DS 1 - Algèbre linéaire & Séries numériques

Samedi 20/09/2025 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Exercice 1 - ITC

1. Écrire une fonction qui prend en argument une liste L de nombres positifs ou nuls, et qui renvoie l'élément de L le plus grand.
2. Écrire une fonction qui prend en argument une liste L et une valeur quelconque, et qui renvoie la liste des indices de L où la valeur se trouve.

Exercice 2 - E3A PC 2019 Maths 1 (exercice 1)

1. **Question de cours :** Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $s_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$.
   Vérifier que la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et divergente.
   (b) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait : $\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1$.
   On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier vérifiant cette propriété et on pose $u_n = \frac{a_n}{n}$.
   On a donc : $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1$.
3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est-elle convergente ?
4. Prouver pour $n \geqslant 2$ que l'on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1.$$
5. Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ alors $\ell \in [2,3]$.
6. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :
$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}.$$
7. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :
$$1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leqslant 1.$$
8. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 - Inspiré de Centrale PC Maths 2 2016

Soit Δ l'application dite *de différence finie*, de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

On définit $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}[X]}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^{n+1} = \Delta \circ \Delta^n$.
Pour simplifier, on pourra noter, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^n P = \Delta^n(P)$.

1. (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Q un polynôme de degré n. Déterminer le degré de ΔQ.
   (c) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$ (*on pourra utiliser ce qui précède*).
   (d) Pour $r \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{R}_r[X]$ est stable par Δ.
   (e) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, notons Δ_r l'endomorphisme de $\mathbb{R}_r[X]$ induit par Δ. Montrer que $\mathrm{Im}(\Delta_r) = \mathbb{R}_{r-1}[X]$. En déduire que Δ est surjective.
2. Soit $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la famille de polynômes définie par $N_0 = 1$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $N_k = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$.
   (a) Pour tout entier k, déterminer ΔN_k (*pour $k \geq 1$, montrer que $\Delta N_k = N_{k-1}$*).
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, une expression de $\Delta^n N_k$ (*distinguer les cas $0 \leq k < n$ et $n \leq k$*). Préciser alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $(\Delta^n N_k)(0)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(N_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire la formule dite *de Gregory*[1] :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n}(\Delta^k P)(0)\, N_k.$$
4. Application : où l'on découvre une méthode de calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$ $(n \in \mathbb{N},\, p \in \mathbb{N}^*)$.
   (a) Déterminer l'ensemble des polynômes $F \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\Delta(F) = X^4$.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4$ en fonction de n.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geqslant 2$. Démontrer que :
$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$
   (b) En déduire que :
$$\sum_{k\geqslant n}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Démontrer que :
$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1. James, écossais, 1638-1675 ; télescope, développement en série entière d'arctan, tan et autres, réseaux de diffraction, première preuve publiée du théorème fondamental de l'analyse...

3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que, pour tout $t \in]0, \pi]$, on a :

$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.$$

4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_0^{\pi} (at^2 + bt)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

Vérifier alors que :

$$\int_0^{\pi} (at^2 + bt)A_n(t)\mathrm{d}t = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Déduire des questions précédentes que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$.
6. Déduire des questions précédentes que :

$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Problème 5 - Extrait adapté de CCINP PC 2019

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée $n$pème.
On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés *polynôme de Legendre*.
Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.
3. Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1, 1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda(X - 1)^{n-1}(X + 1)^{n-1}(X - \alpha).$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

5. **Dans cette question seulement,** $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels α_1, ..., α_k deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X - 1)^{n-k}(X + 1)^{n-k}(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels β_1, ..., β_{k+1} deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X - 1)^{n-k-1}(X + 1)^{n-k-1}(X - \beta_1)\cdots(X - \beta_{k+1}).$$

6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$. On les note x_1, ..., x_n, en convenant que $x_1 <$ ... $<_n$.

On note $A_n = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$. En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = a_n A_n$.

Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

7. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions suivantes, n désigne un entier naturel.

8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ. Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \phi_n(P) = \phi(P)$.

9. On note $M = (m_{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!], m_{k,k} = k(k+1)$.
   Pour les 5/2 : en déduire que ϕ_n est diagonalisable.
10. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ (X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
11. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 10, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.
12. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\phi_n(L_k) = \lambda_k L_k$ où λ_k est un réel à préciser.

On pourra utiliser la question 11.

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Dans la suite du problème, pour P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

13. Justifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

14. Établir que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle\phi(P), Q\rangle = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t$, puis que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle\phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle.$$

15. En utilisant la question 12, montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

On pourra étudier $\langle\phi(L_i), L_j\rangle$ pour $i \neq j$.

16. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \langle P, L_n\rangle = 0$.
17. On admet que $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}L_n$. Que peut-on dire de la famille de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|P - Q\|$ la distance de P au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat de cours de première année, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$ puis justifier l'égalité :

$$d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2 \text{ où } c_k(P) = \langle P, Q_k\rangle.$$

19. Prouver que la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et que : $\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k(P))^2 \leqslant \|P\|^2$.