

CHAPITRE 3 - NORMES

1 Normes sur un espace vectoriel

1.1 Généralités

Définition : Norme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une norme sur E est une fonction $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

1. N est positivement homogène : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$;
2. N vérifie l'inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$;
3. N vérifie l'axiome de séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Remarques :

- On note en général les normes $\|\cdot\|$.
- Un espace vectoriel muni d'une norme est dit normé.

Définition : Distance associée

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. On appelle distance associée à $\|\cdot\|$ sur E l'application :

$$\begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto \|x - y\| \end{cases}$$

Propriétés :

- Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- Propriété de séparation : $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

1.2 Exemples de références

Définition : Normes sur $\mathbb{K}^n$

On pose :

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{k=1}^n |x_k| \\ \|x\|_2 &= \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|x\|_\infty &= \sup\{|x_k|, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \end{aligned}$$

Ce sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration : *Cas $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ à faire en cours.* □

Remarques :

- On peut généraliser avec $\|\cdot\|_p$ pour $p \geq 1$.
- $\|\cdot\|_\infty$ est bien en un sens (à préciser) la limite de $\|\cdot\|_p$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.
- La généralisation ne fonctionne pas pour $p \in]0, 1[$ (inégalité triangulaire non vérifiée).

Définition : Normes euclidienne sur un espace préhilbertienne

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme sur E .

Démonstration : *À faire en cours. La seule difficulté est l'inégalité triangulaire qui découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.* □

Exemples :

- Exemple sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$;
- Exemple sur $C^0([0, 1])$;
- généralisation avec un poids $w \in C^0([0, 1])$.

Définition : Norme sur un espace fonction bornée

Pour D un ensemble, on pose pour toute fonction $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ bornée :

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)|, t \in D\}.$$

Cela définit une norme sur l'ensemble des fonctions bornées de D dans $\mathbb{K}$.

Exemple : Norme sur $\mathcal{C}^0([0, 1])$ (théorème des bornes atteintes)

Remarque : On note l'ensemble des fonctions bornées de D dans $\mathbb{K}$ $L^{\infty}(D, \mathbb{K})$.

1.3 Parties d'espaces vectoriels normés**Définition : Boules et sphères**

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$\overset{\circ}{B}(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| < r\}.$$

De même, on définit la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ et la sphère $S(a, r)$:

$$\begin{aligned}\overline{B}(a, r) &= \{x \in E : \|x - a\| \leq r\} \\ S(a, r) &= \{x \in E : \|x - a\| = r\}\end{aligned}$$

Exemple : boules et sphères sur $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$.

Remarque : $S(a, r) = \overline{B}(a, r) \setminus \overset{\circ}{B}(a, r)$.

Définition : Parties convexes d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel. Soit D une partie de E .

On dit que D est convexe lorsque pour tout $(x, y) \in D^2$ le segment $[xy]$ est inclus dans D . Cela revient à dire :

$$\forall x, y \in D, \forall t \in [0, 1], (1 - t)x + ty \in D.$$

Exemples :

- Exemples simples dans $\mathbb{R}^2$.
- Les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes. **Preuve à faire.**

Définition : Partie bornée

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soit D une partie de E . On dit que D est bornée s'il existe a et r tel que $D \subset \overline{B}(a, r)$.

Remarques :

- la réunion de parties bornées est bornées.
- D est borné s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in D, \|x\| \leq M.$$

- on peut définir la notion de suites bornées et de fonctions bornées si leurs images sont bornées.

Concrètement $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M$.

De même, $f : I \rightarrow E$ est bornée si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in I, \|f(x)\| \leq M$.

Attention ! toutes ces définitions dépendent de la norme choisie.

2 Convergence de suites dans un espace normé**2.1 Généralités****Définition : Convergence d'une suite**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in E$. On dit que (x_n) converge vers ℓ si :

$$\|x_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Dans ce cas, on note $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Remarques :

- (x_n) est dite convergente s'il existe $\ell \in E$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.
- (x_n) est dite divergente si elle n'est pas convergente.
- *A priori*, la nature d'une suite dépend de la norme choisie (et il y a effectivement des cas pathologiques que nous verrons).
- *A fortiori*, l'éventuelle limite peut dépendre de la norme choisie.

Exemples :

- $E = \mathbb{K}^d$ muni de $\|\cdot\|_{+\infty}$. La convergence correspond à la convergence composante par composante.

- Le résultat précédent se généralise à d'autres espaces de dimension finie.
- **Attention !** Pas le cas en dimension infinie. Par exemple sur $\mathcal{C}^0([0, 1])$, étudier $f_n : t \mapsto t^n$.
- Sur $\mathbb{K}^n$, on peut montrer le même résultat pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ (exercice).
- Exemple de nature dépendant de la norme : $f_n : t \mapsto \begin{cases} 1 - nt & \text{si } t < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$.

2.2 Propriétés

Proposition : Unicité de la limite

Soient (x_n) , ℓ et ℓ' tels que :

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \quad \text{et} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'.$$

Alors $\ell = \ell'$.

Démonstration : *À faire en cours.* □

Remarques :

- A priori encore, la limite dépend de la norme.
- On note l'éventuelle limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
- Attention ! lorsqu'on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, on sous-entend qu'une telle limite existe.

Proposition

Une suite convergente est bornée

Démonstration : *À faire en cours.* □

Remarques :

- Encore une fois, tout dépend de la norme. On parle ici de convergence et de caractère borné *pour la même norme*.
- La réciproque est fausse.

Proposition

Le passage à la limite est compatible avec les combinaisons linéaires.

Démonstration : *À faire en cours.* □

Proposition

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.
De plus, la limite de la suite extraite est la limite de la suite de départ.

Démonstration : *À faire en cours.* □

3 Comparaison des normes

Définition

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un même espace E .
On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes α et β telles que $N_1 \leq \alpha N_2$ et $N_2 \leq \beta N_1$.

Exemples : $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

Remarque : Si $N_1 \leq \alpha N_2$, on dit que N_2 est plus fine que N_1 .

Proposition

Sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Proposition

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes. (x_n) est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2 .

Démonstration : *À faire en cours.* □

Proposition

Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes. (x_n) est convergente pour N_1 si et seulement si elle est convergente pour N_2 .
De plus, dans ce cas, les limites sont les mêmes.

Démonstration : *À faire en cours.*

□

Remarques :

- Si une suite n'a pas la même nature pour deux normes, alors nécessairement les deux normes ne sont pas équivalentes. Par exemple $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}^0([0, 1])$.
- En fait, la réciproque est également vraie : si deux normes ne sont pas équivalentes, alors il existe une suite qui est convergente pour l'une mais pas pour l'autre.
À faire en cours. démonstration en trouvant (x_n) telle que $N_1(x_n) > n^2 N_2(x_n)$.