. Montrer que pour tout $n$, $w_n = -\int_{n-1}^{n}(t-n+1)f'(t)\mathrm{d}t$.
2. En déduire que si $f'$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, la série des $w_n$ est absolument convergente.
3. Application : montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos\big(\ln(n)\big)}{n}$ diverge (*on admettra que la suite* $\big(\sin\big(\ln(n)\big)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *diverge*).

**Exercice 13.** Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif $\alpha$, la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3}.$$

**Exercice 14.** Montrer la convergence et calculer (*rappel :* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$) la somme de la série de terme général

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(n-k)!}$.
2. $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2}$.

**Exercice 15.** Soit $(u_n)$ une suite réelle définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

1. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$.
3. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ (*on pourra montrer que* $u_n^2 \sim u_n - u_{n+1}$).
4. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

**Exercice 16.** On définit une suite $(u_n)$ par $u_0 = 0$ et la relation $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\cos(1) \leq u_n \leq 1$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \big(1 - \cos(1)\big)\sin^{n-1}(1)$.
3. En déduire que la suite $(u_n)$ converge.

**Exercice 17.** Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}n}}{n^\alpha}$.

1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n$ si $\alpha > 1$ puis si $\alpha \leq 0$.
2. On suppose maintenant que $0 < \alpha \leq 1$. On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2i\pi}{7}k}$.
   (a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}k}}{k^\alpha} = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$.
   (c) En déduire la convergence de la série de terme général $u_n$.

**Exercice 18.** Soit $(x_n)$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. On lui associe une suite $(u_n)$ telle que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{x_k}{1+x_k}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)$ est monotone convergente, de limite $\lambda$ telle que $\lambda \in [0, 1[$.
2. Que vaut $\lambda$ lorsque pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = n + 1$ ?
3. Démontrer, en étudiant la suite $\ln(u_n)$, que $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow$ la série $\sum \frac{1}{x_k}$ est divergente.
4. Étudier le cas où la suite $(x_n)$ est définie par $x_0 > 1$ et la relation $x_{n+1} = x_n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$, et déterminer $\lambda$.

**Exercice 19.** Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série absolument convergente, et $(a_{\phi(n)})$ une suite extraite de $(a_n)$. Montrer alors que $\sum_{n\geq 0} a_{\phi(n)}$ est une série absolument convergente.

**Exercice 20** (CCP 2013 Officiel de la Taupe)**.** Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln^2(k)$ pour $n \geq 2$.

1. Montrer que $u_n \geq \ln^2(n)$, et en déduire que $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ diverge.
2. Montrer que $\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_1^{n+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t$.
3. Calculer $\int_1^x \ln^2(t)\mathrm{d}t$ et en déduire que, en $+\infty$, $\int_1^x \ln^2(t)\mathrm{d}t \sim x\ln^2(x)$.
4. Trouver un équivalent de $u_n$, et déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$.

**Exercice 21** (CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2)**.** Montrer que $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge, et calculer sa somme.

**Exercice 22.** Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série convergente mais pas absolument convergente (on dit qu'elle est semi-convergente). Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe une réorganisation des termes de la série que sa somme fasse $\ell$. Formellement, montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\varphi(n)} = \ell.$$

**Indications :**

- Soit $(v_n)$ la suite des termes positifs de $(u_n)$ (dans l'ordre) et $(w_n)$ celle des termes négatifs. Que dire des séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ ?
- Construire $\varphi$ par récurrence.

# Solutions

**Exercice 1.**

1. On a
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{n^5}{2^n} = 0$$
par croissance comparée (car $2>1$). Ainsi
$$\frac{n^5}{2^n} = \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
or la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2>1$) et est à termes positifs.
Donc d'après le critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n^5}{2^n}$ est absolument convergente, donc convergente.

   **Remarque.** On peut aussi appliquer le critère de d'Alembert.

2. Comme $n \underset{n\to\infty}{=} o(4^n)$ et $2n^3 \underset{n\to\infty}{=} o(5^n)$ (par croissance comparée, car $4>1$ et $5>1$), on a
$$\frac{4^n-n}{5^n+2n^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$
Puis, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ est convergente (série géométrique de raison $\frac{4}{5}$ avec $\frac{4}{5}\in]-1,1[$) et est à termes positifs.
Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{4^n-n}{5^n+2n^3}$ est absolument convergente, donc convergente.

3. Comme $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$, et que $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a :
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
Puis, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ est divergente (Riemann) et à termes positifs.
Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

4. On sait $|\sin|\leq 1$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$0 \leq \left|\frac{\sin^3(n^2+1)}{n^2+n+1}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$
Puis, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2>1$).
Donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\sin^3(n^2+1)}{n^2+n+1}$ est absolument convergente, donc convergente.

   **Remarque.** Ici, on n'a pas précisé que $\frac{1}{n^2}$ est positif, car pour le critère de comparaison, c'est pas le majorant qui doit être positif, mais le terme majoré. Donc, ici, ce qui est important, c'est que $\left|\frac{\sin^3(n^2+1)}{n^2+n+1}\right|$ soit positif pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

5. La fonction ln est croissante sur $]0,+\infty[$, et $\ln\big(e\big)=1$. Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq e$, c'est-à-dire pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 3$, on a
$$\ln(n)\geq 1, \qquad \text{donc} \qquad \frac{\ln(n)}{n}\geq\frac{1}{n}>0.$$
Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente et à termes positifs.
Donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

6. On a
$$\frac{\sinh(n)}{\cosh(2n)} = \frac{e^n - e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-n}$$
et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}$ est convergente (série géométrique de raison $e^{-1}$ avec $e^{-1} \in ]0,1[\subset]-1,1[$) et à termes positifs.
Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sinh(n)}{\cosh(2n)}$ est absolument convergente, donc convergente.

7. On sait $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc
$$\begin{array}{rcl} \ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right) & = & \ln\left(1+\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}-1\right)\right) \\ & = & \ln\left(1+\frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1}\right) \\ & \underset{n\to\infty}{\sim} & \frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1} \end{array}$$
car $\frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Puis,
$$\frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$
et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2>1$) et à termes positifs.
Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

8. On a :
$$\begin{array}{rcl} u_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e & = & \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - e \\ & = & \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) - e \\ & = & \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - e \\ & = & e\left(\exp\left(-\frac{1}{2n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \\ & = & -\frac{e}{2n} + \underset{n\to\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n}\right) \\ & \underset{n\to\infty}{=} & -\frac{e}{2n} \end{array}$$
Donc
$$-u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e}{2n},$$
et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e}{2n}$ est une série de Riemann divergente, et à termes positifs.
Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}*} -u_n$ diverge, donc, en multipliant par $-1$, la série numérique
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]$$
diverge.

9. On utilise le DL $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \underset{u\to 0}{\sim} o(u)$, en mettant $\sqrt{n}$ en facteur pour utiliser $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ :
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq 0$$
et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente ($\frac{1}{2} \leq 1$) et à termes positifs.
Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ est divergente.

**Remarque.**

(a) On peut aussi passer par les sommes partielles ici, puisqu'elles sont télescopiques : pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{n=0}^{N} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{N+1} - \sqrt{0} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(b) On peut aussi utiliser la quantité conjuguée : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

et de là,

- soit on dit
$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
car
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}},$$
- soit on dit
$$u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}},$$

et dans les deux cas, on conclut car la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$) est une série de Riemann divergente, puisque $\frac{1}{2} \leq 1$, et à termes positifs.

10. Soit
$$f : x \in [1, +\infty[ \mapsto \frac{1}{x+\ln(x)}$$
(bien définie car, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $x + \ln(x) \geq x \geq 1 > 0$), alors la fonction $f$ est dérivable sur $[1, +\infty[$, et pour tout $x \in [1, +\infty[$,
$$f'(x) = -\frac{1+\frac{1}{x}}{\big(x+\ln(x)\big)^2} \leq 0,$$
donc la fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
Donc la suite numérique
$$\left(\frac{1}{n+\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$$
est décroissante. De plus, elle tend vers 0.
Enfin, $\frac{1}{n+\ln(n)} \geq 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc la série considérée est alternée.
Le critère des séries alternées s'applique, et donne que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n+\ln(n)}$ est convergente.

11. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$, donc (par récurrence directe), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$
Puis :
**Méthode 1 :** On fait un DL : on a $\sin(u) = u + \underset{u\to 0}{O}(u^3)$, et $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc
$$\sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
Puis,

- la série numérique $\sum \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge absolument par le critère de domination des séries à termes positifs, car la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente (car $3 > 1$) et à termes positifs,
- et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, par application directe du critère des séries alternées (car la suite numérique $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien décroissante positive et tend vers 0).

Par addition, on en déduit que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$ converge.
**Méthode 2 :** • La suite numérique $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante : la fonction sin est décroissante sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in I$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n},$$

par décroissance de la fonction sinus,

$$\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

• La suite numérique $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 (car $\sin(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, et car $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$).
• La suite numérique $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs (car $\sin \geq 0$ sur $I$), donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$ est alternée.
• Donc d'après le critère des séries alternées, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$ converge.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\ln(n)}{n} \geq 0,$$

donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ est alternée.
Étudions la décroissance possible de la suite numérique $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour cela, étudions la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}.$$

La fonction $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x \in ]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

On a donc $f'(x) \leq 0$ pour $x \geq e$, donc la fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$. Donc la suite numérique

$$\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n\geq 3} = \left(f(n)\right)_{n\geq 3}$$

est décroissante (on prend $n \geq 3$ pour que $n \geq e$).
Par croissance comparée, cette suite numérique tend vers 0.
Ainsi d'après le critère des séries alternées, la série numérique $\sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ est convergente, donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ aussi.

13. On utilise le DL $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \underset{u\to 0}{O}(u^2)$, en mettant $\sqrt{n}$ en facteur pour utiliser $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}} - 1\right) \\ &= \sqrt{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}_{v_n} + \underbrace{\underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{w_n} \end{aligned}$$

Or

- d'après le critère des séries alternées, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge (la série numérique $\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien décroissante, tend vers 0, et est positive),
- et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$ est absolument convergente par critère de domination des séries à termes positifs (car la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$) et est à termes positifs).

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n} = v_n + w_n,$$
par addition de deux séries numériques convergentes, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.

14. Afin d'utiliser le critère des séries alternées, montrons que la suite numérique $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante, qui tend vers 0. Par la quantité conjuguée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$
Le résultat est alors direct.
Ainsi d'après le critère des séries alternées, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ est convergente.

**Remarque.** On peut aussi faire un DL :
$$\begin{aligned}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= (-1)^n\sqrt{n}\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)\\ &= (-1)^n\sqrt{n}\left(1+\tfrac{1}{2n}+\underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)-1\right)\\ &= \tfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}+\underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\end{aligned}$$
Puis,
- la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge par le critère des séries alternées,
- et la série numérique $\sum \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ converge (absolument) par le critère de domination des séries à termes positifs, puisque la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série à termes positifs, et convergente (Riemann avec $\frac{3}{2}>1$).

Par somme de séries numériques convergente, on conclut bien que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ est convergente.

15. On utilise le DL $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\underset{u\to 0}{O}(u^3)$, car $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ :
$$u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1 = \left(1+\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{8}\frac{1}{n}+\underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)-1 = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{v_n}+\underbrace{\frac{-1}{8}\frac{1}{n}}_{w_n}+\underbrace{\underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{z_n}.$$
Or
- la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ est convergente d'après le critère des séries alternées
- et la série numérique $\sum z_n$ est une série absolument convergente par le critère de domination des séries à termes positifs (car la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann, $\frac{3}{2}>1$) et est à termes positifs).

Si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ était convergente, par combinaison linéaire, on aurait que la série numérique
$$\sum w_n = \sum u_n - \sum v_n - \sum z_n$$
serait convergente, ce qui est faux (Riemann).
Donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est divergente (bien qu'elle soit alternée !).

16. D'après la formule de Stirling, on a :
$$\frac{n!}{n^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}n}{e^n}.$$
Or
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{\sqrt{2\pi}n}{e^n} = 0$$
par croissance comparée (car $e>1$), donc
$$\frac{n!}{n^n} = \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2>1$) et est à termes positifs.
Ainsi d'après le critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n!}{n^n}$ est absolument convergente, donc convergente.

17. D'après la formule de Stirling, on a :

$$\frac{(2n)!}{n^n n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{n^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\,2^{2n}}{e^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2}\left(\frac{4}{e}\right)^n$$

et $\sqrt{2}\left(\frac{4}{e}\right)^n$ est le terme général d'une série divergente (série géométrique de raison $\frac{4}{e} > 1$) et positif.
Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(2n)!}{n^n n!}$ est donc divergente.

**Remarque.** Ou, plus simplement, comme $\frac{4}{e} > 1$, $\sqrt{2}\left(\frac{4}{e}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc on a divergence grossière.

18. D'après la formule de Stirling, on a :

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi 2n}\,\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2^{2n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ est divergente (Riemann), et à termes positifs.
Donc d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ est divergente.

**Exercice 2. 1)** Pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Donc, par somme télescopique, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi on a la convergence de la série numérique (car la limite de ses sommes partielles **existe et est finie**), et

$$\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-k} = 1}.$$

**2)** Pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$, on a :

$$\ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) = \ln(k) + \ln(k+2) - 2\ln(k+1).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\ln(k) + \sum_{k=2}^{n}\ln(k+2) - 2\sum_{k=2}^{n}\ln(k+1) \\
&\underset{\substack{i=k+2\\ j=k+1}}{=} \sum_{k=2}^{n}\ln(k) + \sum_{i=4}^{n+2}\ln(i) - 2\sum_{j=3}^{n+1}\ln(j) \\
&= \ln(2) + \ln(3) + \sum_{k=4}^{n}\ln(k) + \sum_{i=4}^{n}\ln(i) + \ln(n+1) + \ln(n+2) - 2\ln(3) - 2\sum_{j=4}^{n}\ln(j) - 2\ln(n \\
&= \ln(2) - \ln(3) + \ln\left(\tfrac{n+2}{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln(2) - \ln(3)
\end{aligned}$$

Donc la série numérique est convergente (car la limite de ses sommes partielles **existe et est finie**) et sa somme vaut

$$\boxed{\ln(2) - \ln(3)}.$$

**3)** • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq n^2\left|(-1)^n\frac{\cos(n)}{2^n}\right| \leq \frac{n^2}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée, car $2>1$), donc le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left|(-1)^n\frac{\cos(n)}{2^n}\right| = 0, \qquad \text{soit} \qquad (-1)^n\frac{\cos(n)}{2^n} = \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2>1$) et est à termes positifs, donc le critère de domination des séries à termes positifs donne que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{\cos(n)}{2^n}$ est absolument convergente donc convergente.

• La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{-e^i}{2}\right)^n$ converge absolument (c'est une série géométrique de raison $\frac{-e^i}{2}$ avec $\left|\frac{-e^i}{2}\right| = \frac{1}{2}\in]-1,1[$), donc en prenant la partie réelle de sa somme, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(n)}{2^n} = \mathcal{R}e\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-e^i}{2}\right)^n\right).$$

Or, on a

$$S := \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-e^i}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{e^i}{2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\cos(1)}{2}\right)+i\frac{\sin(1)}{2}}$$

(somme d'une série géométrique).
En multipliant/divisant par le conjugué du dénominateur, on a :

$$S = \frac{\left(1+\frac{\cos(1)}{2}\right)-i\frac{\sin(1)}{2}}{\left(1+\frac{\cos(1)}{2}\right)^2+\frac{\sin^2(1)}{4}} = \frac{\left(1+\frac{\cos(1)}{2}\right)-i\frac{\sin(1)}{2}}{\frac{5}{4}+\cos(1)}.$$

En prenant la partie réelle, on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(n)}{2^n} = \frac{4+2\cos(1)}{5+4\cos(1)}}.$$

**4)** On a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{n^2}{n!} = 0, \qquad \text{ainsi} \qquad \frac{n^2}{n!} = \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puis, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2>1$) et à termes positifs. Donc d'après le critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n^2}{n!}$ est absolument convergente, donc convergente. Puis,

$$S := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

car les deux sommes sont convergentes. Donc

$$S = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^n}{n!} = \boxed{2e}$$

**5)** La série numérique $\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(2p+1)^2}$ converge absolument (donc converge), par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, car

$$\frac{1}{(2p+1)^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4p^2},$$

et que la série numérique $\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2}$ est une série convergente (Riemann, $2>1$) à termes positifs. Puis : pour tout $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n^2} &= \sum_{\substack{1\le n\le 2N\\ n \text{ pair}}}\frac{1}{n^2}+\sum_{\substack{1\le n\le 2N\\ n \text{ impair}}}\frac{1}{n^2}\\ &= \sum_{1\le 2p\le 2N}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{1\le 2p+1\le 2N}\frac{1}{(2p+1)^2}\\ &= \sum_{p=1}^{N}\frac{1}{4p^2}+\sum_{p=0}^{N-1}\frac{1}{(2p+1)^2}\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}.$$

**6)** Puis, $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente (Riemann, $2 > 1$), donc la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.

**Remarque.** On peut aussi appliquer le critère des séries alternées...

Pour calculer la somme de la série, il suffit alors de calculer la limite des sommes partielles d'indice paire (par exemple) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{\substack{1\le n\le 2N \\ n \text{ pair}}} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{\substack{1\le n\le 2N \\ n \text{ impair}}} \frac{(-1)^n}{n^2} \\
&= \sum_{1\le 2p\le 2N} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{1\le 2p+1\le 2N} \frac{1}{(2p+1)^2} \\
&= \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} - \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

(en réutilisant la série calculée en (5)). Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}.$$

**Exercice 3.** Comme la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est convergente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \ge n_0$,

$$0 \le a_n \le 1$$

(car la suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de termes positifs par hypothèse).

1. Avec le $n_0$ fixé précédemment, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \ge n_0$,

   $$0 \le a_n^2 \le a_n \qquad \text{car} \qquad 0 \le a_n \le 1.$$

   Comme la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2$ est convergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + a_n \ge 1 > 0$, donc $\frac{a_n}{1+a_n}$ existe.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$0 \le \left|\frac{a_n}{1+a_n}\right| \le a_n$$

   car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \ge 0$ donc $1 + a_n \ge 1$. Donc d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{1+a_n}$ est convergente.
3. Comme $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a

   $$\sin(a_n) \underset{n\to\infty}{\sim} a_n.$$

   Et $a_n \ge 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Comme la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(a_n)$ est convergente.

4. On ne sait pas : par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$a_n = \frac{1}{n^2},$$
alors la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt{a_n}$ est divergente. Par contre, si pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \frac{1}{n^4},$$
la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt{a_n}$ est convergente.
Et dans les deux cas, on a bien $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ convergente...
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq \sqrt{a_n\ a_{n+1}} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$
(car $\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}\right)^2 \geq 0$, il suffit de développer...).
Puis, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1}$ converge aussi, et enfin par combinaison linéaire, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ converge.
Ainsi d'après le critère de comparaison des séries à terme positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{a_n\ a_{n+1}}$ est convergente.

**Exercice 4.** Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, un DL donne :
$$\begin{aligned} u_n := \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n+1} + \beta\sqrt{n+2} &= \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n}\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} + \beta\sqrt{n}\sqrt{1+\tfrac{2}{n}} \\ &= \sqrt{n} + \alpha\sqrt{n}\left(1 + \tfrac{1}{2n} - \tfrac{1}{8n^2} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) + \beta\sqrt{n}\left(1 + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (1+\alpha+\beta)\sqrt{n} + \left(\tfrac{\alpha}{2}+\beta\right)\tfrac{1}{\sqrt{n}} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$
Donc, si $1+\alpha+\beta \neq 0$,
$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} (1+\alpha+\beta)\sqrt{n},$$
et $u_n$ ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
Si $1+\alpha+\beta = 0$ et $\beta + \frac{\alpha}{2} \neq 0$, alors
$$\frac{u_n}{\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}},$$
et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann, $\frac{1}{2} \leq 1$) et est à termes positifs, donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$ diverge, donc (en multipliant par la constante non nulle $\frac{\alpha}{2}+\beta$), la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
Si $1+\alpha+\beta = 0$ et $\beta + \frac{\alpha}{2} = 0$, alors
$$u_n = \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$
or la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$) et est à termes positifs, donc par le critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge (absolument).
Donc
$$\text{la série converge si et seulement si } \left(1+\alpha+\beta = 0 \text{ et } \tfrac{\alpha}{2}+\beta = 0\right),$$
c'est-à-dire si et seulement si
$$\boxed{\alpha = -2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\beta = 1}.$$
Puis,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})\right).$$
On a donc une série télescopique et $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (quantité conjuguée). Ainsi
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}\right) = \sqrt{0} - \sqrt{0+1} = -1}.$$

**Exercice 5. 1)** Remarquons que

$$I_n = 2\sqrt{n} - 2 \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} I_{n+1}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [k, k+1]$, on a

$$0 < k \leq t \leq k+1, \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

(car la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$).
Alors, par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens »),

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{d}t \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

donc en sommant ces inégalités pour $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient (par relation de Chasles) :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{d}t \underset{\text{Chasles}}{\sim} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = I_{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \underset{p=k+1}{=} \sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{p}} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1.$$

Donc $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car $S_n \geq I_{n+1} = 2\sqrt{n+1} - 2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$), et

$$1 \geq \frac{I_{n+1}}{S_n} \geq 1 + \frac{1}{S_n\sqrt{n+1}} - \frac{1}{S_n},$$

donc par théorème d'encadrement,

$$S_n \underset{n\to\infty}{\sim} I_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} I_n.$$

**2)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n &= \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{n}\left(\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) - 2\sqrt{n}\left(\tfrac{1}{2n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente (car $\frac{3}{2} > 1$) et à termes positifs. Donc le critère de domination des séries à termes positifs donne que la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_{n+1} - u_n)$$

converge absolument, donc converge.
Or, d'après le cours de PCSI, la convergence de la série télescopique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(u_{n+1} - u_n)$ est équivalente à la convergence de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

**Exercice 6.** Soit

$$f : t \in [0, +\infty[ \mapsto \sqrt{t} \in \mathbb{R}.$$

La fonction $f$ est continue et croissante sur $[0, +\infty[$. On pourra s'aider d'un dessin pour mieux comprendre la suite de l'exercice.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [k-1, k]$ on a :

$$0 \leq k-1 \leq t \leq, \qquad \text{donc} \qquad f(t) \leq f(k),$$

et pour tout $t \in [k, k+1]$ on a :

$$0 \leq k \leq t \leq k+1, \qquad \text{donc} \qquad f(k) \leq f(t).$$

Par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens »), on a alors

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} f(k)\mathrm{d}t = f(k) \qquad \text{et} \qquad f(k) = \int_{k}^{k+1} f(k)\mathrm{d}t \leq \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$$

Donc, pour $N \in \mathbb{N}^*$, en sommant pour $k = 1$ à $N$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{N} f(k) = S_N \leq \sum_{k=1}^{N} \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$$

soit par la relation de Chasles :

$$\frac{2}{3}N^{\frac{3}{2}} = \int_0^N \sqrt{t}\mathrm{d}t \leq S_N \leq \int_1^{N+1} \sqrt{t}\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{2}{3}\left((N+1)^{\frac{3}{2}} - 1\right)}_{\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{3}N^{\frac{3}{2}}}$$

Donc

$$S_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}N^{\frac{3}{2}}$$

par le théorème des gendarmes.
Ainsi

$$\frac{1}{S_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3}{2}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$) et est à termes positifs, donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{S_n}$ est convergente.

**Exercice 7.** • Si $b > a$ (donc $n^a = \underset{n\to\infty}{\sim} o(n^b)$), on a alors :

$$\frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^b} > 0,$$

et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^b}$ est à termes positifs, et convergente si et seulement si $b > 1$ (Riemann). Le critère d'équivalence des séries à termes positifs donne alors que

$$\text{la série numérique } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad b > 1.$$

• Si $a > b$ (donc $(-1)^n n^b = \underset{n\to\infty}{\sim} o(n^a)$) : si $a \leq 0$, alors

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^a}$$

ne tend pas vers 0, donc il y a divergence grossière.
On suppose donc $a > 0$. On a alors (en faisant un DL, car $n^{b-a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n n^b} &= \frac{(-1)^n}{n^a}\frac{1}{1+(-1)^n n^{b-a}} \\
&= \frac{(-1)^n}{n^a}\left(1 - (-1)^n n^{b-a} + \underset{n\to\infty}{o}\left(n^{b-a}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a-b}} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{2a-b}}\right)
\end{aligned}$$

Or la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^a}$ est convergente si $a > 0$ (par le critère des séries alternées, qui s'applique car la suite numérique $\left(\frac{1}{n^a}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante (car $a > 0$) et tend vers 0 (car $a > 0$)).
Puis,

$$\frac{1}{n^{2a-b}} + o\left(\frac{1}{n^{2a-b}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2a-b}} > 0,$$

or la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2a-b}}$ est à termes positifs, et converge si et seulement si $2a - b > 1$ (Riemann). Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{(-1)^n}{n} - u_n\right)$ converge si et seulement si $2a - b > 1$.
Par addition (d'une série convergente et d'une série divergente, ou bien de deux séries convergentes), on en déduit que

$$\text{la série numérique } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} -u_n \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2a-b>1,$$

donc en multipliant par $-1$, que

$$\text{la série numérique } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2a-b>1.$$

• Si $a=b$, $u_n$ n'existe pas, car on a une division par 0 pour les $n$ impairs.

Donc

$$\text{la série numérique } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n n^b} \text{ est convergente} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Big((b>a \text{ et } b>1) \text{ ou } (a>b \text{ et } a>0 \text{ et } b<2a-1)\Big).$$

**Exercice 8.** • Si $0<a<1$, $a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc

$$\ln(1+a^{3n}) \underset{n\to\infty}{\sim} a^{3n}, \qquad \text{puis} \qquad u_n \underset{n\to\infty}{\sim} a^{2n} > 0.$$

Comme la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^{2n}$ est une série géométrique de raison $a^2$ avec $a^2 \in ]0,1[$, elle converge. Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.
• Si $a>1$, $a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, et donc

$$\ln(1+a^{3n}) = \ln(a^{3n}) + \ln\left(a^{-3n}+1\right) = \underbrace{3n\ln(a)}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty} + \underbrace{\ln\left(a^{-3n}+1\right)}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0} \underset{n\to\infty}{\sim} 3n\ln(a),$$

donc

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3n\ln(a)}{a^n} > 0.$$

Notons $v_n = \frac{n}{a^n} > 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{an} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a} \in ]0,1[,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge absolument, donc converge, et donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.
• Si $a=1$, $u_n = \ln(2)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et la série diverge donc grossièrement.

**Exercice 9.** Comme $\ln(1+u) = u + \underset{u\to 0}{O}(u^2)$ et $\frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{v_n} + \underbrace{\underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{w_n}.$$

Or

- la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ est convergente d'après le critère des séries alternées (car la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et tend vers 0).
- Et la série numérique $\sum w_n$ est absolument convergente par le critère de domination (car la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2>1$) et est à termes positifs).

Ainsi la série numérique $\sum_{n\geq 2} u_n$ s'écrit comme la somme de deux séries convergentes, donc est convergente.
Calcul de la somme : Notons $(S_n)_{n\geq 2}$ la suite numérique des sommes partielles de la série numérique $\sum_{n\geq 2} u_n$.
Regardons ce qu'il se passe pour les premiers termes :

$$S_3 = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$S_5 = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{5}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{2n} + u_{2n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) + \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = 0.$$

Donc la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite nulle : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(u_{2k} + u_{2k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0,$$

elle converge donc vers 0.
Comme la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ est convergente (car la série converge), elle a nécessairement la même limite que la suite extraite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$, donc la somme vaut

$$\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n = 0}.$$

**Exercice 10.**

1. On fait un DL, compte tenu du fait que $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left(\tfrac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\right) + \ln\left(\tfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^\alpha\right) + \ln\left(1 - \tfrac{\alpha}{n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \ln\left(1 + \tfrac{\alpha}{n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) + \ln\left(1 - \tfrac{\alpha}{n} + O\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \tfrac{\alpha}{n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right) - \tfrac{\alpha}{n} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right) \\ &= \underset{n\to\infty}{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

   Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs.
   Donc, d'après le critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

2. La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ est convergente, or elle est télescopique, donc par le cours de PCSI, on en déduit que la suite $\big(\ln(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$.
   Donc, par continuité de la fonction exp en $\ell$, on a

$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^\ell > 0.$$

   Notons alors $A = e^\ell$, on a bien $A > 0$, et

$$n^\alpha u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A.$$

   Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}$ (car $A \neq 0$). Or la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ est à termes positifs, et converge si et seulement si $\alpha > 1$ (Riemann), et donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{A}{n^\alpha}$ est à termes positifs, et converge si et seulement si $\alpha > 1$ (car $A \neq 0$).
   Donc, par critère d'équivalence des séries à termes positifs (car $A > 0$),

$$\text{la série numérique } \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha > 1.$$

**Exercice 11.** • Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien définie car il s'agit du reste d'une série de Riemann convergente ($2 > 1$).
On pose

$$f : t \in [1, +\infty[ \mapsto \frac{1}{t^2} \in \mathbb{R},$$

la fonction $f$ est une fonction décroissante et continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a

$$0 < k \leq t \leq k+1, \qquad \text{donc} \qquad f(t) \leq f(k),$$

et pour tout $t \in [k-1, k]$, on a

$$0 < k-1 \leq t \leq k, \qquad \text{donc} \qquad f(k) \leq f(t).$$

Alors, par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens »),

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}t = f(k) \qquad \text{et} \qquad f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $N \geq n+1 \geq 2$, en sommant les inégalités précédentes (qui sont dans le même sens) pour $k$ variant de $n+1$ à $N$, on a (par la relation de Chasles) :

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \underset{\text{Chasles}}{=} \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \underset{\text{Chasles}}{=} \int_n^N f(t)\mathrm{d}t.$$

Puis on sait calculer une primitive de la fonction $f$ :

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_{n+1}^{N+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n+1}$$

et

$$\int_n^N f(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_n^N = \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n}.$$

Comme on sait que la série définissant $u_n$ converge, on a aussi

$$\sum_{k=n+1}^{N} f(k) = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} u_n.$$

Par conséquent, en faisant tendre $N \to +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, et est à termes positifs. Donc, par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est divergente.

• Attention, ici on **ne** peut **pas** appliquer le même raisonnement que précédemment car on a une série alternée.
Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n$ est bien définie car c'est le reste d'une série absolument convergente (cf. le début de l'exercice).
Puis, la suite numérique

$$\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$$

est positive (donc la série définissant $v_n$ est alternée), décroissante et tend vers 0, donc le critère des séries alternées s'applique. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |v_n| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

(la somme d'une série alternée est majorée, en valeur absolue, par la valeur absolue de son premier terme).
Or, la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^2} \underset{k=n+1}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$$

est une série convergente (Riemann, $2 > 1$), donc le critère de comparaison des séries à termes positifs donne que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est absolument convergente, donc convergente.

**Exercice 12. 1)** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Intégrons par parties : les fonctions

$$f \qquad \text{et} \qquad t \mapsto (n-1-t)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, donc sur $[n-1, n]$ (car $n \geq 2$), et donc le théorème de PCSI s'applique :

$$\int_{n-1}^{n} (n-1-t)f'(t)\mathrm{d}t = [(n-1-t)f(t)]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} -f(t)\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n) = w_n.$$

**2)** Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, par inégalité triangulaire généralisée (car « les bornes sont dans le bon sens »), puis croissance de l'intégrale (en utilisant que, pour $t \in [n-1, n]$, on a $0 \leq t+1-n \leq 1$) (et là encore car « les bornes sont dans le bon sens »),

$$0 \leq |w_n| \leq \int_{n-1}^{n} |n-1-t||f'(t)|\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} (t+1-n)|f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$, par positivité de l'intégrale, comme « les bornes sont dans le bon sens » (et que la fonction $f'$ est intégrable sur $[N, +\infty[$, donc $|f'|$ aussi), et $|f'| \geq 0$, on a

$$0 \leq \int_{N}^{+\infty} |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

On en déduit : pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\mathrm{d}t \underset{\text{Chasles}}{=} \int_{1}^{N} |f'(t)|\mathrm{d}t \leq \int_{1}^{N} |f'(t)|\mathrm{d}t + \int_{N}^{+\infty} |f'(t)|\mathrm{d}t \underset{\text{Chasles}}{=} \int_{1}^{+\infty} |f'(t)|\mathrm{d}t < +\infty$$

(car $f'$ est intégrable), donc la suite des sommes partielles de la série numérique à termes positifs

$$\sum_{n \geq 2} \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\mathrm{d}t$$

est majorée (par $\int_1^{+\infty} |f'(t)|\mathrm{d}t$), donc converge. Donc la série numérique $\sum\limits_{n \geq 2} \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n \geq 2} w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

**Remarque.** Donc, sous les hypothèses de l'exercice, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n)$ converge si et seulement si la série numérique $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ converge, donc (par la relation de Chasles) si et seulement si la suite numérique $\left(\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite finie si $n \to \infty$ (ce qui est le cas si l'intégrale est semi-convergente en $+\infty$, mais ce n'est pas nécessaire *a priori*).

**3) Application :** • Soit

$$f : t \mapsto \frac{\cos\big(\ln(t)\big)}{t},$$

alors la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t \in ]0, +\infty[$,

$$f'(t) = -\frac{\sin\big(\ln(t)\big)}{t^2} - \frac{\cos\big(\ln(t)\big)}{t^2},$$

donc

$$|f''(t)| \leq \frac{2}{t^2}$$

(car $|\sin| \leq 1$ et $|\cos| \leq 1$). La fonction $f'$ étant continue sur $[1, +\infty[$, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann, $2 > 1$), le critère de comparaison permet d'affirmer que la fonction $f'$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc les hypothèses de la question 2 sont vérifiées.

• Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{1}^{N} \frac{\cos\big(\ln(t)\big)}{t}\mathrm{d}t \underset{u=\ln(t)}{=} \int_{0}^{\ln(N)} \cos(u)\mathrm{d}u = \sin\big(\ln(N)\big)$$

qui n'a pas de limite si $N \to +\infty$, donc (par la remarque précédente), la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$ diverge

**Remarque.** On peut justifier cette absence de limite assez facilement en fait : pour $k \in \mathbb{N}$, si $N_k = \lfloor e^{2k\pi} \rfloor = e^{2k\pi} + \underset{k\to+\infty}{O}(1)$, on a

$$\ln(N_k) = \ln(e^{2k\pi}) + \ln\left(1 + \underset{k\to+\infty}{O}(e^{-2k\pi})\right) = 2k\pi + \underset{k\to+\infty}{O}(e^{-2k\pi})$$

et donc

$$\sin\big(\ln(N_k)\big) = \sin\left(2k\pi + \underset{k\to+\infty}{O}(e^{-2n\pi})\right) = \sin\left(\underset{k\to+\infty}{O}(e^{-2n\pi})\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mais si, pour $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \lfloor e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} \rfloor = e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}} + \underset{k\to+\infty}{O}(1)$, on a alors

$$\sin\big(\ln(N_k)\big) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} + \underset{k\to+\infty}{O}(e^{-2k\pi})\right) = \cos\left(\underset{k\to+\infty}{O}(e^{-2k\pi})\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc il existe deux suites extraites de la suite numérique $\Big(\sin\big(\ln(n)\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui n'ont pas la même limite, donc la suite numérique $\Big(\sin\big(\ln(n)\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.

**Exercice 13.** Étudions $u_n$ grâce à la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

donc

$$(n!)^3 \underset{n\to\infty}{\sim} 2\pi n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{3n}$$

puis

$$(3n)! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(3n)}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}.$$

Donc :

$$u_n = \frac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(3n)}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}{\alpha^{3n}\sqrt{2\pi n}^3\left(\frac{n}{e}\right)^{3n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{2\pi n}\left(\frac{3}{\alpha}\right)^{3n}$$

• Si $\alpha > 3$ la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente. En effet

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{\sqrt{3}}{2\pi n}\left(\frac{3}{\alpha}\right)^{3n} = 0$$

par croissance comparée (car $\frac{3}{\alpha} \in ]-1,1[$). Donc

$$u_n = \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs. D'après le critère de domination des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente.
• Si $0 < \alpha < 3$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est divergente (grossièrement) car

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{2\pi n}\left(\frac{3}{\alpha}\right)^{3n} = +\infty$$

par croissance comparée (car $\frac{3}{\alpha} > 1$). Donc la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.
• Si $\alpha = 3$ alors

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{2\pi n},$$

et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ diverge (Riemann), et est à termes positifs, d'où par le critère d'équivalence des séries à termes positifs (et car $\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \neq 0$), la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

**Exercice 14.**

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose
$$z_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w_k = \frac{1}{k!}.$$
Alors les séries numériques
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} z_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} w_k$$
convergent absolument et
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k\right) = \frac{\pi^2 e}{6}.$$
De plus la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est le produit de Cauchy de ces deux séries absolument convergentes (car, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}$$
(en faisant attention que le terme $k = 0$ de la somme est nul, puisque $z_0 = 0$)). Donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente et sa somme vaut
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{\pi^2 e}{6}}$$
(on peut faire partir la somme de $n = 1$, car $u_0 = z_0 w_0 = 0$).
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose
$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}.$$
La série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (car, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
(en faisant attention que le terme $k = 0$ et $k = n$ de la somme est nul, puisque $a_0 = b_0 = 0$)), donc converge absolument. Et
$$\sum_{n=2}^{\infty} v_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = \boxed{\frac{\pi^4}{36}}.$$
(la somme part de $n = 2$, car $v_0 = a_0 b_0 = 0$ et $v_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 + 0 = 0$).

**Exercice 15.**

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$1 + x \leq e^x,$$
donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$1 - e^x \leq -x.$$
En remplaçant $x$ par $-x$ (cela reste bien un réel), on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$1 - e^{-x} \leq x.$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \leq u_n.$$
Donc la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Elle est strictement positive. En effet, montrons $u_n > 0$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

**Initialisation :** pour $n = 0$, $u_0 > 0$ par hypothèse.
**Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n > 0$. Alors $-u_n < 0$, et par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$e^{-u_n} < e^0 = 1, \qquad \text{soit} \qquad u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} > 0,$$

d'où l'hérédité.
**Conclusion :** on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

**Remarque.** Pour cette question, positif suffit. Mais $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ permet de justifier l'existence de la série considérée à la question 4.

La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive (donc minorée par 0), donc convergente (par le théorème de la limite monotone), et converge vers un réel $\ell$ qui vérifie

$$\ell = 1 - e^{-\ell}$$

(par continuité de la fonction exp en $-\ell$).
Or, si on pose

$$g : x \mapsto 1 - e^{-x} - x,$$

alors la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^{-x} - 1.$$

Donc $g' < 0$ sur $]0, +\infty[$ et $g' > 0$ sur $]-\infty, 0[$. Donc la fonction $g$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) < g(0) = 0.$$

Or, $g(\ell) = 0$, donc

$$\ell = 0.$$

Donc la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$ est une série alternée car $u_n \geq 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
La suite numérique

$$\big(|(-1)^n u_n|\big)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

est décroissante et tend vers 0 (cf. question 1), donc d'après le critère des séries alternées, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$ est convergente.

3. On a en effectuant un DL de $u_{n+1}$ (car $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) :

$$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = 1 - \big(1 - u_n + u_n^2 + \underset{n\to\infty}{o}(u_n^2)\big) \qquad \text{donc} \qquad u_n^2 + \underset{n\to\infty}{o}(u_n^2) = u_n - u_{n+1}$$

Donc

$$u_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} u_n - u_{n+1}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_n - u_{n+1})$ est une série télescopique, qui converge si et seulement si la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (cours de PCSI), ce qui est le cas (puisque la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0).
Puis, $u_n^2 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc le critère d'équivalence des séries à termes positifs donne que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ a même nature que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_n - u_{n+1})$, donc converge.

4. On a de nouveau une série télescopique car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\big(u_{n+1}\big) - \ln\big(u_n\big).$$

mais la suite numérique $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (tend vers $-\infty$, puisque la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0) donc la série considérée est divergente.

**Exercice 16. 1)** On le montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
**Initialisation :** pour $n = 1$, on a
$$u_1 = \cos(0) = 1,$$
donc l'initialisation est vérifiée.
**Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\cos(1) \leq u_n \leq 1$. Comme la fonction cos est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a pour tout $x \in [0, 1]$,
$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \cos(1) \leq \cos(x) \leq 1$$
(car $[0, 1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). Donc si
$$0 \leq \cos(1) \leq u_n \leq 1,$$
alors en prenant $x = u_n$ dans l'inégalité précédente, on a
$$\cos(1) \leq u_{n+1} = \cos(u_n) \leq 1,$$
d'où l'hérédité.
**Conclusion :** on a bien montré, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que $\cos(1) \leq u_n \leq 1$.
**2)** La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel $x \in [0, 1]$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ donc
$$\left|\cos'(x)\right| \leq \sin(x) \leq \sin(1)$$
(car sin est croissant et positif sur $[0, 1]$), donc par inégalité des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$,
$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y| \sin(1).$$
On montre alors le résultat demandé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ :
**Initialisation :** pour $n = 1$,
$$|u_2 - u_1| = |\cos(1) - 1| = 1 - \cos(1) = \big(1 - \cos(1)\big) \sin^0(1) = \big(1 - \cos(1)\big) \sin^{1-1}(1),$$
donc on a même l'égalité.
**Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons
$$|u_{n+1} - u_n| \leq \big(1 - \cos(1)\big) \sin^{n-1}(1).$$
Alors
$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |\cos(u_{n+1}) - \cos(u_n)| \leq |u_{n+1} - u_n| \sin(1) \leq \big(1 - \cos(1)\big) \sin^{n-1}(1) \sin(1) = \big(1 - \cos(1)\big) \sin^{(n+1)-1}(1)$$
(car $u_n$ et $u_{n+1}$ sont dans $[0, 1]$). D'où l'hérédité.
**Conclusion :** on a bien montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq \big(1 - \cos(1)\big) \sin^{n-1}(1).$$
**3)** Comme
$$0 \leq \sin(1) < 1,$$
la série géométrique de raison $\sin(1)$ converge, donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \big(1 - \cos(1)\big) \sin^{n-1}(1)$ est convergente. Donc par le critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série télescopique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \big(u_{n+1} - u_n\big)$ est absolument convergente, donc convergente. Donc (cours de PCSI), la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

**Exercice 17.**

1. • Si $\alpha > 1$, on
$$\left|\frac{e^{\frac{2i\pi}{7}n}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$$
qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
Donc si $\alpha > 1$, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
• Si $\alpha \leq 0$, $\lim_{n \to +\infty} |u_n|$ ne tend pas vers 0 (tend vers $+\infty$ si $\alpha < 0$, 1 si $\alpha = 0$). Donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement.

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{2i\pi}{7}}\right)^k = e^{\frac{2i\pi}{7}} \frac{1 - e^{\frac{2in\pi}{7}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{7}}}$$

(car $e^{\frac{2i\pi}{7}} \neq 1$, et on a reconnu la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{2i\pi}{7}}$), donc par inégalité triangulaire,

$$|A_n| \leq \frac{|1| + \left|e^{\frac{2in\pi}{7}}\right|}{\left|1 - e^{\frac{2i\pi}{7}}\right|} = \frac{2}{\left|1 - e^{\frac{2i\pi}{7}}\right|} = M.$$

Donc la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée (par $M$).

(b) On remarque que pour $k \geq 2$ :

$$e^{\frac{2ik\pi}{7}} = A_k - A_{k-1}$$

(et cela reste vrai pour $k = 1$ si l'on pose $A_0 = 0$, ce que l'on fera). Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{2i\pi}{7}k}}{k^\alpha} & = & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}(A_k - A_{k-1}) \\ & = & \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{k-1}}{k^\alpha} \\ & = & \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{(k+1)^\alpha} \\ & = & \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) - \underbrace{A_0}_{=0} \end{array}$$

(c) D'après le résultat de la question 2a, on a :

$$\left|\frac{A_n}{n^\alpha}\right| \leq \frac{M}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(car $\alpha > 0$). De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq \left|A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right| \leq M \left|\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right| = M \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$$

Or

$$\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^\alpha}\right) = \frac{1}{k^\alpha}\left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{k} + \underset{k\to+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\alpha}{k^{\alpha+1}},$$

et la série numérique $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha > 0$, et est à termes positifs.

Donc, par le critère d'équivalence, puis par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} A_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ est absolument convergente, donc convergente. Donc la suite de ses sommes partielles a une limite finie. Or, on a vu :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \underbrace{\frac{A_n}{n^\alpha}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + M \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)}_{\substack{\text{Somme partielle d'une} \\ \text{série convergente} \\ \text{donc a une limite finie}}}$$

Donc la suite numérique $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Donc la série de terme général $u_n$ est convergente, puisque la suite de ses sommes partielles a une limite finie.

**Exercice 18. 1)** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x_k > 0$, donc $x_k + 1 > 1$, et donc $\frac{1}{x_k+1}$ existe. Donc par produit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe. De plus, comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k > 0$, on a

$$\frac{x_k}{x_k + 1} > 0,$$

et comme le produit de réels strictement positif est un réel strictement positif, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n > 0.$$

Pour étudier la monotonie de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut alors regarder : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1}+1} < 1,$$

et donc la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante.
La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée (par 0), donc par le théorème de la limite monotone, la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\lambda \geq 0$.
De plus, comme la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante, on a $u_n \leq u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc à la limite,

$$\lambda \leq u_0 = \frac{x_0}{x_0+1} < 1.$$

**2)** On pose $x_n = n+1$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (donc $x_n > 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et la suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est un produit télescopique et on a

$$u_n = \frac{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(k+2)} \underset{p=k+1}{=} \frac{\prod_{k=0}^{n}(k+1)}{\prod_{p=1}^{n+1}(p+1)} = \frac{(0+1)}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}.$$

Donc

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

**3)** O a :

$$\lambda \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{« la suite numérique } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \lambda > 0 \text{ »} \quad \Leftrightarrow \quad \text{« la suite numérique } \big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge »}$$

(si on note $\mu$ la limite de la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, alors on a $\mu = \ln(\lambda)$, ou ce qui revient au même, $\lambda = e^{\mu} > 0$).
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{x_k+1}\right) = -\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{x_k+1}{x_k}\right) = -\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right),$$

donc

$$\text{« la suite numérique } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \lambda > 0 \text{ »} \quad \Leftrightarrow \quad \text{« la série numérique } \sum_{k\in\mathbb{N}} \ln\left(1+\tfrac{1}{x_k}\right) \text{ converge »}.$$

Or, comme $x_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \longrightarrow +\infty$, on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right) \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{x_k},$$

et comme la série numérique $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{x_k}$ est une série à termes positifs, le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs donne :

$$\text{« la série numérique } \sum_{k\in\mathbb{N}} \ln\left(1+\tfrac{1}{x_k}\right) \text{ converge »} \quad \Leftrightarrow \quad \text{« la série numérique } \sum_{k\in\mathbb{N}} \tfrac{1}{x_k} \text{ converge »}.$$

On a donc bien montré :

$$\text{« la suite numérique } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \lambda > 0 \text{ »} \quad \Leftrightarrow \quad \text{« la série numérique } \sum_{k\in\mathbb{N}} \tfrac{1}{x_k} \text{ converge »}.$$

**4)** • Par récurrence immédiate, on a $x_n > 1$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On peut donc considérer la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(x_n)$.
La relation de récurrence sur la suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = 2v_n.$$

Donc la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 2^n v_0.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \exp(v_n) = \exp\left(2^n \ln(x_0)\right) = x_0^{2^n}$$

(donc on a bien que la suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini, car $x_0 > 1$).
Comme $x_0 > 1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = x_0^{2^n} \geq x_0^n \geq 1,$$

car pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\geq 1} \geq \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \geq n.$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{x_n} \leq \left(\frac{1}{x_0}\right)^n.$$

Comme $x_0 > 1$, on a

$$0 < \frac{1}{x_0} < 1,$$

donc la série géométrique de raison $\frac{1}{x_0}$ converge, donc par critère comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{x_n}$ converge. Donc, d'après la question précédente, la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel non nul.
• Pour trouver la limite, il faut penser à l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on regarde $\frac{1}{1-x_0}u_n$ :

$$\frac{1}{1-x_0}u_n = \frac{1}{1-x_0}\frac{x_0}{1+x_0}\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k+1} = \frac{x_0}{1-x_0^2}\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k+1}.$$

Or $1 - x_0^2 = 1 - x_1$, donc en reportant :

$$\frac{1}{1-x_0}u_n = \frac{x_0}{1-x_1}\frac{x_1}{1+x_1}\prod_{k=2}^{n}\frac{x_k}{x_k+1} = \frac{x_0x_1}{1-x_1^2}\prod_{k=2}^{n}\frac{x_k}{x_k+1} = \frac{x_0x_1}{1-x_2}\prod_{k=2}^{n}\frac{x_k}{x_k+1}.$$

Par récurrence, on obtient

$$\frac{1}{1-x_0}u_n = \frac{x_0x_1\dots x_n}{1-x_{n+1}} = \frac{x_0^{\sum_{k=0}^{n} 2^k}}{1-x_0^{2^{n+1}}} = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1-x_0^{2^{n+1}}}.$$

Montrons-le :
**Initialisation :** pour $n = 0$, $u_0 = \frac{x_0}{1+x_0}$, donc

$$\frac{1}{1-x_0}u_0 = \frac{x_0}{(1-x_0)(1+x_0)} = \frac{x_0}{1-x_0^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{x_0^{2^{0+1}-1}}{1-x_0^{2^{0+1}}} = \frac{x_0^{2-1}}{1-x_0^2} = \frac{x_0}{1-x_0^2},$$

on a donc bien l'égalité. D'où l'initialisation.
**Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\frac{1}{1-x_0}u_n = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1-x_0^{2^{n+1}}}$. Alors

$$\frac{1}{1-x_0}u_{n+1} = \frac{1}{1-x_0}u_n\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1-x_0^{2^{n+1}}}\frac{x_{n+1}}{1+x_{n+1}} = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1-x_0^{2^{n+1}}}\frac{x_0^{2^{n+1}}}{1+x_0^{2^{n+1}}}$$

puis
$$(1-x_0^{2^{n+1}})(1+x_0^{2^{n+1}}) = 1^2 - \left(x_0^{2^{n+1}}\right)^2 = 1 - x_0^{2^{n+1}.2} = 1 - x_0^{2^{(n+1)+1}},$$
et
$$x_0^{2^{n+1}-1} \cdot x_0^{2^{n+1}} = x_0^{2^{n+1}-1+2^{n+1}} = x_0^{2^{(n+1)+1}-1}$$
car
$$2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2} = 2^{(n+1)+1}.$$
En reportant, on en déduit bien l'égalité voulue, d'où l'hérédité.
**Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\frac{1}{1-x_0} u_n = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{1-x_0^{2^{n+1}}}.$$
Puis, comme $x_0 > 1$, $x_0^{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \longrightarrow +\infty$, et donc
$$1 - x_0^{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{-} x_0^{2^{n+1}},$$
puis
$$\frac{1}{1-x_0} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_0^{2^{n+1}-1}}{-x_0^{2^{n+1}}} = -x_0^{-1}.$$
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-x_0}{-x_0}$, donc
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{x_0-1}{x_0}}.$$

**Exercice 19.** Soit $N \in \mathbb{N}$, alors l'ensemble
$$E_N = \{\phi(0), \dots, \phi(N)\}$$
est fini, et donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que
$$\phi(0) \leq M, \quad \dots, \quad \phi(N) \leq M,$$
donc
$$E_N \subset [\![0, M]\!].$$
Comme la fonction $\phi$ est injective, on a
$$\sum_{n=0}^{N} |a_{\phi(n)}| = \sum_{n\in E_N} |a_n|$$
(il n'y a pas plusieurs $\phi(n)$ qui prennent la même valeur), et comme $E_N \subset [\![0, M]\!]$, on a
$$\sum_{n\in E_N} |a_n| \leq \sum_{n\in E_N} |a_n| + \underbrace{\sum_{n\in[\![0,M]\!]\setminus E_N} \underbrace{|a_n|}_{\geq 0}}_{\geq 0} = \sum_{n\in[\![0,M]\!]} |a_n| = \sum_{n=0}^{M} |a_n|.$$
Or, comme la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente, on a
$$\sum_{n=0}^{M} |a_n| \leq K := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$
Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{n=0}^{N} |a_{\phi(n)}| \leq K,$$
donc la série à termes positifs $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_{\phi(n)}|$ est majorée (toutes ses sommes partielles sont majorées par $K$), donc converge.

**Remarque.** On peut montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$
mais cela ne marche **que pour les séries absolument convergentes**...

**Exercice 20. 1)** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, on a $\ln^2(k) \geq 0$, donc
$$u_n = \ln^2(n) + \sum_{k=2}^{n-1} \ln^2(k) \geq \ln^2(n) + \sum_{k=2}^{n-1} 0 = \ln^2(n)$$
(inégalité qui reste vraie si $n = 2$). Donc
$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ diverge grossièrement.
**2)** On fait une comparaison série/intégrale.
La fonction
$$f : x \mapsto \ln^2(x),$$
est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f'(x) = 2\frac{\ln(x)}{x},$$
donc $f(x) > 0$ pour $x \in ]1, +\infty[$, donc la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
Soit ensuite $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a alors par croissance de la fonction $f$,
$$\ln^2(k) \leq \ln^2(t) \leq \ln^2(k+1).$$
Par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans le bon sens), on a alors
$$\ln^2(k) = \int_k^{k+1} \ln^2(k)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \ln^2(k+1)\mathrm{d}t = \ln^2(k+1).$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on somme alors les inégalités de gauche pour $k$ variant de 1 à $n$, ce qui donne (en appliquant la relation de Chasles) :
$$u_n = \ln^2(1) + u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t \underset{\text{Chasles}}{=} \int_1^{n+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t$$
Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on somme ensuite les inégalités de droite pour $k$ variant de 1 à $n-1$, ce qui donne (en appliquant la relation de Chasles) :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t \underset{\text{Chasles}}{=} \int_1^{n} \ln^2(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n+1} \ln^2(k+1) \underset{p=k+1}{=} \sum_{p=2}^{n} \ln^2(p) = u_n$$
**3)** On intègre par parties : les fonctions
$$u : t \mapsto t \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \ln^2(t)$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $[1, x]$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, de dérivées
$$u' : t \mapsto 1 \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto 2\frac{\ln(t)}{t}.$$
Alors le théorème d'intégration par parties de PCSI s'applique :
$$\int_1^x \ln^2(t)\mathrm{d}t = \left[t\ln^2(t)\right]_1^x - \int_1^x t2\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = x\ln^2(x) - 2\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t.$$

On calcule cette nouvelle intégrale de la même façon :

$$\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}\mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1.$$

Donc

$$\boxed{\int_1^x \ln^2(t)\mathrm{d}t = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x - 2}.$$

Puis,

$$\frac{1}{x\ln^2(x)}\int_1^x \ln^2(t)\mathrm{d}t = 1 - \frac{2}{\ln(x)} + \frac{2}{\ln^2(x)} - \frac{2}{x\ln^2(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

d'où l'équivalent demandé.

**4)** • On a

$$(n+1)\ln^2(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln^2(n+1), \qquad \text{puis} \qquad \ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$$

(car $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, qui tend vers 0, est négligeable devant $\ln(n)$, qui tend vers l'infini), et donc

$$(n+1)\ln^2(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln^2(n).$$

Donc

$$\int_1^{n+1} \ln^2(t)\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\sim} (n+1)\ln^2(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln^2(n).$$

En divisant alors les deux inégalités de la question 2 par $n\ln^2(n)$, le théorème des gendarmes donne alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n\ln^2(n)} = 1, \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln^2(n)}.$$

Donc

$$\frac{1}{u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln^2(n)}.$$

• Comme $u_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 2$, le critère d'équivalence des séries à termes positifs s'applique, et donne que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$ est de même nature que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$.

Faisons à nouveau une comparaison série/intégrale : la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{x\ln^2(x)}$$

est dérivable sur $[2, +\infty[$, avec, pour tout $x \in [2, +\infty[$,

$$g'(x) = -\frac{2+\ln(x)}{x^2\ln^3(x)} \leq 0,$$

donc la fonction $g$ est décroissante sur $[2, +\infty[$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, pour tout $t \in [n-1, n]$, par décroissance de la fonction $g$ sur $[n-1, n] \subset [2, +\infty[$, on a

$$g(n) \leq g(t),$$

donc par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens »),

$$g(n) = \int_{n-1}^n g(n)\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^n g(t)\mathrm{d}t.$$

En sommant des inégalités dans le même sens, pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$, on a alors

$$\sum_{n=3}^N g(n) \leq \sum_{n=3}^N \int_{n-1}^n g(t)\mathrm{d}t \underset{\text{Chasles}}{=} \int_2^N g(t)\mathrm{d}t = \int_2^N \frac{1}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^N = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(N)} \leq \frac{1}{\ln(2)}.$$

Donc la suite des sommes partielles de la série numérique

$$\sum_{n\geq 3} g(n) = \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n\ln^2(n)}$$

est majorée (par $\frac{1}{\ln(2)}$), et de plus cette série numérique est à termes positifs. Alors on peut affirmer que cette série numérique converge.
Donc, avec ce qui précède, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$ converge.

**Exercice 21.** • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n := \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$$

car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et car $-\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc

$$-u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

or la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$), et est à termes positifs, donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} -u_n$ converge, donc que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ converge.
• Puis, pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$,

$$\begin{aligned} S_N := \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{N} \big(\ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n)\big) \\ &= \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) + \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) - 2\sum_{n=2}^{N} \ln(n) \end{aligned}.$$

On pose alors $p = n+1$ dans la première somme et $q = n-1$ dans la deuxième, on a alors

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{p=3}^{N+1} \ln(p) + \sum_{q=1}^{N-1} \ln(q) - 2\sum_{n=2}^{N} \ln(n) \\ &= \ln(N+1) - \ln(2) - \ln(N) + \ln(1) \\ &= -\ln(2) + \ln\left(\tfrac{N+1}{N}\right) \\ &= -\ln(2) + \ln\left(1 + \tfrac{1}{N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(2) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)}.$$

**Exercice 22.** Pas de correction pour l'instant