TD3 - Normes

1 Normes

Exercice 1. Soit E l'espace des suites complexes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées et telles que $u_0 = 0$. On définit $\|\cdot\|_\infty$ et N par : pour tout $u \in E$, $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

1. Montrer que ce sont des normes sur E.
2. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $N \leq k\|\cdot\|_\infty$.
3. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 2. Montrer que $A \mapsto \|A\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'elle vérifie

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que $N : P \mapsto \sup\limits_{x\in[0,1]} \big|P(x)\big|$ définit une norme sur E.

Exercice 4 (CCP 2017 PC exo 1 extrait)**.**
Pour $M \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note $\|M\|_\infty = \max\limits_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} |m_{i,j}|$.

1. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) On note $N = A - I_3$, déterminer N^k pour $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$, et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|_\infty$.
2. (a) Montrer que $M \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C}) \mapsto \|M\|_\infty$ est une norme sur $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.
   (b) Montrer que pour $M \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathrm{M}_{q,r}(\mathbb{C})$, on a $\|MN\|_\infty \leq q\|M\|_\infty\|N\|_\infty$.
3. Soit $M \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ (avec $d \geq 2$) une matrice ayant une valeur propre[1] λ telle que $|\lambda| > 1$. De 2b, déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} \|M^n\|_\infty$.
4. Soit $N \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ (avec $d \geq 2$) telle que $N^p = 0_{\mathrm{M}_d(\mathbb{C})}$ et $N^{p-1} \neq 0_{\mathrm{M}_d(\mathbb{C})}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| < 1$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\big(\lambda I_d + N\big)^n\right\|_\infty$.

1. M admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'il existe $X \in \mathrm{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $MX = \lambda X$.

2 Suites dans un evn

Exercice 5. Soit $E = \mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et $f_n \in E$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n}x^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $\|\cdot\|_1$ (vers 0) et diverge pour $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 6. Soit (E,N) un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne, c'est-à-dire telle que $\forall (x,y) \in E^2, \quad N(f(x)-f(y)) \leq k\, N(x-y)$.

1. Montrer que f admet au plus un point fixe si $k < 1$.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f admet un point fixe $\ell \in E$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell)$.
   (b) Si $k < 1$, que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Exercice 7. On considère, dans l'espace vectoriel $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la suite (X_n) définie par :
$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, avec $X_0 \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}w_n + \frac{1}{2} \\[2ex] v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}v_n + \frac{1}{3}w_n \\[2ex] w_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}w_n - \frac{7}{6}. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (X_n) vérifie une relation matricielle de la forme $X_{n+1} = AX_n + B$.
2. Montrer que pour tout $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\|_\infty \leq k\|X\|_\infty$ où k est un réel de $]0;1[$.
3. Montrer que l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution $L \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. En déduire que la suite (X_n) est convergente, de limite L.

Exercice 8. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer alors que $P^2 = P$ et $AP = P = PA$.
Indication : On pourra utiliser la norme définie dans l'exercice 2.

Exercice 9. Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant : $8A^3 - 18A^2 + 13A - 3I_p = 0$. Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projecteur (*indication : déterminer* $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ *tels que* $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_n$ *pour tout entier* n).

Solutions

Exercice 1. • Soit $u \in E$, alors la suite u est bornée, autrement dit, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq M.$$

Donc les ensembles

$$\{|u_n|,\, n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{et} \qquad \{|u_{n+1} - u_n|,\, n \in \mathbb{N}\}$$

sont des ensembles de réels (non vides et) bornés (puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2M$), donc ont une borne supérieure, autrement dit les normes

$$\|u\|_\infty \qquad \text{et} \qquad N(u)$$

existent bien. Puis, pour tout $u \in E$,

$$N(u) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \|u\|_\infty \geq 0,$$

comme borne supérieure d'ensemble non vides de réels positifs.
• Soit $u \in E$. Par définition, une borne supérieure est un majorant, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |u_n| \leq \|u\|_\infty \qquad \text{et} \qquad 0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq N(u).$$

Si $\|u\|_\infty = 0$ alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |u_n| \leq \|u\|_\infty = 0, \qquad \text{donc} \qquad u_n = 0.$$

Donc $u = 0$ (la suite nulle). Si $N(u) = 0$ alors de même on a

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donc u est une suite constante, et comme $u_0 = 0$ (car $u \in E$), on a $u = 0$ (la suite nulle).
• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$. Alors

$$\|\lambda u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \big|(\lambda u)_n\big| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \big|\lambda u_n\big| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda|\big|u_n\big| \underset{(\star)}{=} |\lambda| \sup_{n \in \mathbb{N}} \big|u_n\big| = |\lambda| \|u\|_\infty$$

(où l'égalité $(\star)$ se justifie car $|\lambda| \geq 0$).

Remarque. Pour une démonstration plus rigoureuse (mais la précédente est dans le programme officiel, donc elle suffit) : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|(\lambda u)_n| = |\lambda u_n| = |\lambda||u_n| \leq |\lambda| \|u\|_\infty,$$

donc $|\lambda| \|u\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\Big\{ \big|(\lambda u)_n\big|,\ n \in \mathbb{N} \Big\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|\lambda u\|_\infty \leq |\lambda| \|u\|_\infty.$$

Puis, si $\lambda \neq 0$, ce qui précède (appliqué à $\dfrac{1}{\lambda}$ au lieu de λ, et λu au lieu de u) donne :

$$\|u\|_\infty = \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda u \right\|_\infty \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|\lambda u\|_\infty, \qquad \text{soit} \qquad |\lambda| \|u\|_\infty \leq \|\lambda u\|_\infty.$$

Cette dernière inégalité reste vraie si $\lambda = 0$, car la norme de la suite nulle est positive (et en fait, elle vaut 0). Donc, par double inégalité,

$$\|\lambda u\|_\infty = |\lambda| \|u\|_\infty.$$

Puis, en utilisant ce qui précède (qui est valable pour toute suite bornée, et pas seulement pour celles de E) :

$$\begin{aligned} N(\lambda u) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |(\lambda u)_{n+1} - (\lambda u)_n| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda u_{n+1} - \lambda u_n| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \big|\lambda(u_{n+1} - u_n)\big| \\ &= \big\|\lambda(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_\infty = |\lambda|\big\|(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_\infty \\ &= |\lambda| N(u) \end{aligned}$$

• Soit enfin $u \in E$ et $v \in E$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\big|(u+v)_n\big| = |u_n + v_n| \le |u_n| + |v_n| \le \|u\|_\infty + \|v\|_\infty,$$

donc $\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\Big\{\big|(u+v)_n\big|,\, n \in \mathbb{N}\Big\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|u+v\|_\infty \le \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\big|(u+v)_{n+1} - (u+v)_n\big| = |u_{n+1} - u_n + v_{n+1} - v_n| \le |u_{n+1} - u_n| + |v_{n+1} - v_n| \le N(u) + N(v),$$

donc $N(u) + N(v)$ est un majorant de l'ensemble

$$\Big\{\big|(u+v)_{n+1} - (u+v)_n\big|,\, n \in \mathbb{N}\Big\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$N(u+v) \le N(u) + N(v).$$

• Conclusion : $\|\cdot\|_\infty$ et N sont bien des normes.

2) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \le |u_{n+1}| + |u_n| \le 2\|u\|_\infty,$$

et comme une borne supérieure est le plus petit des majorants, on a alors

$$\boxed{N(u) \le 2\|u\|_\infty}.$$

Remarque. Pour u définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \ge 3$, il y a égalité. Donc, 2 est la meilleure valeur possible pour k.

3) Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u \in E$,

$$\|u\|_\infty \le \alpha N(u).$$

Soit la suite $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n^{(p)} = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1} & \text{si } n \le p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

alors $u^{(p)} \in E$ et

$$N(u^{(p)}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \|u^{(p)}\|_\infty = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k+1},$$

donc $\|u^{(p)}\|_\infty \leq \alpha N(u^{(p)})$ donne

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k+1} \leq \alpha.$$

Cela doit être vrai pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, donc en faisant tendre $p \to +\infty$, on obtient une contradiction, puisque

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k+1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

(car la série numérique

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \underset{j=k+1}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{j}$$

est une série divergente à termes positifs).

Remarque. Pour tout $u \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (par somme télescopique)

$$u_n = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k),$$

donc on a néanmoins

$$|u_n| \leq nN(u)$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut définir $\|A\| = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ (on prend le maximum d'un nombre fini de réels, donc il existe) et c'est un réel positif.
Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

- si $\|A\| = 0$, comme pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$0 \leq |a_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leq \|A\| = 0,$$

  alors on a

$$a_{i,j} = 0.$$

  C'est vrai pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, donc

$$A = 0_n.$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|\lambda A\| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |\lambda|\, |a_{i,j}| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = |\lambda| \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = |\lambda| \|A\|$$

  par propriété du max car $|\lambda| \geq 0$.

- Pour tous i et j dans $[\![1,n]\!]$, par inégalité triangulaire dans les réels,

$$|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}|\,.$$

  On en déduit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \quad \text{puis}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| = \|A\| + \|B\|$$

  C'est vrai pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ donc c'est vrai pour le max, d'où

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Conclusion :

$$\boxed{A \mapsto \|A\| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \text{ est bien une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Notons $C = AB$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la formule du produit matriciel, puis l'inégalité triangulaire, donnent :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |c_{i,j}| &= \sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}\, b_{k,j}\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|\ |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n \left(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}|\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^n (|a_{i,k}|\ \|B\|) = \|B\| \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \\
&\leq \|B\|\,\|A\|
\end{aligned}$$

C'est vrai pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, donc c'est vrai pour le max, et donc

$$\boxed{\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|}.$$

Exercice 3. • Soit $P \in E$. $N(P)$ existe car P est continue sur le segment $[0,1]$, donc borné (théorème des bornes atteintes). Puis,

$$N(P) \geq 0$$

comme borne supérieure d'un ensemble non vide de réels positifs.
• Si $N(P) = 0$, alors pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq |P(x)| \leq N(P) = 0, \qquad \text{donc} \qquad P(x) = 0.$$

Donc P a une infinité de racines (tout élément de $[0,1]$), donc $P = 0$ (le polynôme nul).
• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, alors

$$N(\lambda P) = \sup_{x\in[0,1]} \big|(\lambda P)(x)\big| = \sup_{x\in[0,1]} \big|\lambda P(x)\big| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda|\big|P(x)\big| \underset{(\star)}{=} |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} \big|P(x)\big| = |\lambda| N(P),$$

où l'égalité $(\star)$ provient de ce que $|\lambda| \geq 0$.

Remarque. Pour une démonstration plus rigoureuse (mais la précédente est dans le programme officiel, donc elle suffit) : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$, alors pour tout $x \in [0,1]$,

$$\big|(\lambda P)(x)\big| = \big|\lambda P(x)\big| = |\lambda|\big|P(x)\big| \leq |\lambda| N(P),$$

donc $|\lambda| N(P)$ est un majorant de l'ensemble

$$\Big\{\big|(\lambda P)(x)\big|,\ x \in [0,1]\Big\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$N(\lambda P) \leq |\lambda| N(P).$$

Puis, si $\lambda \neq 0$, ce qui précède (appliqué à $\dfrac{1}{\lambda}$ au lieu de λ, et λP au lieu de P) donne :

$$N(P) = N\left(\frac{1}{\lambda}\lambda P\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| N(\lambda P), \qquad \text{soit} \qquad |\lambda| N(P) \leq N(\lambda P).$$

Cette dernière inégalité reste vraie si $\lambda = 0$, car la norme de la fonction nulle est positive (et en fait, elle vaut 0). Donc, par double inégalité,

$$N(\lambda P) = |\lambda| N(P).$$

• Soit P et $Q \in E$, alors pour tout $x \in [0,1]$,

$$\big|(P+Q)(x)\big| = \big|P(x)+Q(x)\big| \leq \big|P(x)\big| + \big|Q(x)\big| \leq N(P)+N(Q).$$

Donc $N(P)+N(Q)$ est un majorant de l'ensemble

$$\Big\{\big|(P+Q)(x)\big|,\ x \in [0,1]\Big\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$N(P+Q) \leq N(P)+N(Q).$$

Exercice 4. 1a) Par calculs matriciels directs,

$$\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \qquad N^3 = 0_3,$$

puis pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$ (pour que $k-3 \in \mathbb{N}$),

$$N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times 0_3 = \boxed{0_3}.$$

1b) On a

$$A = I_3 + N,$$

et les matrices I_3 et N commutent, donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k.$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k + \sum_{k=3}^{n} 0_3 = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k$$

(car $N^k = 0_3$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$), ce qui donne

$$A^n = I_3 + n\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2n & -n^2+4n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Remarque. On vérifie alors directement que cette dernière égalité reste vraie pour $n=1$ et $n=0$.

On a alors directement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 6$,

$$\boxed{\|A^n\|_\infty = n^2 - 4n}$$

(car

$$n^2 - 4n \geq 2n \qquad \Leftrightarrow \qquad n^2 \geq 6n \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq 6,$$

puisque $n > 0$), et donc

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|_\infty = +\infty.$$

Remarque. En fait, on n'a pas besoin de déterminer précisément $\|A^n\|_\infty$. En effet, par définition, on a

$$\|A^n\|_\infty \geq \big|(A^n)_{2,3}\big| = |-n| = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_\infty = +\infty.$$

2a) • Remarquons que $\|\cdot\|_\infty$ est bien défini et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (on prend le maximum d'un nombre fini de modules, qui sont des réels positifs).
• Séparation : soit $M \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. On a alors par définition du maximum, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$0 \leq |m_{i,j}| \leq \|M\|_\infty.$$

Donc, si $\|M\|_\infty = 0$, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$0 \leq |m_{i,j}| \leq 0, \qquad \text{soit} \qquad m_{i,j} = 0.$$

Donc

$$M = 0_{\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})}.$$

• Homogénéité : soit $M \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$\|\lambda M\|_\infty = \max_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \left|(\lambda M)_{i,j}\right| = \max_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \left|\lambda m_{i,j}\right| = \max_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} |\lambda|\left|m_{i,j}\right| \underset{(\star)}{=} |\lambda| \max_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \left|m_{i,j}\right| = |\lambda|\|M\|_\infty$$

où l'égalité $(\star)$ se justifie car $|\lambda| \geq 0$.

Remarque. Pour une démonstration plus rigoureuse (mais la précédente est dans le programme officiel, donc elle suffit) : soit $M \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors pour $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$\left|(\lambda M)_{i,j}\right| = \left|\lambda M_{i,j}\right| = |\lambda||M_{i,j}| \leq |\lambda|\|M\|_\infty,$$

donc $|\lambda|\|M\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\left\{\left|(\lambda M)_{i,j}\right|,\ (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]\right\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|\lambda M\|_\infty \leq |\lambda|\|M\|_\infty.$$

Puis, si $\lambda \neq 0$, ce qui précède (appliqué à $\dfrac{1}{\lambda}$ au lieu de λ, et λM au lieu de M) donne :

$$\|M\|_\infty = \left\|\frac{1}{\lambda}\lambda M\right\|_\infty \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \left\|\lambda M\right\|_\infty, \qquad \text{soit} \qquad |\lambda|\|M\|_\infty \leq \|\lambda M\|_\infty.$$

Cette dernière inégalité reste vraie si $\lambda = 0$, car la norme de la matrice nulle est positive (et en fait, elle vaut 0). Donc, par double inégalité,

$$\|\lambda M\|_\infty = |\lambda|\|M\|_\infty.$$

• Inégalité triangulaire : soit M et $N \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, on a

$$|M_{i,j}| \leq \|M\|_\infty \qquad \text{et} \qquad |N_{i,j}| \leq \|N\|_\infty.$$

Or, par inégalité triangulaire classique (pour le module complexe), on a, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$\left|(M+N)_{i,j}\right| = |M_{i,j} + N_{i,j}| \leq |M_{i,j}| + |N_{i,j}| \leq \|M\|_\infty + \|N\|_\infty.$$

Donc $\|M\|_\infty + \|N\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\left\{\left|(M+N)_{i,j}\right|,\ (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]\right\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|M+N\|_\infty \leq \|M\|_\infty + \|N\|_\infty.$$

D'où l'inégalité triangulaire.
• Donc $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme.

2b) Soit $M \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathrm{M}_{q,r}(\mathbb{C})$, on a alors $MN \in \mathrm{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, et pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$,

$$(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} M_{i,k} N_{k,j}.$$

Fixons $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!]$, alors par inégalité triangulaire classique (pour le module complexe), on a

$$\left|(MN)_{i,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{q} \left|M_{i,k} N_{k,j}\right| = \sum_{k=1}^{q} \left|M_{i,k}\right| \left|N_{k,j}\right|.$$

Or, pour tout $k \in [\![1,q]\!]$, on a

$$|M_{i,k}| \leq \|M\|_\infty \qquad \text{et} \qquad |N_{k,j}| \leq \|N\|_\infty.$$

Alors par produit d'inégalités positives dans le même sens, puis addition d'inégalités dans le même sens,

$$\left|(MN)_{i,j}\right| \leq \sum_{k=1}^{q} \|M\|_\infty \|N\|_\infty = q \|M\|_\infty \|N\|_\infty.$$

Donc $q\|M\|_\infty \|N\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble

$$\left\{ \left|(MN)_{i,j}\right|,\ (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!] \right\},$$

donc est supérieur ou égal à la borne supérieure de cet ensemble, soit

$$\|MN\|_\infty \leq q \|M\|_\infty \|N\|_\infty.$$

3) λ est une valeur propre de M, donc il existe $X \in \mathrm{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ **non nul** avec $MX = \lambda X$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M^n X = \lambda^n X$.
Initialisation : pour $n = 0$, $M^0 = I_d$ et $\lambda^0 = 1$, donc

$$M^0 X = I_d X = X = 1.X = \lambda^0 X.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $M^n X = \lambda^n X$. Alors

$$M^{n+1} X = M \times M^n X \underset{\text{H.R.}}{=} M \times \lambda^n X = \lambda^n M X = \lambda^n . \lambda X = \lambda^{n+1} X,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M^n X = \lambda^n X.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par homogénéité de la norme,

$$\|M^n X\|_\infty = \|\lambda^n X\|_\infty = |\lambda|^n \|X\|_\infty.$$

Or, le résultat de la question précédente donne

$$\|M^n X\|_\infty \leq d \|M^n\|_\infty \|X\|_\infty.$$

De plus, X est non nul (puisque c'est un vecteur propre), donc par séparabilité, on a $\|X\|_\infty \neq 0$, et comme une norme est toujours positive, on a même $\|X\|_\infty > 0$.
Donc l'inégalité

$$|\lambda|^n \|X\|_\infty \leq d \|M^n\|_\infty \|X\|_\infty \qquad \text{donne} \qquad |\lambda|^n \leq d \|M^n\|_\infty$$

(en divisant par $\|X\|_\infty > 0$), soit encore

$$\frac{1}{d} |\lambda|^n \leq \|M^n\|_\infty.$$

Or, $|\lambda| > 1$, donc $\lim\limits_{n \to \infty} |\lambda|^n = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{d} |\lambda|^n = +\infty$ (car $d > 0$), puis par inégalité,

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \|M^n\| = +\infty}.$$

4) Remarquons que λI_d et N commutent, donc par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(\lambda I_d + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (\lambda I_d)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k.$$

Puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \geq p$ (pour que $k - p \in \mathbb{N}$), alors

$$N^k = N^{k-p} N^p = N^{k-p} 0_{\mathrm{M}_d(\mathbb{C})} = 0_{\mathrm{M}_d(\mathbb{C})},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p-1$, on a

$$(\lambda I_d + N)^n = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k + \sum_{k=p}^{n} 0_{\mathrm{M}_d(\mathbb{C})} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k.$$

Par inégalité triangulaire puis homogénéité, on a

$$0 \leq \|(\lambda I_d + N)^n\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k \right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{p-1} \left\| \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k \right\|_\infty = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} |\lambda|^{n-k} \|N^k\|_\infty.$$

Or, pour $k \in [\![0, p-1]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

(à k **fixé**). Donc

$$\binom{n}{k} |\lambda|^{n-k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} |\lambda|^{n-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée, car $|\lambda| < 1$).
On en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} |\lambda|^{n-k} \|N^k\|_\infty = 0$$

CAR la somme se fait sur un nombre constant (qui ne dépend pas de n) de termes qui tendent vers 0. Le théorème des gendarmes conclut alors :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left\| (\lambda I_d + N)^n \right\|_\infty = 0}.$$

Exercice 5. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant 0_E la fonction nulle sur $[0, 1]$,

$$\|f_n - 0_E\|_1 = \|f_n\|_1 = \int_0^1 \left|\sqrt{n} x^n\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{n} x^n \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0_E$$

pour $\|\cdot\|_1$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_\infty \geq \left|f_n(1)\right| = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

(en fait, $\|f_n\|_\infty = \sqrt{n}$), donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée pour $\|\cdot\|_\infty$, donc diverge pour $\|\cdot\|_\infty$ (on sait que toute suite convergente pour une norme est bornée pour cette norme).
• Pour $\|\cdot\|_2$, c'est plus subtil. Rappelons que l'on a un produit scalaire sur E en posant $\langle f \rangle g = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$, et que, pour tout $f \in E$,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f \rangle f}.$$

Donc, pour $f \in E$, si on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $|f|$ (qui est bien dans E) et 1 (la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$), on a

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = \langle |f| \rangle 1 \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 \mathrm{d}t} \sqrt{\int_0^1 1 \mathrm{d}t} = \|f\|_2.$$

Si $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ pour $\|\cdot\|_2$, alors on a
$$0 \leq \|f - f_n\|_1 \leq \|f - f_n\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc par théorème d'encadrement,
$$\|f - f_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
soit
$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$$
pour $\|\cdot\|_1$.
Comme on a unicité de la limite, on obtient $f = 0_E$ (d'après le début de l'exercice). Or,
$$\|f_n - 0_E\|_2 = \|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(\sqrt{n}x^n\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$
contradiction. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas pour $\|\cdot\|_2$.

Remarque. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$f_n : x \mapsto n^{\frac{1}{4}} x^n$$
converge vers 0_E pour $\|\cdot\|_2$, car
$$\|f_n - 0_E\|_2 = \|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \left(n^{\frac{1}{4}}x^n\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^1 \sqrt{n}x^{2n} \mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{2n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
(donc converge aussi pour $\|\cdot\|_1$ vers 0_E, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme vu précédemment), mais
$$\|f_n\|_\infty \geq \left|f_n(1)\right| = n^{\frac{1}{4}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
(en fait, $\|f_n\|_\infty = \left|f_n(1)\right| = n^{\frac{1}{4}}$), donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6. 1) Soit x et y deux points fixes de f. Alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$, donc
$$N(x-y) = N\big(f(x) - f(y)\big) \leq kN(x-y).$$
Si $N(x-y) > 0$, alors on peut diviser par $N(x-y)$, et on obtient
$$1 \leq k.$$
Mais l'énoncé dit $k < 1$, contradiction. Donc $N(x-y) \leq 0$, puis
$$N(x-y) = 0$$
(car une norme est positive), donc
$$x = y$$
(par axiome de séparabilité d'une norme), d'où l'unicité de (l'éventuel) point fixe de f.
2a) Remarquons : pour $n \in \mathbb{N}$, comme $f(\ell) = \ell$ (car ℓ est un point fixe), on a
$$N(u_{n+1} - \ell) = N\big(f(u_n) - f(\ell)\big) \leq kN(u_n - \ell).$$
On montre alors l'inégalité demandée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : pour $n = 0$, $k^0 = 1$, donc
$$N(u_0 - \ell) \leq 1 \cdot N(u_0 - \ell) = k^0 N(u_0 - \ell).$$
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell)$, alors avec l'inégalité que l'on a remarqué au début de la question,
$$N(u_{n+1} - \ell) \leq kN(u_n - \ell) \underset{\text{H.R.}}{\leq} k \cdot k^n N(u_0 - \ell) = k^{n+1} N(u_0 - \ell).$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell).$$
2b) Comme $0 \leq k < 1$, on a
$$k^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Puis, une norme est positive, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
et donc par le théorème d'encadrement, on a
$$N(u_n - \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
autrement dit la suite de vecteurs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 7. 1) Les matrices
$$\boxed{A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{7}{6} \end{pmatrix}}$$
conviennent.
2) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, commençons par remarquer que, par définition de la norme infinie,
$$|x| \leq \|X\|_\infty, \qquad |y| \leq \|X\|_\infty \qquad \text{et} \qquad |z| \leq \|X\|_\infty.$$
Puis, on a
$$AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(2x - z) \\ \frac{1}{6}(2x + y + 2z) \\ \frac{1}{6}(2x + 2y + z) \end{pmatrix}.$$
Alors
$$\big|(AX)_1\big| = \left|\frac{1}{6}(2x - z)\right| \leq \frac{1}{6}\big(2|x| + |z|\big) \leq \frac{1}{6}\big(2\|X\|_\infty + \|X\|_\infty\big) = \frac{1}{2}\|X\|_\infty,$$
et
$$\big|(AX)_2\big| = \left|\frac{1}{6}(2x + y + 2z)\right| \leq \frac{1}{6}\big(2|x| + |y| + 2|z|\big) \leq \frac{1}{6}\big(2\|X\|_\infty + \|X\|_\infty + 2\|X\|_\infty\big) = \frac{5}{6}\|X\|_\infty,$$
et enfin
$$\big|(AX)_3\big| = \left|\frac{1}{6}(2x + 2y + z)\right| \leq \frac{1}{6}\big(2|x| + 2|y| + |z|\big) \leq \frac{1}{6}\big(2\|X\|_\infty + 2\|X\|_\infty + \|X\|_\infty\big) = \frac{5}{6}\|X\|_\infty.$$
Donc
$$\|AX\|_\infty = \max\Big(\big|(AX)_1\big|, \big|(AX)_2\big|, \big|(AX)_3\big|\Big) \leq \max\left(\frac{1}{2}\|X\|_\infty, \frac{5}{6}\|X\|_\infty, \frac{5}{6}\|X\|_\infty\right) = \frac{5}{6}\|X\|_\infty,$$
et donc
$$\boxed{k = \frac{5}{6}} \in]0, 1[$$
convient.
3) Soit $X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors
$$X = AX + B \qquad \Leftrightarrow \qquad (I_3 - A)X = B,$$
or
$$\det(I_3 - A) = \frac{49}{108} \neq 0,$$

donc $I_3 - A$ est inversible, donc

$$(I_3 - A)X = B \qquad \Leftrightarrow \qquad X = (I_3 - A)^{-1}B,$$

il y a donc bien une et une seule solution, qui est

$$\boxed{L = (I_3 - A)^{-1}B}.$$

Remarque. Rappelons que le système $MX = Y$ avec $M \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de paramètre $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ a soit

1. aucune solution (lorsque $Y \notin \mathrm{Im}(M)$)
2. une et une seule solution (si $Y \in \mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Ker}(M) = \{0_{p,1}\}$ - dans le cas $n = p$, $\mathrm{Ker}(M) = \{0_{p,1}\}$ est équivalent à l'inversibilité de M, et donc $Y \in \mathrm{Im}(M)$ sera automatiquement vérifié),
3. une infinité de solutions (si $Y \in \mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Ker}(M) \neq \{0_{p,1}\}$).

Ceci dit, ici il y a une méthode plus en lien avec l'exercice pour constater que 1 n'est pas valeur propre de A (donc que $A - I_3$ ou $I_3 - A$ est inversible) : si $X \in E_1(A)$, alors $AX = X$, et donc

$$\|X\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq \frac{5}{6}\|X\|_\infty,$$

soit

$$\frac{1}{6}\|X\|_\infty \leq 0,$$

et comme une norme est positive, cela donne

$$\|X\|_\infty = 0, \qquad \text{puis} \qquad X = 0_{3,1}$$

(car une norme est séparable). Donc

$$E_1(A) = \{0_{3,1}\},$$

et donc la matrice $A - I_3$ est inversible.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} - L = (AX_n + B) - (AL + B) = A(X_n - L),$$

donc

$$\|X_{n+1} - L\|_\infty = \big\|A(X_n - L)\big\|_\infty \leq k\|X_n - L\|_\infty$$

par la question 2 (appliqué en remplaçant X par $X_n - L$).
Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\|X_n - L\|_\infty \leq k^n\|X_0 - L\|_\infty.$$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $k^n = k^0 = 1$, donc

$$\|X_0 - L\|_\infty \leq 1 \cdot \|X_0 - L\|_\infty = k^0\|X_0 - L\|_\infty.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\|X_n - L\|_\infty \leq k^n\|X_0 - L\|_\infty$. Alors, avec l'inégalité que l'on a remarqué au début de cette question,

$$\|X_{n+1} - L\|_\infty \leq k\|X_n - L\|_\infty \underset{\text{H.R.}}{\leq} k \cdot k^n\|X_0 - L\|_\infty = k^{n+1}\|X_0 - L\|_\infty,$$

d'où l'hérédité.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|X_n - L\|_\infty \leq k^n\|X_0 - L\|_\infty.$$

Puis, comme $0 \leq k < 1$, on a

$$k^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et comme une norme est positive,

$$0 \leq \|X_n - L\|_\infty \leq k^n\|X_0 - L\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc le théorème d'encadrement donne

$$\|X_n - L\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

autrement dit, la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

Exercice 8. Commençons par remarquer que :

$$A^{2p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} P$$

en tant que suite extraite. Montrons que cette limite est également P^2.
En effet, avec la norme de l'exercice 2, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|A^{2p} - P^2\| &= \|A^{2p} - A^pP + A^pP - P^2\| \\ &\leqslant \|A^{2p} - A^pP\| + \|A^pP - P^2\| \\ &\leqslant \|A^p(A^p - P)\| + \|(A^p - P)P\| \\ &\leqslant \underbrace{\|A^p\|}_{\text{borné car } (A^p) \text{ converge}} \underbrace{\|A^p - P\|}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\|A^p - P\|}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0} \underbrace{\|P\|}_{\text{constante}}. \end{aligned}$$

Donc par encadrement, on a $\|A^{2p} - P^2\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire :

$$A^{2p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} P^2.$$

Puis, par unicité de la limite, on a :

$$\boxed{P^2 = P.}$$

Les autres égalités se montrent de même. Par exemple :

$$A^{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} P$$

comme suite extraite. De plus :

$$\|A^{p+1} - AP\| = \underbrace{\|A\|}_{\text{constante}} \underbrace{\|A^p - P\|}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}.$$

D'où $A^{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} AP$. Et par unicité de la limite :

$$\boxed{AP = P.}$$

Exercice 9. • Remarquons que la relation sur A de l'énoncé se réécrit

$$A^3 = \frac{9}{4}A^2 - \frac{13}{8}A + \frac{3}{8}I_p.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_p.$$

Initialisation : pour $n = 0$,

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_0 = 1$$

conviennent.

Remarque. Pour $n = 1$,

$$\alpha_1 = \gamma_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta_1 = 1$$

conviennent, et pour $n = 2$,

$$\alpha_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = \gamma_2 = 0$$

conviennent.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $(\alpha_n, \beta_n \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_p.$$

Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &\underset{\text{H.R.}}{=} (\alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_p)A = \alpha_n A^3 + \beta_n A^2 + \gamma_n A \\ &= \alpha_n \left(\frac{9}{4}A^2 - \frac{13}{8}A + \frac{3}{8}I_p\right) + \beta_n A^2 + \gamma_n A \\ &= \left(\frac{9}{4}\alpha_n + \beta_n\right) A^2 + \left(\gamma_n - \frac{13}{8}\alpha_n\right) A + \frac{3}{8}\alpha_n I_p \end{aligned}$$

Donc, si on pose

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \dfrac{9}{4}\alpha_n + \beta_n \\ b_{n+1} = \gamma_n - \dfrac{13}{8}\alpha_n \\ \gamma_{n+1} = \dfrac{3}{8}\alpha_n \end{cases},$$

on a bien $A^{n+1} = \alpha_{n+1}A^2 + \beta_{n+1}A + \gamma_{n+1}I_p$. D'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(\alpha_n, \beta_n \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_p.$$

Et on peut même supposer que $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \dfrac{9}{4}\alpha_n + \beta_n \\ b_{n+1} = \gamma_n - \dfrac{13}{8}\alpha_n \\ \gamma_{n+1} = \dfrac{3}{8}\alpha_n \end{cases}.$$

• Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

notons

$$M = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{13}{8} & 0 & 1 \\ \frac{3}{8} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$X_{n+1} = MX_n,$$

et par récurrence immédiate,

$$X_n = M^n X_0$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
• On diagonalise M. Après calculs, la matrice

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ -7 & -10 & -9 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible et vérifie

$$M = PDP^{-1} \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ainsi, toutes les suites coordonnées (dans la base canonique) de la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, ce qui assure la convergence de la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$).

• Puis, le produit matriciel est bilinéaire, est défini sur des espaces de dimension finie, donc est continu, ce qui donne :

$$M^n = PD^nP^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ -10 & -10 & -10 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc (toujours par continuité du produit matriciel),

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = X_n = M^nX_0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ -10 & -10 & -10 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ -10 & -10 & -10 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(car $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Donc

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 8, \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n = -10, \qquad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 3,$$

puis

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} A^n = 8A^2 - 10A + 3I_p}.$$

• Notons ensuite

$$Q = 8A^2 - 10A + 3I_p$$

la limite de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors

$$Q^2 = (8A^2 - 10A + 3I_p)^2 = 64A^4 - 160A^3 + 148A^2 - 60A + 9I_p.$$

Or

$$A^3 = \frac{9}{4}A^2 - \frac{13}{8}A + \frac{3}{8}I_p \qquad \text{et} \qquad A^4 = A^3 \times A = \frac{55}{16}A^2 - \frac{105}{32}A + \frac{27}{32}I_p,$$

en reportant, on constate bien que

$$Q^2 = Q,$$

donc que Q est une matrice de projecteur (ce qui n'est pas surprenant, vu l'exercice précédent...).