

## TD2 - COMPLÉMENTS SUR LES ESPACES VECTORIELS

### 1 Sommes directes de plusieurs s.e.v.

**Exercice 1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id})$  si et seulement si  $f^3 = f$ .

**Exercice 2.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $F_i = \{P \in E : \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$ . Montrer que les  $F_i$  sont des sous-espaces vectoriels et que

$$F_0 \oplus \cdots \oplus F_n = E.$$

**Exercice 3.** Soit  $E_1, \dots, E_n$  et  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  (espace vectoriel de dimension finie) tel que

$$E_i \subset F_i \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i.$$

Montrer que pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E_i = F_i$ .

### 2 Sous-espaces stables

**Exercice 4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel non réduit à  $\{\vec{0}\}$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant  $f^2 = -\text{Id}_2$ . Soit  $x \in E$  non nul.

1. Montrer que  $f(x)$  n'est pas colinéaire à  $x$ , puis qu'aucune droite de  $E$  n'est stable par  $f$ .
2. Montrer que le plan  $\text{Vect}(x, f(x))$  est stable par  $f$ .

**Exercice 5.** Fixons  $\alpha, \beta, \gamma$  des réels non tous nuls,  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$  et  $u$  la forme linéaire de  $\mathbb{R}^3$  définie par  $u(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer que  $\dim(H) = 2$ .
2. On suppose que  $H$  est stable par  $f$ .
  - (a) Montrer que  $u \circ f$  est une forme linéaire, dont le noyau contient  $H$ .
  - (b) Soit  $(e_1, e_2)$  une base de  $H$  que l'on complète par  $e_3$  en une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Donner l'allure de la matrice de  $u$  et de  $u \circ f$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  et la base canonique de  $\mathbb{R}$ .
  - (c) En déduire (après avoir justifié que  $u(e_3) \neq 0$ ) qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que

$$u \circ f = \lambda u.$$

3. Montrer réciproquement que s'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $u \circ f = \lambda u$ , alors  $H$  est stable par  $f$ .
4. Notons  $A$  la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Déduire des questions 2 et 3 que  $H$  est stable par  $f$

si et seulement si le vecteur  $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  ${}^tA$  (c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A^\top X = \lambda X$ ).

5. Comment caractériser les droites stables par  $f$ ?

**Exercice 6** (CCP 2014 Officiel de la Taupe).

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $H$  un hyperplan, et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Montrer que  $H$  est stable par  $u$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Im}(u + \lambda \text{Id}) \subset H$ .
2. Trouver les sous-espaces stables de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

### 3 Trace

**Exercice 7.** Soit  $u \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$  telle que pour tous  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $u(AB) = u(BA)$ .

1. Rappeler la valeur du produit  $E_{ij}E_{k\ell}$  pour  $(i, j, k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^4$ .
2. Montrer que pour  $i \neq j$ , on a :  $u(E_{ij}) = 0$  et  $u(E_{ii}) = u(E_{jj})$ .
3. En déduire qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que  $u = \alpha \text{tr}$ .

**Exercice 8.**

1. Montrer qu'il n'existe pas de matrices de  $A$  et  $B$  de  $M_n(\mathbb{K})$  telles que :  $AB - BA = I_n$ .
2. Montrer que si deux matrices vérifient  $AB - BA = A$ , alors  $A$  n'est pas inversible.

**Exercice 9.** Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on appelle « forme linéaire sur  $E$  » tout élément de  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ .

1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Montrer que l'application  $\phi_A : M \mapsto \text{tr}(AM)$  est une forme linéaire sur  $M_n(\mathbb{K})$ .
2. Réciproquement, montrer que si  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $M_n(\mathbb{K})$  alors il existe  $A \in M_n(\mathbb{K})$  telle que : pour  $X \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $\varphi(X) = \text{tr}(AX)$  (*Indication : poser  $\psi : A \in M_n(\mathbb{K}) \mapsto \phi_A \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$  et calculer  $\text{tr}(AA^\top)$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\text{tr}(A\bar{A}^\top)$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$* ).
3. Soient  $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$  telles que  $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$  pour tout  $X \in M_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $A = B$ .

**Exercice 10.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  fixés. Soit  $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = -M + \text{tr}(M)A$ .

1. On suppose que  $\text{tr}(A) \neq 1$ , montrer que  $f$  est bijective.
2. On suppose désormais que  $\text{tr}(A) = 1$ , déterminer  $\text{Ker}(f)$ . Montrer que  $\text{Im}(f) = \{M : \text{tr}(M) = 0\}$ .
3. Résoudre  $f(X) = B$ .

### 4 Produit matriciel par blocs

**Exercice 11.** Soit  $M$  une matrice de  $M_n(\mathbb{C})$  et  $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice de  $M_2(\mathbb{C})$  où  $a$  et  $c$  sont non nuls.

1. Montrer que la matrice  $P = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$  est le produit de deux matrices.
2. En déduire le déterminant de  $P$ .

**Exercice 12.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$ .

1. Montrer que  $A$  est inversible si et seulement si  $B$  l'est.
2. Calculer  $B^p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 13.** Soient  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$  et  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$ . On suppose que les matrices  $A, D$  et  $M$  sont inversibles. Exprimer  $M^{-1}$ .

**Exercice 14** (Adapté de E3A 2018). Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $M = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$ . Montrer que  $M$  est inversible si et seulement si  $A - I_n$  et  $A + I_n$  le sont.

**Exercice 15.**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $L \in M_{1,n}(\mathbb{K})$  et  $T \in M_n(\mathbb{K})$ .  
Notons  $M = \left( \begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 0_{n,1} & T \end{array} \right) \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ . Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^k = \left( \begin{array}{c|c} 0 & LT^{k-1} \\ \hline 0_{n,1} & T^k \end{array} \right)$ .
2. En déduire, par récurrence sur  $n$ , que pour toute matrice  $M$  de  $M_n(\mathbb{K})$  triangulaire supérieure stricte (*c'est-à-dire avec les coefficients diagonaux tous nuls*), on a  $M^n = 0_n$ .

## 5 Déterminant de Vandermonde

**Exercice 16.** Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Montrer que si  $P$  est de degré 4, unitaire et que le coefficient en  $X^3$  est nul alors on a

$$D := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ P(a) & P(b) & P(c) & P(d) \end{vmatrix}$$

En déduire  $D$ .

**Exercice 17** (matrice circulante). Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ ,  $A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$  avec  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

Calculer  $AJ$ , en déduire  $\det(AJ)$  puis  $\det(A)$ .

1. Montrer que  $J$  est inversible.
2. Calculer  $AJ$ , en déduire  $\det(AJ)$  puis  $\det(A)$ .

**Exercice 18.** Soient  $n + 1$  nombres complexes  $(z_0, z_1, \dots, z_n)$  deux à deux distincts. Montrer que la famille

$$((X + z_0)^n, (X + z_1)^n, \dots, (X + z_n)^n)$$

est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

## 6 Polynômes interpolateurs de Lagrange

**Exercice 19** (CCP PC 2014 ODLT). Soit  $P \in \mathbb{C}_d[x]$ ,  $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{Q}^{d+1}$  deux à deux distincts tel que  $P(a_k) \in \mathbb{Q}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ . Montrer que  $P \in \mathbb{Q}[X]$ .

**Exercice 20.** Soit  $d \in \mathbb{N}$  et  $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$  deux à deux différents. Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes de  $\mathbb{R}_d[X]$ . On suppose que, pour tout  $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ , la suite numérique  $(P_n(a_i))_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Montrer, à l'aide des polynômes interpolateurs de Lagrange, qu'il existe  $P \in \mathbb{R}_d[X]$  tel que la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $P$ .

## Solutions

### Exercice 1.

★ Calcul préliminaire

$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \vec{0}}$ , et dans ce cas

$$f^3(x) = f^2(f(x)) = f^2(\vec{0}) = \vec{0} = f(x).$$

Ensuite,

$$y \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \Leftrightarrow (f - \text{Id})(y) = \vec{0} \Leftrightarrow f(y) - y = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{f(y) = y}.$$

Et dans ce cas

$$f^3(y) = f^2(f(y)) = f^2(y) = f(f(y)) = f(y).$$

Enfin,

$$z \in \text{Ker}(f + \text{Id}) \Leftrightarrow (f + \text{Id})(z) = \vec{0} \Leftrightarrow f(z) + z = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{f(z) = -z}.$$

Et dans ce cas

$$f^3(z) = f^2(f(z)) = f^2(-z) = f(f(-z)) = f(-(-z)) = f(z).$$

★ Supposons que  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id})$ .

Soit  $u \in E$  quelconque. Comme

$$E = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f + \text{Id}),$$

on sait qu'il existe  $x \in \text{Ker}(f)$ ,  $y \in \text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $z \in \text{Ker}(f + \text{Id})$  avec  $u = x + y + z$ . Comme  $f$  est linéaire,  $f^3$  aussi, et donc on obtient

$$\begin{aligned} f^3(u) &= f^3(x + y + z) \\ &= f^3(x) + f^3(y) + f^3(z) \\ &= f(x) + f(y) + f(z) = f(u) \end{aligned}$$

Donc  $f^3(u) = f(u)$  pour tout  $u \in E$ , ce qui revient bien à dire que  $f^3 = f$ .

★ Supposons réciproquement que  $f^3 = f$ .

• Montrons dans un premier temps que la somme  $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f + \text{Id})$  est directe : soit  $x \in \text{Ker}(f)$ ,  $y \in \text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $z \in \text{Ker}(f + \text{Id})$  avec  $x + y + z = \vec{0}$ . Alors

$$\begin{aligned} \vec{0} &= f(\vec{0}) = f(x + y + z) \\ &= f(x) + f(y) + f(z) = \vec{0} + y - z \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{0} &= f^2(\vec{0}) = f(f(x + y + z)) = f(y - z) \\ &= f(y) - f(z) = y + z \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{cases} x + y + z = \vec{0} \\ y - z = \vec{0} \\ y + z = \vec{0} \end{cases},$$

ce qui donne bien  $x = y = z = \vec{0}$ , ce qui justifie bien que la somme est directe.

• Montrons que  $E = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f + \text{Id})$ .

**Analyse :** soit  $u \in E$ , supposons qu'il existe  $x \in \text{Ker}(f)$ ,  $y \in \text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $z \in \text{Ker}(f + \text{Id})$  avec  $x + y + z = u$ . Par linéarité de  $f$ , on a

$$\begin{aligned} f(u) &= f(x + y + z) = f(x) + f(y) + f(z) \\ &= \vec{0} + y - z \\ f^2(u) &= f(f(x + y + z)) = f(y - z) \\ &= f(y) - f(z) = y + z \end{aligned}$$

D'où le système  $\begin{cases} u &= x + y + z \\ f(u) &= y - z \\ f^2(u) &= y + z \end{cases}$ , qui est équivalent à  $\begin{cases} x = u - f^2(u) \\ y = \frac{1}{2}(f(u) + f^2(u)) \\ z = \frac{1}{2}(f^2(u) - f(u)) \end{cases}$ .

**Remarque.** Comme il y a unicité de  $x, y, z$ , à cette étape on vient de redémontrer que la somme est directe.

**Synthèse :** soit  $u \in E$ , on pose

$$x = u - f^2(u), \quad y = \frac{1}{2}(f(u) + f^2(u)) \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2}(f^2(u) - f(u)).$$

On a directement

$$u = x + y + z.$$

Puis,

$$f(x) = f(u) - f^3(u) = \vec{0}$$

(car  $f = f^3$ ), donc  $x \in \text{Ker}(f)$ . Ensuite,

$$f(y) = \frac{1}{2}(f^2(u) + f^3(u)) = \frac{1}{2}(f^2(u) + f(u)) = y$$

(même raison), donc  $y \in \text{Ker}(f - \text{Id})$ . Et enfin,

$$f(z) = \frac{1}{2}(f^3(u) - f^2(u)) = \frac{1}{2}(f(u) - f^2(u)) = -z,$$

donc  $z \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ .

Ceci prouve bien que

$$u \in \text{Ker}(f) + \text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f + \text{Id}).$$

C'est vrai pour tout  $u \in E$ , donc

$$E \subset \text{Ker}(f) + \text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f + \text{Id})$$

(l'inclusion réciproque étant immédiate).

**Conclusion :** on a bien montré que, si  $f^3 = f$ , alors

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}).$$

### Exercice 2.

★ Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrons que  $F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  : il est inclus dans  $E$  par définition, il contient bien le polynôme nul (c'est évident), il reste donc à voir que  $F_i$  est stable par combinaisons linéaires.

Soit  $(P, Q) \in F_i^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$ ,

$$(\lambda P + Q)(j) = \lambda P(j) + Q(j) = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

car  $P$  et  $Q$  étant dans  $F_i$ ,  $P(j) = Q(j) = 0$ . Cela prouve bien que

$$\lambda P + Q \in F_i,$$

donc que  $F_i$  est stable par combinaisons linéaires.

★ Montrons que la somme  $F_0 + \dots + F_n$  est directe : Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , soit  $P_i \in F_i$ . Supposons que

$$\sum_{i=0}^n P_i = 0$$

(le 0 ici est le polynôme nul). Évaluons alors en  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$\sum_{i=0}^n P_i(j) = 0.$$

Par définition, comme  $P_i \in F_i$ , on a  $P_i(j) = 0$  si  $j \neq i$ . Donc dans la somme, il ne reste que  $P_j(j)$ , et donc on obtient  $P_j(j) = 0$ , donc  $j$  est racine de  $P_j$ . Or, comme  $P_j \in F_j$ , tout élément de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  autre que  $j$  est aussi racine. Donc  $P_j$  admet tout élément de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  comme racine, cela lui fait au moins  $n + 1$  racines distinctes. Or  $P_j \in E$ , donc  $\deg(P_j) \leq n$ , on en déduit donc que  $P_j = 0$ .

Donc on a bien montré que si  $P_i \in F_i$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , alors

$$P_0 + \dots + P_n = 0 \Rightarrow P_0 = \dots = P_n = 0.$$

Donc la somme est bien directe.

★ Montrons que la somme  $F = F_0 + \dots + F_n$  vaut  $E$  : comme la somme est directe, on a

$$\dim(F) = \sum_{i=0}^n \dim(F_i).$$

Or,  $F_i \neq \{0\}$  (en effet,  $L_i = \prod_{\substack{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ j \neq i}} (X - j)$  est un polynôme non nul, de degré  $n$ , et  $L_i \in F_i$ ), donc

$$\dim(F_i) \geq 1.$$

On en déduit que

$$\dim(F) \geq n + 1.$$

Mais comme  $F \subset E$  et que  $\dim(E) = n + 1$ , on a aussi

$$\dim(F) \leq n + 1.$$

Donc

$$\dim(F) = n + 1 = \dim(E).$$

On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions, donc

$$F = E, \quad \text{autrement dit} \quad F_0 \oplus \dots \oplus F_n = E.$$

**Remarque.** Remarquons que cela force aussi que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\dim(F_i) = 1$ , donc que  $L_i$  est une base de  $F_i$ , ce que l'on aurait pu voir directement... Remarquons que les  $L_i$  sont à une constante près, une famille de polynômes interpolateurs de Lagrange...

**Exercice 3.** Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E_i \subset F_i$ , donc  $\dim(E_i) \leq \dim(F_i)$ . Puis, comme les sommes sont directes, on peut écrire

$$\begin{aligned} \dim \left( \bigoplus_{i=1}^n E_i \right) &= \sum_{i=1}^n \dim(E_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \dim(F_i) = \dim \left( \bigoplus_{i=1}^n F_i \right) = \dim \left( \bigoplus_{i=1}^n E_i \right) \end{aligned}$$

Si on soustrait  $\sum_{i=1}^n \dim(E_i)$  aux deux membres de l'inégalité, on a alors

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (\dim(F_i) - \dim(E_i)) \leq 0,$$

autrement dit on a

$$\sum_{i=1}^n (\dim(F_i) - \dim(E_i)) = 0.$$

Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\dim(F_i) - \dim(E_i) \geq 0,$$

et une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul. Donc pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$\dim(F_i) - \dim(E_i) = 0, \quad \text{soit} \quad \dim(E_i) = \dim(F_i).$$

On peut alors conclure (grâce à l'inclusion  $E_i \subset F_i$ ) que  $E_i = F_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Exercice 4. 1)** • Si  $f(x)$  est colinéaire à  $x$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  avec  $f(x) = \lambda x$ . Alors

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \cdot \lambda x = \lambda^2 x.$$

Mais  $f^2 = -\text{Id}_E$ , donc  $f^2(x) = -x$ . Ainsi on a

$$\lambda^2 x = -x, \quad \text{soit} \quad (\lambda^2 + 1).x = \vec{0}.$$

Or, on a supposé  $x \neq \vec{0}$ , donc  $\lambda^2 + 1 = 0$ , soit

$$\lambda^2 = -1.$$

Mais  $\lambda \in \mathbb{R}$ , c'est impossible. D'où contradiction.

Donc  $f(x)$  n'est pas colinéaire à  $x$ .

• Soit  $D = \text{Vect}(y)$  une droite  $E$  (avec donc  $y \neq \vec{0}$ , sinon  $D = \{\vec{0}\}$  et ce n'est pas une droite). Supposons que  $D$  soit stable par  $f$ . Alors comme  $y \in D$ , on a

$$f(y) \in D = \text{Vect}(y),$$

et donc il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $f(y) = \lambda y$ . Or, on a vu que cette égalité était impossible avec  $y \neq \vec{0}$ .

Donc il n'existe pas de droite de  $E$  stable par  $f$ .

**2)** Remarquons que c'est bien un plan, puisque  $x \neq \vec{0}$  et que  $f(x)$  n'est pas colinéaire à  $x$ , ce qui donne que la famille  $(x, f(x))$  est libre.

Soit  $y \in \text{Vect}(x, f(x))$ , alors il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec

$$y = ax + bf(x).$$

Par linéarité de  $f$ , on a alors

$$f(y) = af(x) + bf(f(x)) = af(x) + bf^2(x).$$

Or  $f^2 = -\text{Id}_E$ , donc  $f^2(x) = -x$ . Et donc

$$f(y) = af(x) - bx \in \text{Vect}(x, f(x)).$$

Donc  $\text{Vect}(x, f(x))$  est bien stable par  $f$ .

**Exercice 5.**

**1)**  $u$  est une forme linéaire. Supposons  $\alpha \neq 0$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$u((\alpha^{-1}x, 0, 0)) = \alpha\alpha^{-1}x = x \in \text{Im}(u),$$

donc  $\mathbb{R} \subset \text{Im}(u)$ . Et comme  $u$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $\text{Im}(u) \subset \mathbb{R}$ , puis par double inclusion,

$$\text{Im}(u) = \mathbb{R}.$$

Cette égalité subsiste de façon similaire si  $\beta \neq 0$  ou  $\gamma \neq 0$ .

Le théorème du rang donne alors

$$\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Im}(u)) = 3 - 1 = 2.$$

On conclut en remarquant que  $H = \text{Ker}(u)$ .

**2a)**  $u \circ f$  est linéaire comme composée d'applications linéaires, et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  car c'est le cas de  $u$ , donc  $u \circ f$  est bien une forme linéaire.

Soit  $(x, y, z) \in H$ , alors comme  $H$  est stable par  $f$ ,  $f(x, y, z) \in H$ , et comme  $H = \text{Ker}(u)$ ,

$$u(f(x, y, z)) = 0, \quad \text{autrement dit} \quad u \circ f(x, y, z) = 0.$$

Donc on a bien  $(x, y, z) \in \text{Ker}(u \circ f)$ . Comme cela est vrai pour tout  $(x, y, z) \in H$ , on a bien l'inclusion

$$H \subset \text{Ker}(u \circ f).$$

**2b)** Notons (1) la base canonique de  $\mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B},(1)}(u) &= \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & u(e_3) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

car  $e_1 \in H = \text{Ker}(u)$  et  $e_2 \in H = \text{Ker}(u)$  ;

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B},(1)}(u \circ f) &= \begin{pmatrix} u(f(e_1)) & u(f(e_2)) & u(f(e_3)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & u(f(e_3)) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

car  $e_1$  et  $e_2$  appartiennent à  $H$  qui est inclus dans  $\text{Ker}(u \circ f)$ .

**2c)**  $u(e_3) \neq 0$ , car sinon on aurait  $e_3 \in \text{Ker}(u) = H$ , ce qui donnerait

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \subset H,$$

ce qui contredirait  $\dim(H) = 2$ .

On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},(1)}(u \circ f) = \frac{u(f(e_3))}{u(e_3)} \text{Mat}_{\mathcal{B},(1)}(u),$$

donc en posant  $\lambda = \frac{u(f(e_3))}{u(e_3)}$ ,

$$u \circ f = \lambda u$$

(l'égalité des matrices dans une même base équivaut à l'égalité des applications).

**3)** Soit  $(x, y, z) \in H$ , alors

$$u(f(x, y, z)) = \lambda u(x, y, z) = \lambda \times 0 = 0$$

car  $(x, y, z) \in H = \text{Ker}(u)$ . Donc

$$f(z, y, z) \in \text{Ker}(u) = H.$$

C'est vrai pour tout  $(x, y, z) \in H$ , donc  $H$  est bien stable par  $f$ .

**4)** D'après les questions 2 et 3, on peut affirmer que  $H$  est stable par  $f$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  avec  $u \circ f = \lambda u$ . Soit  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , comme l'application qui à  $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  associe  $\text{Mat}_{\mathcal{C},(1)}(\phi)$  est injective (cours de sup), on a alors :

$$u \circ f = \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad \text{Mat}_{\mathcal{C},(1)}(u \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C},(1)}(\lambda u) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{C},(1)}(u).$$

Mais, le lien entre composition d'application linéaire et produit matriciel nous permet d'écrire

$$\text{Mat}_{\mathcal{C},(1)}(u \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C},(1)}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$$

On en déduit donc (avec les questions précédentes) que

$$H \text{ est stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ avec } \text{Mat}_{\mathcal{C},(1)}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{C},(1)}(u).$$

Comme  $\text{Mat}_{\mathcal{C},(1)}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ , l'égalité matricielle se réécrit

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} A = \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

La transposition induisant une bijection de  $M_{1,3}(\mathbb{R})$  sur  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ , cette égalité matricielle est équivalente à

$$A^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

(en utilisant que la transposée d'un produit est le produit des transposées dans l'ordre inverse). Donc

$$H \text{ est stable par } f \Leftrightarrow \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ avec } A^\top \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } A^\top \text{ (rappelons que l'on sait que ce vecteur est non nul).}$$

5) Supposons qu'une droite vectorielle  $\text{Vect}(u)$  (avec  $u \neq \vec{0}$  puisque c'est une droite) soit stable par  $f$ , alors  $f(u) \in \text{Vect}(u)$ , donc il existe un réel  $\lambda$  avec

$$f(u) = \lambda u.$$

Comme  $u$  est non nul, on en déduit que  $u$  est un vecteur propre de  $f$  associé à  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, soit  $u$  un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $u \neq \vec{0}$  et  $f(u) = \lambda u$ . Soit alors  $x \in \text{Vect}(u)$  quelconque, il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  avec  $x = \mu u$ . Donc

$$f(x) = f(\mu u) = \mu f(u) = \mu \lambda u \in \text{Vect}(u).$$

Cela étant vrai pour tout vecteur  $x \in \text{Vect}(u)$ , on en déduit que  $\text{Vect}(u)$  est stable par  $f$ .

Donc

une droite est stable par  $f$  si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de  $f$ .

**Exercice 6. 1)**  $H$  est un hyperplan, donc  $\dim(H) = n - 1$ .

Soit alors  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  une base de  $H$ , que l'on complète avec  $e_n$  en une base de  $E$  (on peut par le théorème de la base incomplète, et il n'y a qu'un seul vecteur à rajouter à cause des dimensions).

• Supposons que  $H$  soit stable par  $u$ , alors  $u(e_i) \in H$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  (car  $e_i \in H$ ), et donc

$$(u + \lambda \text{Id})(e_i) = u(e_i) + \lambda e_i \in H$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , car  $H$  est stable par combinaison linéaire.

Puis,  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , et  $u(e_n) \in E$ , donc il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  tel que

$$u(e_n) = \sum_{k=1}^n x_k e_k.$$

Donc, si on note

$$\lambda = -x_n \in \mathbb{C},$$

on a

$$(u + \lambda \text{Id})(e_n) = u(e_n) + \lambda e_n = u(e_n) - x_n e_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k e_k \in H$$

car pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $e_k \in H$ .

Donc, pour ce  $\lambda$  particulier, on a

$$(u + \lambda \text{Id})(e_i) \in H$$

pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , et donc

$$\text{Vect}((u + \lambda \text{Id})(e_1), \dots, (u + \lambda \text{Id})(e_n)) \subset H.$$

Or,  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , donc

$$\text{Im}(u + \lambda \text{Id}) = \text{Vect}((u + \lambda \text{Id})(e_1), \dots, (u + \lambda \text{Id})(e_n)) \subset H.$$

On a donc bien trouvé  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Im}(u + \lambda \text{Id}) \subset H$ .

• Supposons qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que

$$\text{Im}(u + \lambda \text{Id}) \subset H.$$

Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,

$$u(e_i) = \underbrace{(u + \lambda \text{Id})(e_i)}_{\in H} - \lambda \underbrace{e_i}_{\in H} \in H$$

par combinaison linéaire d'éléments de  $H$ .

Comme  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  est une base de  $H$ , et que son image par  $u$  est incluse dans  $H$ , on en déduit bien que  $H$  est stable par  $u$ .

2) Notons

$$f : X \in M_{3,1}(\mathbb{C}) \mapsto AX \in M_{3,1}(\mathbb{C})$$

l'endomorphisme de  $M_{3,1}(\mathbb{C})$  canoniquement associé à  $A$ . Les sous-espaces stables par  $A$  sont les sous-espaces stables par  $f$ .

- $M_{3,1}(\mathbb{C})$  a un seul sous-espace de dimension 0, c'est  $\{0_{3,1}\}$ , et il est effectivement stable par  $f$  car  $f(0_{3,1}) = 0_{3,1} \in \{0_{3,1}\}$ .
- $M_{3,1}(\mathbb{C})$  a un seul sous-espace de dimension 3, c'est lui-même, et il est évidemment stable par  $f$ .
- Les sous-espaces de dimension 1 stables par  $f$  sont les droites engendrées par des vecteurs propres de  $f$ . Or,

$$\chi_f = \chi_A = (-2 + X)(2 + X)^2,$$

donc  $f$  (ou  $A$ ) a deux valeurs propres,  $-2$  et  $2$ . Après calculs,

$$E_{-2} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_2 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

ces deux espaces propres sont de dimension 1. Donc  $A$  (ou  $f$ ) a deux droites stables :  $E_{-2}$  et  $E_2$ .

- Les sous-espaces propres de dimension 2 stables par  $f$  sont, d'après la question précédente, les sous-espaces contenant  $\text{Im}(f + \lambda \text{Id})$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Si  $\lambda \neq -2$  ou  $2$ , alors  $-\lambda$  n'est pas valeur propre de  $f$ , donc  $f + \lambda \text{Id}$  est bijective, donc  $\text{Im}(f + \lambda \text{Id})$  est de dimension 3, et ne peut être inclus dans un sous-espace de dimension 2. Puis, comme on vu que  $E_2$  et  $E_{-2}$  sont de dimension 1, par le théorème du rang, on en déduit que  $\text{Im}(f - 2\text{Id})$  et  $\text{Im}(f + 2\text{Id})$  sont de dimension

$$3 - 1 = 2.$$

Donc, si  $H$  sous-espace de dimension 2 vérifie

$$\text{Im}(f + 2\text{Id}) \subset H,$$

alors

$$H = \text{Im}(f + 2\text{Id})$$

puisque l'on a une inclusion et l'égalité des dimensions.

De même, si

$$\text{Im}(f - 2\text{Id}) \subset H,$$

alors

$$H = \text{Im}(f - 2\text{Id}).$$

Donc  $f$  laisse stable deux sous-espaces de dimension 2 :

$$\text{Im}(f + 2\text{Id}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f - 2\text{Id}).$$

- Au final, les sous-espaces stables par  $A$  (ou  $f$ ) sont :

$$\{0_{3,1}\}, \quad E_2 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_{-2} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \text{Im}(f + 2\text{Id}), \quad \text{Im}(f - 2\text{Id}) \quad \text{et} \quad M_{3,1}(\mathbb{C}).$$

**Remarque.** Si on note  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  alors  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $M_{3,1}(\mathbb{C})$  (c'est la base

canonique), donc on sait que l'on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f - 2\operatorname{Id}) &= \operatorname{Vect}((f - 2\operatorname{Id})(e_1), (f - 2\operatorname{Id})(e_2), (f - 2\operatorname{Id})(e_3)) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \\ &= \boxed{\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}\end{aligned}$$

car  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  (et les deux vecteurs restants sont libres, donc forment une base de  $\operatorname{Im}(f - 2\operatorname{Id})$ ).

De même,

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f + 2\operatorname{Id}) &= \operatorname{Vect}((f + 2\operatorname{Id})(e_1), (f + 2\operatorname{Id})(e_2), (f + 2\operatorname{Id})(e_3)) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \boxed{\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}\end{aligned}$$

car  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  (et les deux vecteurs restants sont libres, donc forment une base de  $\operatorname{Im}(f + 2\operatorname{Id})$ ).

### Exercice 7.

1. Pour  $(i, j, k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^4$ ,  $\boxed{E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{j,k}E_{i\ell}}$ .
2. Soit  $i \neq j$  et  $k$  quelconque dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On a :  $E_{i,j} = E_{i,k}E_{k,j}$  et  $0_n = E_{k,j}E_{i,k}$  car  $i \neq j$ , donc

$$u(E_{i,j}) = u(E_{ik}E_{kj}) = u(E_{kj}E_{ik}) = u(0_n) = 0$$

d'après la propriété de  $u$  et car  $u$  est linéaire. Ainsi on a :  $u(E_{ij}) = 0$ .

D'autre part, on a

$$u(E_{i,i}) = u(E_{ij}E_{ji}) = u(E_{ji}E_{ij}) = u(E_{j,j}).$$

Donc on a  $u(E_{ii}) = u(E_{jj})$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

3. Soit  $M \in \operatorname{M}_n(\mathbb{K})$ . On a donc  $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}E_{ij}$ . On a donc par linéarité de  $u$ ,

$$u(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}u(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n m_{ii}u(E_{ii}) + 0.$$

On pose  $\alpha = u(E_{ii})$  (qui ne dépend pas de  $i$ , d'après la question précédente).

On a donc

$$u(M) = \alpha \sum_{i=1}^n m_{ii} = \alpha \operatorname{tr}(M).$$

Cela étant vrai pour tout  $M \in \operatorname{M}_n(\mathbb{K})$ , on a bien  $u = \alpha \operatorname{tr}$ .

**Remarque.** Réciproquement, pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $u = \alpha \operatorname{tr}$  vérifie les hypothèses de l'énoncé.

**Exercice 8.**

1. Raisonnons par l'absurde, supposons que l'égalité est possible. En appliquant la trace à l'égalité, on a

$$0 = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(I_n) = n$$

absurde.

2. Raisonnons par l'absurde, supposons  $A$  inversible. Comme  $AB - BA = A$ , en multipliant par  $A^{-1}$  à gauche, on a

$$A^{-1}AB - A^{-1}BA = A^{-1}A,$$

donc, en simplifiant,

$$B - A^{-1}BA = I_n,$$

puis en utilisant que  $I_n = AA^{-1}$ ,

$$BAA^{-1} - A^{-1}BA = I_n,$$

ce qui se réécrit

$$(BA)A^{-1} - A^{-1}(BA) = I_n.$$

On est donc ramené à la question précédente avec  $A^{-1}$  et  $BA$ , ce qui est impossible. Donc  $A$  n'est pas inversible.

**Exercice 9.**

1. Notons  $\phi_A$  cette application.

★ On a déjà clairement  $\phi_A(M_n(\mathbb{K})) \subset \mathbb{K}$ .

★ Soit  $(M, N) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors

$$\phi_A(\lambda M + N) = \text{tr}(A(\lambda M + N)) = \text{tr}(\lambda AM + AN) = \lambda \text{tr}(AM) + \text{tr}(AN) = \lambda \phi_A(M) + \phi_A(N)$$

car la trace est linéaire. Donc  $\phi_A$  est linéaire.

★ Donc  $\phi_A \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ .

2. On pose  $\psi : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K})) \\ A & \mapsto & \phi_A \end{cases}$ .

→  $\psi$  est linéaire : pour tout  $(A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , pour tout  $M \in M_n(\mathbb{K})$ ,

$$\phi_{\lambda A + B}(M) = \text{tr}((\lambda A + B)M) = \text{tr}(\lambda AM + BM) = \lambda \text{tr}(AM) + \text{tr}(BM) = \lambda \phi_A(M) + \phi_B(M).$$

L'égalité étant vrai pour tout  $M \in M_n(\mathbb{K})$ , on a bien

$$\phi_{\lambda A + B} = \lambda \phi_A + \phi_B,$$

soit

$$\psi(\lambda A + B) = \lambda \psi(A) + \psi(B).$$

→ Montrons que  $\psi$  est injective.

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  : Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $\phi_A = 0$ , c'est à dire que pour tout  $M \in M_n(\mathbb{R})$ , on a

$$\phi_A(M) = \text{tr}(AM) = 0.$$

En particulier en prenant  $M = A^\top$ , on a

$$0 = \text{tr}(AA^\top) = \sum_{i=1}^n (AA^\top)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} (A^\top)_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2,$$

donc tous les  $a_{ij}$  sont nuls (car une somme de réels **positifs** est nulle si et seulement si chaque réel est nul) et donc  $A = 0_n$ .

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  : Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $\phi_A = 0$ , c'est à dire que pour tout  $M \in M_n(\mathbb{C})$ , on a

$$\phi_A(M) = \text{tr}(AM) = 0.$$

En particulier en prenant  $M = \overline{A}^\top$ , on a

$$0 = \text{tr}(A\overline{A}^\top) = \sum_{i=1}^n (A\overline{A}^\top)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} (\overline{A}^\top)_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \overline{a_{i,j}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2,$$

donc tous les  $a_{ij}$  sont nuls (car une somme de réels **positifs** est nulle si et seulement si chaque réel est nul) et donc  $A = 0_n$ .

Ainsi  $\psi$  est injective.

→ Comme

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2 = \dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})),$$

$\psi$  est surjective.

→ Donc  $\psi$  est bijective, autrement dit : pour chaque forme linéaire  $u$ , il existe une unique matrice  $A$  telle que  $u = \phi_A$ .

3. On a  $\phi_A = \phi_B$ , soit  $\psi(A) = \psi(B)$ . Or  $\psi$  est injective. Donc  $A = B$ .

**Exercice 10. 1) •** L'application  $f$  est linéaire car la trace l'est : pour tout  $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= -(\lambda M + N) + \text{tr}(\lambda M + N)A \\ &= -\lambda M - N + (\lambda \text{tr}(M) + \text{tr}(N))A \\ &= \lambda(-M + \text{tr}(M)A) - N + \text{tr}(N)A \\ &= \lambda f(M) + f(N) \end{aligned}$$

Puis,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est stable par combinaison linéaire, et pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{tr}(M) \in \mathbb{R}$ , donc  $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (puisque  $f(M)$  est une combinaison linéaire de  $M$  et  $A$ ). Donc  $f$  est bien à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

• Soit  $M \in \text{Ker}(f)$ , alors  $f(M) = 0_n$ , donc  $M = \text{tr}(M)A$ , en particulier en prenant la trace de cette égalité,

$$\text{tr}(M) = \text{tr}(\text{tr}(M)A) = \text{tr}(M)\text{tr}(A)$$

(car la trace est linéaire), et donc  $\text{tr}(M)(1 - \text{tr}(A)) = 0$ . Comme  $\text{tr}(A) \neq 1$ ,  $\text{tr}(M) = 0$ , et donc

$$M = \text{tr}(M)A = 0_n.$$

Donc  $\text{Ker}(f) = \{0_n\}$ , et comme  $f$  est linéaire,  $f$  est injective.

• Comme  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , injectif et que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  **est de dimension finie** (et donc on a la même dimension finie au départ et à l'arrivée de  $f$ ), alors on a  $f$  bijective.

**2) •**  $f$  est toujours linéaire. En reprenant l'étude précédente, si  $M \in \text{Ker}(f)$ , alors  $M = \text{tr}(M)A \in \text{Vect}(A)$ , donc

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Vect}(A).$$

Puis,

$$f(A) = -A + \text{tr}(A)A = -A + A = 0$$

car  $\text{tr}(A) = 1$ , donc  $A \in \text{Ker}(f)$ , et donc

$$\text{Vect}(A) \subset \text{Ker}(f).$$

Par double inclusion, on a alors

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}(A)}.$$

• Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , par linéarité de la trace,

$$\text{tr}(f(M)) = -\text{tr}(M) + \text{tr}(M)\text{tr}(A) = -\text{tr}(M) + \text{tr}(M) = 0$$

car  $\text{tr}(A) = 1$ , donc

$$\text{Im}(f) \subset \{M : \text{tr}(M) = 0\}.$$

Puis, par le théorème du rang,

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = n^2 - \dim(\operatorname{Vect}(A)) = n^2 - 1$$

(car  $A \neq 0_n$  puisque  $\operatorname{tr}(A) = 1 \neq 0$ , donc  $(A)$  est libre et forme donc une base de  $\operatorname{Vect}(A)$ ).

$\operatorname{tr}$  est linéaire,  $\operatorname{Im}(\operatorname{tr}) = \mathbb{R}$  et  $\{M : \operatorname{tr}(M) = 0\} = \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$ , donc par le théorème du rang on a

$$\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(\operatorname{Im}(\operatorname{tr})) = n^2 - \dim(\mathbb{R}) = n^2 - 1.$$

Donc, on a une inclusion et l'égalité des dimensions, ce qui donne bien l'égalité des espaces vectoriels

$$\operatorname{Im}(f) = \{M : \operatorname{tr}(M) = 0\}.$$

**3) ★** Supposons  $\operatorname{tr}(A) \neq 1$ , alors  $f$  est bijective, donc il existe un et un seul  $X \in M_n(\mathbb{R})$  avec  $f(X) = B$ . Puis,

$$f(X) = B \Leftrightarrow -X + \operatorname{tr}(X)A = B \Leftrightarrow X = -B + \operatorname{tr}(X)A.$$

Si on applique la trace, on a alors  $\operatorname{tr}(X) = -\operatorname{tr}(B) + \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(A)$ , donc

$$\operatorname{tr}(X) = -\frac{\operatorname{tr}(B)}{1 - \operatorname{tr}(A)}, \quad \text{puis} \quad \boxed{X = -B - \frac{\operatorname{tr}(B)}{1 - \operatorname{tr}(A)}A}.$$

★ Si  $\operatorname{tr}(A) = 1$ , alors  $\operatorname{Im}(f) = \{M : \operatorname{tr}(M) = 0\}$ , donc si  $\operatorname{tr}(B) \neq 0$ , l'équation n'a pas de solution.

Si  $\operatorname{tr}(B) = 0$ , alors  $f(-B) = B$ , donc  $-B$  est une solution particulière, et donc pour  $X \in M_n(\mathbb{R})$ ,

$$f(X) = B \Leftrightarrow f(X) = f(-B) \Leftrightarrow f(X) - f(-B) = 0 \Leftrightarrow f(X + B) = 0 \Leftrightarrow X + B \in \operatorname{Ker}(f).$$

L'ensemble des solutions est donc

$$-B + \operatorname{Ker}(f) = -B + \operatorname{Vect}(A) = \boxed{\{-B + \lambda A, \lambda \in \mathbb{R}\}}.$$

**Exercice 11.**

$$1. \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a I_n & b I_n \\ c I_n & d I_n \end{pmatrix}}_{=\tilde{N}} \underbrace{\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}}_{=\tilde{M}}$$

2. On a donc

$$\det(P) = \det(\tilde{N}) \det(\tilde{M}).$$

Or

$$\det(\tilde{M}) = \det(M)^2$$

(déterminant d'une matrice diagonale par blocs). Puis, en utilisant la multilinéarité du déterminant pour la première égalité (on multiplie les  $n$  premières lignes par  $c$ , et les  $n$  dernières lignes par  $a$ ), et les opérations  $L_{n+i} \leftarrow L_{n+i} - L_i$  (pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) pour la deuxième égalité, on a

$$\begin{vmatrix} a I_n & b I_n \\ c I_n & d I_n \end{vmatrix} = \frac{1}{a^n c^n} \begin{vmatrix} ac I_n & bc I_n \\ ac I_n & ad I_n \end{vmatrix} = \frac{1}{a^n c^n} \begin{vmatrix} ac I_n & bc I_n \\ 0 & (ad - bc) I_n \end{vmatrix} = (ad - bc)^n.$$

Donc

$$\boxed{\det(P) = (ad - bc)^n \det(M)^2}.$$

**Exercice 12. 1)** Si  $A$  est inversible alors en posant

$$C = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A^{-1} & 0_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$$

on obtient  $BC = I_{2n}$  (par produit matriciel par blocs) et on en déduit que  $B$  est inversible et que  $C = B^{-1}$ .

Si  $A$  n'est pas inversible alors les lignes de  $A$  sont liées et les  $n$  premières lignes de  $B$  sont aussi liées par la même relation linéaire. On en déduit que  $B$  n'est pas inversible.

**Autre façon :**  $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$  est diagonale par blocs, donc  $\det(B^2) = \det(A)^2$ , et donc  $\det(B)^2 = \det(A)^2$ . Or,

$$B \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(B) \neq 0 \Leftrightarrow \det(B)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \det(A)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ est inversible.}$$

2) On obtient, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\boxed{B^{2p} = \begin{pmatrix} A^p & 0_n \\ 0_n & A^p \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{B^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0_n & A^{p+1} \\ A^p & 0_n \end{pmatrix}}.$$

En effet,

$$B^{2p} = (B^2)^p = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}^p,$$

et comme  $B^2$  est diagonale par blocs, le calcul de la puissance  $p$ -ième se fait directement (de manière analogue au cas diagonale) (pour le montrer, il faut faire une récurrence, mais elle est « tellement évidente », que l'on peut considérer que c'est du cours).

Puis,

$$B^{2p+1} = B^{2p} \times B = \begin{pmatrix} A^p & 0_n \\ 0_n & A^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

on fait le calcul (par produit matriciel par blocs) et on trouve le résultat annoncé.

**Exercice 13.** On peut écrire  $M^{-1}$  sous la forme  $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ . La relation  $MM^{-1} = I_{2n}$  donne alors (après calcul matriciel par blocs) le système

$$\begin{cases} AA' + BC' = I_n \\ CA' + DC' = 0_n \\ AB' + BD' = 0_n \\ CB' + DD' = I_n \end{cases}$$

(on fait attention à l'ordre des produits matriciels), qui entraîne

$$\begin{cases} (A - BD^{-1}C)A' = I_n \\ C' = -D^{-1}CA' \\ B' = -A^{-1}BD' \\ (-CA^{-1}B + D)D' = I_n \end{cases}$$

(on a exprimé  $C'$ ,  $B'$  et on a reporté dans les deux autres équations, puis on a factorisé à droite par  $A'$  la première équation, à droite par  $D'$  la dernière équation). On en déduit que les matrices  $A - BD^{-1}C$  et  $-CA^{-1}B + D = D - CA^{-1}B$  sont nécessairement inversibles et  $A'$  et  $D'$  sont leurs inverses respectifs. Au final

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}}$$

**Exercice 14.** Les opérations  $L_i \leftarrow L_i - L_{i+n}$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  donnent

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - I_n & I_n - A \\ I_n & A \end{pmatrix}$$

Puis, les opérations  $L_i \leftarrow 2L_i$  pour  $i \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$  donnent

$$\det(M) = \frac{1}{2^n} \det \begin{pmatrix} A - I_n & I_n - A \\ 2I_n & 2A \end{pmatrix}$$

(on a utilisé la multilinéarité du déterminant suivant les lignes, en écrivant  $L_i = \frac{1}{2}2L_i$ , et en sortant le «  $\frac{1}{2}$  », pour  $i \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ ), et donc les opérations  $L_i \leftarrow L_i + L_{i-n}$  pour  $i \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$  donnent ensuite

$$\det(M) = \frac{1}{2^n} \det \begin{pmatrix} A - I_n & I_n - A \\ (A - I_n) + 2I_n & (I_n - A) + 2A \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \det \begin{pmatrix} A - I_n & I_n - A \\ A + I_n & I_n + A \end{pmatrix}$$

On conclut enfin en faisant les opérations  $C_i \leftarrow C_i + C_{i-n}$  pour  $i \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ , ce qui donne

$$\det(M) = \frac{1}{2^n} \det \begin{pmatrix} A - I_n & (A - I_n) + (I_n - A) \\ A + I_n & (A + I_n) + (I_n + A) \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \det \begin{pmatrix} A - I_n & 0_n \\ A + I_n & 2(I_n + A) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - I_n & 0_n \\ A + I_n & I_n + A \end{pmatrix}$$

(la dernière égalité provenant de la multilinéarité du déterminant suivant les colonnes). Enfin, la formule sur les déterminants de matrice triangulaire par blocs donne

$$\det(M) = \det(A - I_n) \det(A + I_n)$$

Donc

$$\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow (\det(A - I_n) \neq 0 \quad \text{et} \quad \det(A + I_n) \neq 0),$$

ce qui conclut.

**Autre démonstration possible :** • Soit  $W \in M_{2n,1}(\mathbb{K})$ , écrivons  $W = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  avec  $X$  et  $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ . Alors on a

$$\begin{aligned} MW = 0_{2n,1} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} AX + Y \\ X + AY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ 0_{n,1} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} AX + Y = 0_{n,1} \\ X + AY = 0_{n,1} \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (A + I_n)X + (A + I_n)Y = 0_{n,1} \\ X + AY = 0_{n,1} \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (A + I_n)(X + Y) = 0_{n,1} \\ (A - I_n)X + (-A + I_n)Y = 0_{n,1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (A + I_n)(X + Y) = 0_{n,1} \\ (A - I_n)(X - Y) = 0_{n,1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X + Y \in \text{Ker}(A + I_n) \quad \text{et} \quad X - Y \in \text{Ker}(A - I_n) \end{aligned}$$

Montrons alors l'équivalence voulue par double implication.

• Si  $M$  est inversible, alors  $\text{Ker}(M) = \{0_{2n,1}\}$ . Or, pour  $Z \in \text{Ker}(A + I_n)$  et  $T \in \text{Ker}(A - I_n)$ ,  $X = Z + T$  et  $Y = Z - T$  vérifient

$$X + Y = 2Z \in \text{Ker}(A + I_n) \quad \text{et} \quad X - Y = 2T \in \text{Ker}(A - I_n),$$

donc  $W = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M)$ , donc  $W = 0_{2n,1}$ , donc

$$X = Y = 0_{n,1}.$$

Donc

$$Z = \frac{X + Y}{2} = \frac{0_{n,1} + 0_{n,1}}{2} = 0_{n,1} \quad \text{et} \quad T = \frac{X - Y}{2} = \frac{0_{n,1} - 0_{n,1}}{2} = 0_{n,1}.$$

Donc

$$\text{Ker}(A + I_n) = \text{Ker}(A - I_n) = \{0_{n,1}\},$$

et  $A + I_n$  et  $A - I_n$  sont inversibles.

• Réciproquement, si  $A + I_n$  et  $A - I_n$  sont inversibles, alors

$$\text{Ker}(A + I_n) = \text{Ker}(A - I_n) = \{0_{n,1}\}.$$

Donc, pour tout  $W \in \text{Ker}(M)$ , si  $W = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ , alors on a

$$X + Y \in \text{Ker}(A + I_n) \quad \text{et} \quad X - Y \in \text{Ker}(A - I_n),$$

soit  $X + Y = 0_{n,1}$  et  $X - Y = 0_{n,1}$ . Donc

$$X = \frac{X+Y}{2} + \frac{X-Y}{2} = \frac{0_{n,1}}{2} + \frac{0_{n,1}}{2} = 0_{n,1} \quad \text{et} \quad Y = \frac{X+Y}{2} - \frac{X-Y}{2} = \frac{0_{n,1}}{2} - \frac{0_{n,1}}{2} = 0_{n,1},$$

donc  $W = 0_{2n,1}$ . Donc

$$\text{Ker}(M) = \{0_{2n,1}\},$$

et donc  $M$  est inversible.

**Exercice 15. 1)** Montrons l'égalité demandée par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Initialisation :** pour  $k = 1$ , comme  $T^{1-1} = T^0 = I_n$ , on a  $LT^{1-1} = LI_n = L$ , et donc

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & LT^{1-1} \\ \hline 0_{n,1} & T^1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 0_{n,1} & T \end{array} \right) = M = M^1.$$

D'où l'initialisation.

**Hérédité :** soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , supposons  $M^k = \left( \begin{array}{c|c} 0 & LT^{k-1} \\ \hline 0_{n,1} & T^k \end{array} \right)$ . Alors, par produit matriciel par blocs,

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k \times M \\ &= \left( \begin{array}{c|c} 0 & LT^{k-1} \\ \hline 0_{n,1} & T^k \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 0_{n,1} & T \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} 0^2 + LT^{k-1} \times 0_{n,1} & (0) \times L + LT^{k-1} \times T \\ \hline 0_{n,1} \times (0) + T^k \times 0_{n,1} & 0_{n,1} \times L + T^k \times T \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} 0 & LT^k \\ \hline 0_{n,1} & T^{k+1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

D'où l'hérédité.

**Conclusion :** on a donc bien montré le résultat voulu.

**2)** Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  la propriété

« pour toute matrice  $M \in M_n(\mathbb{K})$  triangulaire supérieure stricte, on a  $M^n = 0_n$  ».

**Initialisation :** pour  $n = 1$ , la seule matrice triangulaire stricte est  $(0)$ , et  $(0)^1 = 0_1$  est vraie.

Si l'on n'est pas convaincu par cette initialisation, on peut faire le cas  $n = 2$  : soit  $M \in M_2(\mathbb{K})$  triangulaire supérieure stricte. Alors il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$  avec  $M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Et donc

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0^2 + 0^2 & 0.\alpha + 0^2 \\ 0^2 + 0^2 & 0.\alpha + 0^2 \end{pmatrix} = 0_2.$$

D'où l'initialisation.

**Hérédité :** soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons que pour toute matrice  $T \in M_n(\mathbb{K})$  triangulaire supérieure stricte, on a  $T^n = 0_n$ .

Soit  $M \in M_{n+1}(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire supérieure stricte quelconque.  $M$  s'écrit alors sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

soit par blocs

$$M = \left( \begin{array}{c|cccc} 0 & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Alors il existe  $T \in M_n(\mathbb{K})$  matrice triangulaire supérieure stricte et  $L \in M_{1,n}(\mathbb{K})$  avec  $M = \left( \begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 0_{n,1} & T \end{array} \right)$ .

Donc, le résultat de la question 1 s'applique, et donne

$$M^{n+1} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & LT^{n+1-1} \\ \hline 0_{n,1} & T^{n+1} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & LT^n \\ \hline 0_{n,1} & T^n \times T \end{array} \right).$$

L'hypothèse de récurrence donne alors

$$M^{n+1} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & L \times 0_n \\ \hline 0_{n,1} & 0_n \times T \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0_{1,n} \\ \hline 0_{n,1} & 0_n \end{array} \right) = 0_{n+1}.$$

D'où l'hérédité.

**Conclusion :** on a donc bien montré le résultat voulu.

### Exercice 16.

1. Soit  $P$  un polynôme unitaire de degré 4 dont le coefficient en  $X^3$  est nul. Il existe alors  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  avec

$$P = X^4 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma.$$

On a donc

$$D = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{array} \right| \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + \alpha L_3 + \beta L_2 + \gamma L_1} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ P(a) & P(b) & P(c) & P(d) \end{array} \right|$$

2. Choisissons  $P$  de degré 4 tel que  $P(a) = P(b) = P(c) = 0$  et de coefficient en  $X^3$  nul

$$P(X) = (X - a)(X - b)(X - c)(X - e)$$

où  $e$  va être choisi pour annuler le terme en  $X^3$ . En développant,

$$P = X^4 - (a + b + c + e)X^3 + \dots$$

On prend donc  $e = -a - b - c$ , et pour cette valeur, ce  $P$  considéré vérifie les hypothèses de la question 1.

En reportant dans le calcul du déterminant, on a alors

$$D = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & 0 & 0 & P(d) \end{array} \right| = P(d) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{array} \right| = \boxed{(d + a + b + c)(d - a)(d - b)(d - c)(c - b)(c - a)(b - a)}$$

(en reconnaissant un déterminant de Vandermonde).

**Autre méthode :** soit la fonction

$$P : x \in \mathbb{K} \mapsto \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{array} \right| \in \mathbb{K},$$

alors si on développe suivant la dernière colonne, on constate que  $P$  est une fonction polynomiale en  $x$  (on somme les coefficients 1,  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $x^4$  multipliés (au signe près) par un élément de  $\mathbb{K}$ , puisque c'est un déterminant dont les coefficients sont tous des constantes (dans  $\mathbb{K}$ ) par rapport à  $x$ , puisqu'une fois « barrée » la dernière colonne de  $P(x)$ , il n'y a plus de  $x$ ).

Son coefficient devant  $X^3$  est alors le déterminant souhaité (au signe près), en développant suivant la dernière colonne.

Or, si  $(a, b, c, d)$  sont deux à deux différents,  $P$  est un polynôme de degré 4, qui a Vandermonde( $a, b, c, d$ ) comme coefficient dominant et  $a, b, c, d$  comme racines. On conclut grâce aux relations coefficients racines.

Puis, si  $(a, b, c, d)$  ne sont pas tous deux à deux différents, alors  $P$  est la fonction nulle, le déterminant cherché vaut 0, et on vérifie directement que la formule trouvée juste avant reste vraie.

**Remarque.** Cette méthode marche pour les autres déterminants obtenus devant les autres coefficients de  $P$ ...

**Exercice 17. 1)**  $J$  est une matrice de Vandermonde (car  $j^4 = j$ ), son déterminant est donc non nul car 1,  $j$  et  $j^2$  sont deux à deux distincts, donc la matrice  $J$  est inversible.

**2)** Un calcul matriciel direct donne

$$AJ = \begin{pmatrix} c+b+a & c+bj+aj^2 & c+bj^2+aj \\ c+b+a & a+cj+bj^2 & a+cj^2+bj \\ c+b+a & b+aj+cj^2 & b+aj^2+cj \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+b+a & c+bj+aj^2 & c+bj^2+aj \\ c+b+a & j(c+bj+aj^2) & j^2(c+bj^2+aj) \\ c+b+a & j^2(c+bj+aj^2) & j(c+bj^2+aj) \end{pmatrix}$$

(car  $j^3 = 1$ ), donc

$$\det(A) \det(J) = \det(AJ) = (c+b+a)(c+bj+aj^2)(c+bj^2+aj) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} = (c+b+a)(c+bj+aj^2)(c+bj^2+aj) \det(J)$$

Comme  $\det(J) \neq 0$ , on peut diviser par  $\det(J)$ , et donc

$$\boxed{\det(A) = (c+b+a)(c+bj+aj^2)(c+bj^2+aj)}.$$

**Remarque.** Pour les 5/2 : en fait, la matrice  $J$  diagonalise  $A$  : on a  $J^{-1}AJ = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & c+bj+aj^2 & 0 \\ 0 & 0 & c+bj^2+aj \end{pmatrix}$ ,

et de là le déterminant est direct.

**Exercice 18.** Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $(X + z_k)^n \in \mathbb{C}_n[X]$ , et

$$\text{Card}((X + z_0)^n, (X + z_1)^n, \dots, (X + z_n)^n) = n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X]).$$

Il suffit donc de montrer que la famille est libre, pour savoir que c'est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

Soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ , si on a  $\sum_{i=0}^n \lambda_i (X + z_i)^n = 0$ , alors par la formule du binôme de Newton,

$$0 = \sum_{i=0}^n \lambda_i (X + z_i)^n = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \lambda_i \binom{n}{k} z_i^k X^{n-k} = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=0}^n \lambda_i \binom{n}{k} z_i^k \right) X^{n-k}$$

(en permutant les deux sommes), et donc, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \binom{n}{k} z_i^k = 0$$

(car un polynôme est nul si et seulement si chacun de ses coefficients est nul).

En passant à l'écriture matricielle, en notant  $Z = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ , on a  $AZ = 0_{n+1,1}$  avec

$$A = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} z_0^0 & \binom{n}{0} z_1^0 & \dots & \binom{n}{0} z_n^0 \\ \binom{n}{1} z_0^1 & \binom{n}{1} z_1^1 & \dots & \binom{n}{1} z_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} z_0^n & \binom{n}{n} z_1^n & \dots & \binom{n}{n} z_n^n \end{pmatrix}$$

On cherche donc le noyau de  $A$ , on souhaiterait qu'il soit réduit à l'élément nul, ce qui est vrai si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ . Calculons  $\det(A)$  : par multilinéarité du déterminant, on peut factoriser  $\binom{n}{i}$  sur la ligne  $i + 1$  (pour

$i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ), ce qui donne

$$\det(A) = \prod_{i=0}^n \binom{n}{i} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_0^n & z_1^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix}}_{\neq 0 \text{ car déterminant de Vandermonde avec } (z_0, \dots, z_n) \text{ deux à deux } \neq}$$

Donc la matrice  $A$  est inversible, donc son noyau est réduit à  $\{0_{n+1,1}\}$ , donc  $Z = 0_{n+1,1}$ , donc pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  on a  $\lambda_i = 0$ .

Donc la famille est libre. C'est donc bien une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

**Exercice 19.** Notons  $(L_0, \dots, L_d)$  les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la famille  $(a_0, \dots, a_d)$ . Par le cours,  $(L_0, \dots, L_d)$  est une base de  $\mathbb{C}_d[X]$ , et on a

$$P = \sum_{i=0}^d P(a_i) L_i.$$

De plus, pour  $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ , on a

$$L_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq d \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j},$$

et pour tout  $j \in \llbracket 0, d \rrbracket \setminus \{i\}$ ,  $a_j \in \mathbb{Q}$ ,  $a_i \in \mathbb{Q}$ , donc  $\frac{X - a_j}{a_i - a_j} \in \mathbb{Q}[X]$ .

Comme  $\mathbb{Q}[X]$  est stable par produit, on a alors pour tout  $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ ,  $L_i \in \mathbb{Q}[X]$ .

Enfin, on suppose pour tout  $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ ,  $P(a_i) \in \mathbb{Q}$ . Comme  $\mathbb{Q}[X]$  est stable par combinaison linéaire avec scalaires dans  $\mathbb{Q}$ , on en déduit  $P \in \mathbb{Q}[X]$ .

**Exercice 20.** Notons  $(L_0, \dots, L_d)$  les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la famille  $(a_0, \dots, a_d)$  (ainsi, ce sont des polynômes de  $\mathbb{R}_d[X]$ ) et pour tout  $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ ,

$$b_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(a_i).$$

Par le cours, on a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P_n = \sum_{i=0}^d P_n(a_i) L_i.$$

Posons alors

$$P = \sum_{i=0}^d b_i L_i \in \mathbb{R}_d[X]$$

et prenons une norme quelconque  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}_d[X]$  (comme  $\mathbb{R}_d[X]$  est de dimension finies, toutes les normes sur  $\mathbb{R}_d[X]$  sont équivalentes). Alors, par inégalité triangulaire puis homogénéité de la norme, on a

$$0 \leq \|P - P_n\| = \left\| \sum_{i=0}^d (b_i - P_n(a_i)) L_i \right\| \leq \sum_{i=0}^d \left\| (b_i - P_n(a_i)) L_i \right\| = \sum_{i=0}^d \underbrace{|b_i - P_n(a_i)|}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} \underbrace{\|L_i\|}_{=\text{constante}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sum_{i=0}^d 0 = 0.$$

Le théorème des gendarmes conclut alors

$$\|P - P_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

donc la suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le polynôme  $P$ .