Correction DM 1

Exercice 1 - Extrait de CCP L2 Maths 2 (2009)

Partie I - Formule explicite et équivalent des intégrales de Wallis

1. **Formule explicite**

(a) On a :

$$\boxed{W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^0 \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$$

On calcule également :

$$\boxed{W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^1 \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1.}$$

De plus, soit $n \geqslant 1$. On a alors :

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+1} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin t}_{=u'(t)} \underbrace{(\sin t)^n}_{=v(t)} \mathrm{d}t.$$

avec $u(t) = -\cos(t)$. Avec u et v ainsi définies, on a u et v de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
W_n &= \Bigg[\underbrace{(-\cos t)}_{=u(t)} \underbrace{(\sin t)^n}_{=v(t)}\Bigg]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(-\cos t)}_{=u(t)} \underbrace{n(\cos t)(\sin t)^{n-1}}_{=v'(t)} \mathrm{d}t \\
&= -0 \times 1^{n-1} - (-1) \times 0^{n-1} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 (\sin t)^{n-1} \mathrm{d}t \\
&= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\sin t)^2)(\sin t)^{n-1} \mathrm{d}t \\
&= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-1} \mathrm{d}t - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+1} \mathrm{d}t \\
& \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= nW_{n-1} - nW_{n+1}.
\end{aligned}$$

Puis en réorganisant, on trouve $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.}$$

(b) Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation :** Pour $p = 0$, on a $W_{2p} = W_{2\times 0} = W_0 = \frac{\pi}{2}$.
  En outre, on a :
  $$\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2 \times 0)!}{(2^0 0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$
  Donc, $\boxed{\text{pour } p = 0, \text{ on a bien } W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}.}$

- **Hérédité :** Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que : $W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$. Montrons que :

$$W_{2(p+1)} = \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)} &= W_{2p+2} = W_{(2p+1)+1} \\
&= \frac{2p+1}{(2p+1)+1} W_{(2p+1)-1} \text{ (d'après la question précédente)} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ (hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2p+2)^2} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \\
& \text{(on fait apparaître } (2p+2) \text{ au dénominateur pour le faire rentrer dans le carré)} \\
&= \frac{(2p+2)!}{(2(p+1))^2 (2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \\
&= \boxed{\frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \frac{\pi}{2}.}
\end{aligned}$$

La propriété est bien héréditaire.

Par principe de récurrence, on a donc bien pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}.}$$

2. **Équivalent**

(a) Suivons l'indication de l'énoncé. Posons $v_n = n W_{n-1} W_n$. Essayons de montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = v_n$. Pour $n \geqslant 1$, calculons :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= (n+1) W_{(n+1)-1} W_{n+1} = (n+1) W_n W_{n+1} \\
&= (n+1) W_n \frac{n}{n+1} W_{n-1} \text{ (formule de la première question)} \\
&= n W_n W_{n-1} = v_n.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est constante.}}$ De plus :

$$v_1 = 1 \times W_0 \times W_1 = 1 \times \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Donc pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$n W_{n-1} W_n = \frac{\pi}{2}.$$

Et donc :

$$\boxed{W_{n-1} W_n = \frac{\pi}{2n}.}$$

Ainsi le réel a existe et vaut 2.

(b) Puisque $\frac{\pi}{2n} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$, d'après la question précédente, tous les W_n ont même signe. Comme $W_0 = \frac{\pi}{2} > 0$, on a $\boxed{W_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

(c) Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$. Ainsi pour $n \geqslant 1$:

$$(\sin t)^{n+1} \leqslant (\sin t)^n \leqslant (\sin t)^{n-1}.$$

Puis par croissance de l'intégrale sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\boxed{\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+1} \mathrm{d}t}_{=W_{n+1}} \leqslant \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \mathrm{d}t}_{=W_n} \leqslant \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n-1} \mathrm{d}t}_{=W_{n-1}}.}$$

Puis comme $W_{n-1} > 0$, on peut diviser par W_{n-1} pour obtenir :

$$\underbrace{\frac{W_{n+1}}{W_{n-1}}}_{=\frac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1.$$

Par encadrement, on a donc $\frac{W_n}{W_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}.}$$

(d) On a :

$$\frac{\pi}{2n} = W_{n-1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n^2.$$

Et donc en passant à la puissance $\frac{1}{2}$ et puisque $W_n > 0$:

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

Partie II - Formule de Stirling

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)}\sqrt{2\pi(n+1)}}\frac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!}\right)\\
&= \ln\left(\mathrm{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)\\
&= 1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\\
&= 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\
&= 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on peut utiliser $\ln(1+u) \underset{u\to0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1-\left(1+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{-\frac{1}{12n^2}.}
\end{aligned}$$

4. On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}.$$

$-\frac{1}{12n^2}$ est de signe constant. Par équivalence, $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ l'est également au voisinage de $+\infty$. Par critère d'équivalence, les séries $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ et $\sum\left(-\frac{1}{12n^2}\right)$ ont même nature.
Or, à un facteur près, $\sum\left(-\frac{1}{12n^2}\right)$ est une série de Riemann convergente (car $\alpha > 1$).

Donc $\boxed{\sum_{n\geqslant1}(\ln u_{n+1} - \ln u_n) \text{ converge.}}$

Or pour $N \geqslant 2$:

$$\sum_{n=1}^{N-1} (\ln u_{n+1} - \ln u_n) = \ln(u_N) - \ln u_0 \text{ (télescopage)}$$

et donc :

$$\ln(u_N) = \sum_{n=1}^{N-1} (\ln u_{n+1} - \ln u_n) + \ln u_0.$$

Comme $\sum_{n \geqslant 1} (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ converge, la suite des sommes partielles converge aussi.

Ainsi $\boxed{(\ln u_n)_n \text{ converge également.}}$

5. Il existe donc $L \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\ln u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L.$$

Par composition avec exp qui est continue sur $\mathbb{R}$ (et donc en particulier en L) :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^L.$$

On peut le réécrire :

$$\frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^L.$$

Or $\mathrm{e}^L > 0$. Donc :

$$\frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^L.$$

Puis :

$$\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} \mathrm{e}^L.}$$

6. En utilisant cet équivalent dans la formule de W_{2n} (puisqu'on ne prend que des produits, quotients et puissances), on obtient :

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \\
&\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n} \mathrm{e}^{-2n} \sqrt{2\pi(2n)} \mathrm{e}^L}{(2^n n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} \mathrm{e}^L)^2} \frac{\pi}{2} \\
&\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2^{2n} n^{2n} \mathrm{e}^{-2n} 2\sqrt{\pi n} \mathrm{e}^L}{2^{2n} n^{2n} \mathrm{e}^{-2n} 2\pi n \mathrm{e}^{2L}} \frac{\pi}{2} \\
&\underset{n \to +\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{2\mathrm{e}^L} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.}
\end{aligned}$$

7. On sait que :

$$W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Donc :

$$W_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

Puis :

$$\frac{1}{2\mathrm{e}^L} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

En simplifiant, on obtient $\mathrm{e}^L \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$. Or e^L est une constante. Donc :

$$\boxed{\mathrm{e}^L = 1.}$$