Chapitre 1 - Séries numériques

1 Rappels

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de scalaires.

Définition : Série

La série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, est la suite des sommes partielles de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
Sous réserve d'existence, la somme de la série est la limite la suite des sommes partielles que l'on note alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Remarque : on peut commencer une suite au terme d'indice 1, 2, etc, sans fondamentalement changer les définitions.

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels **positifs**.

- Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Séries de références :

- Séries géométriques et géométriques dérivées
- Série exponentielle
- Séries télescopiques

2 Techniques d'étude

2.1 Comparaison série-intégrale

Méthode

1. On chercher à étudier une série $\sum u_n$.
2. On remarque que $u_n = f(n)$ pour une certaine fonction f, continue par morceaux et monotone.
3. On compare $f(n)$ à $\int_n^{n+1} f$ et $\int_{n-1}^{n} f$ via les propriétés de monotonie.
4. On conclut en majorant/minorant les sommes partielles avec des intégrales en utilisant la relation de Chasles.

Exemples :

- convergence séries de Riemann
- équivalent de $\sum \ln(n)$.

2.2 Formule de Stirling

Proposition

On a :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Démonstration : *On montre qu'il existe $C>0$ tel que :*

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Pour montrer que $C=\sqrt{2\pi}$, cf TD.
On pose $q_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$. Montrer que $\sum(\ln q_{n+1} - \ln q_n)$ converge. □

2.3 Règle de d'Alembert

Proposition

Soit (u_n) une suite numérique non nulle à partir d'un certain rang. On suppose que :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$

Alors :

- si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument ;
- si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
- si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure sur cette base uniquement.

Démonstration : ***À faire en cours*** *Idée : on montre que la série est dominée (ou minorée) par une série géométrique. Si $\ell = 1$, on donne deux exemples avec conclusions différentes (par exemple séries de Riemann)* □

2.4 Théorème spécial des séries alternées

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. On suppose que :

- la suite de terme général $(-1)^n u_n$ est de signe constant ;
- la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante ;
- la suite de terme général u_n converge vers 0.

Alors :

- la série $\sum u_n$ converge ;
- si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste de la série, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$;
- pour tout entier n, R_n est du même signe que u_{n+1}.

Exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Démonstration : ***À faire en cours.*** *Idée : montrer que la suite des termes pairs de la somme partielle et la suite des termes impairs sont adjacentes.* □

3 Familles sommables

3.1 Introduction

Question : peut-on faire des séries indicées par autre chose que des entiers ?
Cela soulève la question de l'*ordre* de sommation.
Exemple : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$. D'après la partie précédente, cette série converge. Montrer que :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

On réordonne de la manière suivante : on prend un terme positif, puis deux termes négatifs.
Cela revient à calculer :

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4(n+1)}\right).$$

Or :

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2n+1}$$

et donc :

$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4(n+1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Théorème : de réarrangement de Riemann (HP)

Soit (u_n) une suite numérique réelle telle que $\sum u_n$ converge mais $\sum |u_n|$ diverge.
Alors pour tout $S \in \overline{R}$, il existe un réarrangement de l'ordre de sommation de $\sum u_n$ pour que la somme fasse S.
Formellement, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\varphi(n)} = S.$$

Démonstration : *Hors programme (début d'exercice dans le TD)* □

Remarque : la convergence **absolue** est donc une condition **nécessaire** pour que l'ordre n'ait pas d'importance.

Théorème : de Dirichlet (HP)

Soit (u_n) une suite numérique réelle telle que $\sum u_n$ converge absolument.
Alors $\sum u_n$ converge et la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation.

3.2 Ensembles dénombrables

Définition

Soit E un ensemble. On dit que E est dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.
On dit de manière similaire que E est au plus dénombrable s'il existe une bijection d'une partie de $\mathbb{N}$ sur E.

Exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ etc.
Contre-exemples : $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $]0,1]$ (et donc $\mathbb{R}$).

Proposition

- Le produit cartésien de deux ensembles (au plus) dénombrables est (au plus) dénombrable. On peut généraliser à tout produit cartésien fini.
- L'union au plus dénombrable d'ensembles (au plus) dénombrables est (au plus) dénombrable.
- Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

3.3 Familles sommables de réels positifs

Définition

Soit I un ensemble (au plus) dénombrable et soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indicée par I.
On appelle somme de cette famille la quantité :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup_{J\subset I \text{ fini}} \sum_{j\in J} x_j.$$

Remarques :

- On a alors : $\sum_{i\in I} x_i \in [0,\infty]$.
- On dit que la famille est sommable si $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.
- Cela généralise bien la notion de séries.

Propriétés :

- Croissance : si $x_i \leqslant y_i$, $\sum x_i \leqslant y_i$.
- Linéarité : $\sum(ax_i+by_i) = a\sum x_i + b\sum y_i$.

Proposition

Soit une bijection $\varphi : \mathbb{N}\to I$. Alors si (x_i) est sommable, on a :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}.$$

Proposition : Sommation par paquets

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I. Alors :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i\in I_n} x_i.$$

En particulier, (x_i) est sommable si et seulement si la série du membre de droite converge.

Proposition : Théorème de Fubini

Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ indicée par $I\times J$.
On a :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_{i,j}.$$

Conséquence : On a $\sum a_i \sum b_j = \sum a_i b_j$.

Proposition : Produit de Cauchy

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \sum_{j\in\mathbb{N}} y_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\backslash i+j=n} x_i y_j.$$

Remarque : c'est la formule principale à retenir pour l'instant.

3.4 Généralisation aux familles complexes

Définition

- Si (x_i) est une famille réelle, on dit qu'elle est sommable si les familles des termes positifs et négatifs sont sommables séparément. Dans ce cas, on pose :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\substack{i\in I \\ x_i \geqslant 0}} x_i - \sum_{\substack{i\in I \\ x_i < 0}} (-x_i).$$

- Si (z_i) est une famille complexe, on dit qu'elle est sommable si les familles des parties réelles et imaginaires sont sommables séparément. Dans ce cas, on pose :

$$\sum_{i\in I} z_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(z_i) + \mathrm{i} \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(z_i).$$

Proposition

(z_i) est sommable si et seulement si $(|z_i|)$ l'est.

Propriétés :

- Les propriétés de croissance (dans le cas réel) et de linéarité se généralisent.
- Si (y_i) est sommable et si $|x_i| \leqslant |y_i|$ alors (x_i) est sommable. De plus dans ce cas :

$$\left| \sum_{i\in I} x_i \right| \leqslant \sum_{i\ \in I} |y_i|.$$

Proposition

Soit une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$. Alors si (z_i) est sommable, on a :

$$\sum_{i\in I} z_i = \sum_{n=0}^{+\infty} z_{\varphi(n)}.$$

Proposition : Sommation par paquets

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I. Alors :

$$\sum_{i\in I} z_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i\in I_n} z_i.$$

Proposition : Théorème de Fubini

Soit $(z_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ indicée par $I \times J$ et sommable.
On a :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} z_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} z_{i,j}.$$

Conséquence : On a $\sum a_i \sum b_j = \sum a_i b_j$.

Proposition : Produit de Cauchy

Soit (x_n) et (y_n) deux suites numériques complexes. Le produit de Cauchy des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ est la série de terme général z_n avec :

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

Si (x_n) et (y_n) sont absolument convergentes alors leur produit de Cauchy l'est et :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \sum_{j\in\mathbb{N}} y_j = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n.$$