

CHAPITRE 2 - COMPLÉMENT SUR LES ESPACE VECTORIELS

1 Produits et sommes d'espaces vectoriels

1.1 Généralités

Définition : Produit d'espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_n$ des espaces vectoriels. On pose :

$$\prod_{i=1}^n F_i = \{(x_1, \dots, x_n), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in F_i\}.$$

$\prod_{i=1}^n F_i$ muni des opérations naturelles est à son tour un espace vectoriel.

Proposition

$\prod_{i=1}^n F_i$ est de dimension finie si et seulement si chacun des F_i est de dimension finie. Dans ce cas, on a :

$$\dim \prod_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \dim F_i.$$

Définition : Somme d'espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de F . On pose :

$$F_1 + \dots + F_n = \{x_1 + \dots + x_n, (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n\}.$$

Remarque : lien entre produit et somme

1.2 Sommes directes

Définition

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On dit que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x_1 + \dots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0_E.$$

Cela est équivalent à dire que l'application :

$$\Sigma : \begin{cases} F_1 \times \dots \times F_n & \rightarrow E \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto x_1 + \dots + x_n \end{cases}$$

est injective.

Exemples :

- $F_1 = \mathbb{R}[X^3]$, $F_2 = X F_1$ et $F_3 = X^2 F_1$ sont en somme directe dans $E = \mathbb{R}[X]$.
- $G_1 = \text{Vect}(1)$, $G_2 = \text{Vect}(X)$ et $G_3 = \text{Vect}(1 + X)$ ne sont pas en somme directe dans $E = \mathbb{R}[X]$.

Remarques :

- C'est une forme de généralisation de la notion de liberté. En effet : $(e_1, \dots, e_n)$ est libre si et seulement si $\text{Vect}(e_1), \dots, \text{Vect}(e_n)$ sont en somme directe.
- Démonstration du lien avec la somme directe pour 2 sev
- La différence de caractérisation pour 2 est le parallèle direct pour la liberté.
- Notation $\bigoplus_{i=1}^n F_i$.
- $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si l'application somme $\Sigma : \prod_{i=1}^n F_i \rightarrow E$ est un isomorphisme.

Proposition

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sev de E . Si E est de dimension finie alors :

$$\dim \sum_{i=1}^n F_i \leq \sum_{i=1}^n \dim F_i.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

Démonstration : À faire en cours.

□

Définition : Base adaptée à un sous espace

Soient E un ev et F un sev de E .

Soit B une base de E . On dit que B est adaptée au sous-espace F si l'on peut extraire de B une sous-famille qui soit une base de F .

Définition : Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soit $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

Soit B une base de E . On dit que B est adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ si elle est adaptée à chacun des F_i . Cela revient à dire que B peut s'obtenir par la concaténation de bases des F_i .

Remarque : Soit B une base de E obtenue par la concaténation des familles B_i . Alors les $\text{Vect}(B_i)$ sont en somme directe.

2 Décomposition adaptée à un endomorphisme

2.1 Sous-espaces stables

Définition

Soit E un ensemble. Soit $u : E \rightarrow E$. Soit $F \subset E$.

On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Remarque : la définition concerne des ensembles quelconques mais en pratique on l'appliquera surtout à des sous-espaces vectoriels avec des endomorphismes.

Exemples :

- $u : P \mapsto P''$ définie sur $\mathbb{R}[X]$ stabilise les polynômes pairs.
- Pour un endomorphisme u , $\{0\}$ et E sont stables.
- Pour un endomorphisme u , $\text{Ker } u$ est stable par u . $\text{Im } u$ est stable par u .
- Si $F_1, \dots, F_n$ sont des sev stables par u .
- **Exercice :** Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v .

Définition : Endomorphisme induit

Soit E un ev et u un endomorphisme de E . Soit F un sev stable par u . L'application u_F (la restriction de u à F) est alors un endomorphisme de F (appelé endomorphisme induit sur F).

Proposition

Soit E un ev de dimension finie.

Soient u un endomorphisme de E et F un sev de E .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. F est stable par u ;
2. pour toute base B de F , on a $u(B) \subset F$;
3. il existe une base B de F telle que $u(B) \subset F$;
4. pour toute base B de E adaptée à F , la matrice de u dans B a des coefficients nuls aux positions dont la colonne correspond à un vecteur de F et dont la ligne correspond à un vecteur hors de F ;
5. pour toute base B de E adaptée à F et telle que les éléments formant une base de F soient rangés dans la moitié gauche de B , la matrice de u dans B est triangulaire supérieure par blocs
6. il existe une base B de E adaptée à F et telle que les éléments formant une base de F soient rangés dans la moitié gauche de B , la matrice de u dans B est triangulaire supérieure par blocs

Remarque : Soit F un sous-espace stable par u . Soit G un supplémentaire de F dans E . On a donc $E = F \oplus G$. La matrice de u dans une base adaptée à cette décomposition est de la forme :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$$

Cette forme simplifie les calculs et c'est un principe de "dévissage" intéressant pour étudier les endomorphismes.

2.2 Sommes directes de sous-espaces stables

Proposition

Soient E un ev de dim finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soient $F_1, \dots, F_n$ des sev de E . On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. chacun des espaces F_i est stable par u ;
2. pour toutes bases $B_1, \dots, B_n$ respectivement de $F_1, \dots, F_n$ la matrice de u dans la base concaténée B est diagonale par blocs de la forme :

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{B_1}(u) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \text{Mat}_{B_2}(u) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \text{Mat}_{B_n}(u) \end{pmatrix}$$

3. il existe des bases $B_1, \dots, B_n$ comme définies précédemment.

2.3 Opérations matricielles par blocs

Définition : compatibilité des formats pour les matrices par blocs

Propriétés :

- L'addition de matrice peut se faire par blocs
- De manière générale, les combinaisons linéaires peuvent se faire par blocs
- Le produit peut se faire par blocs
- En particulier, le produit se passe bien pour les matrices triangulaires ou diagonales par blocs
- La transposition peut se faire par blocs

Proposition : Déterminant par blocs

Si :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

est triangulaire par blocs alors :

$$\det M = \det A_1 \times \cdots \times \det A_n.$$

3 Trace

3.1 Cas des matrices

Définition

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. On pose :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

Propriétés :

- L'application : $\text{tr} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire.
- pour tout matrice A carrée $\text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A)$.
- La trace peut être calculée par blocs.

3.2 Trace et produit, matrices semblables

Proposition

Pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Démonstration : *À faire en cours. Il suffit de dérouler les définitions.* □

Remarque : le résultat se généralise même à $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

Corollaire

Si A et B sont semblables alors elles ont même trace.

Démonstration : *À faire en cours* □

Remarques :

- On dit que la trace est un invariant de similitude.
- **Attention !** En général $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$. Mais on a $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB)$.

Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = AB - BA$.

3.3 Trace d'endomorphismes

Définition

Soit E un ev de dim finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E . On pose :

$$\text{tr}_B(u) = \text{tr}(\text{Mat}_B(u))$$

Propriétés :

- Pour toutes bases B et B' , on a $\text{tr}_B(u) = \text{tr}_{B'}(u)$. On appelle $\text{tr}(u)$ cette unique valeur.
- L'application : $\text{tr} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire.
- $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$.
- on peut calculer la trace par blocs. Si $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$, alors :

$$\text{tr}(u) = \sum_{i=1}^n \text{tr}(u_{F_i}).$$

4 Interpolation de Lagrange

4.1 Théorème

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ des scalaires deux à deux distincts. Soient $(b_1, \dots, b_{n+1})$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i .

Remarque : cela revient à dire que l'application $\psi : P \mapsto P(a_1, \dots, a_{n+1})$ est bijective.

Démonstration : *À faire en cours.* Utiliser la linéarité et prouver que ψ est injective puis conclure avec les dimensions. $\square$

Proposition

Soit $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Pour le cas particulier $b_j = \delta_{i,j}$, il existe un unique L_i tel que $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$. On a :

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Démonstration : *À faire en cours.* $\square$

Propriétés :

- $L_1, \dots, L_{n+1}$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a :

$$P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i.$$

- On a $L_1 + \dots + L_{n+1} = 1$.

4.2 Déterminants de Vandermonde

Proposition

L'application :

$$e : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_{n+1})) \end{cases}$$

a pour matrice dans les bases canoniques :

$$V(a_1, \dots, a_{n+1}) = \text{Mat}(e) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & \dots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Propriété : $\det V(a_1, \dots, a_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i)$.

Démonstration : *À faire en cours.* Idée : par récurrence sur n . $\square$