DM 1 - Révisions de première année

À rendre le lundi 15/09/2025

Rendre 1 copie pour 2

Exercice 1 - Extrait de CCP L2 Maths 2 (2009)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis d'ordre n par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t.$$

Dans ce problème, on propose une petite étude des intégrales de Wallis et une application à la formule de Stirling. Si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles équivalentes, on note $u_n \sim v_n$.

Partie I - Formule explicite et équivalent des intégrales de Wallis

1. **Formule explicite**
   (a) Donner la value de W_0 et W_1 puis montrer que pour $n \geqslant 1$ on a :
   $$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.$$
   (b) En déduire avec soin que pour $p \in \mathbb{N}$:
   $$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$
2. **Équivalent**
   (a) Déterminer un réel a tel que pour tout $n \geqslant 1$, on ait $W_{n-1}W_n = \dfrac{\pi}{an}$.
   On pourra montrer que la suite de terme général $nW_{n-1}W_n$ est constante.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.
   (c) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$, en déduire que pour n au voisinage de $+\infty$, $W_n \sim W_{n-1}$.
   (d) Démontrer enfin que pour n au voisinage de $+\infty$, $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{bn}}$ où b est un réel strictement positif à déterminer.

Partie II - Formule de Stirling

Dans cette partie, on va établir la formule de Stirling : pour n au voisinage de $+\infty$,

$$n! \sim K n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

où K est un réel à déterminer.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}$.

3. Démontrer que pour n au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim \frac{\alpha}{n^2}$ où α est un réel à déterminer.
4. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ converge puis que la suite $(\ln u_n)_n$ est convergente.
5. En déduire avec soin qu'il existe un réel L tel que pour n au voisinage de $+\infty$, on ait :
   $$n! \sim n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} \mathrm{e}^L.$$
6. En utilisant la formule explicite de W_{2n} obtenue dans la section I et la question précédente, écrire à l'aide de e^L un équivalent de W_{2n}.
7. Déterminer enfin la valeur de e^L en utilisant l'équivalent de W_n obtenu dans la section I.