Correction DS 1 - Algèbre linéaire & Séries numériques

Exercice 1 - ITC

1. Écrire une fonction qui prend en argument une liste L de nombres positifs ou nuls, et qui renvoie l'élément de L le plus grand.

```python
def plus_petit(L):
    a = 0
    for e in L:
        if e > a:
            a = e
    return a
```

2. Écrire une fonction qui prend en argument une liste L et une valeur quelconque, et qui renvoie la liste des indices de L où la valeur se trouve.

```python
def liste_indices(L, v):
        liste = []
        for i in range(len(L)):
            if L[i] == v:
                liste.append(i)
        return liste
```

Exercice 2 - E3A PC 2019 Maths 1 (exercice 1)

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. (a) Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$s_{p+1} - s_p = \frac{1}{n+p+1} > 0.$$

Donc $\boxed{(s_p) \text{ est croissante.}}$ De fait, on pouvait le voir au fait que la suite (s_p) est la somme partielle d'une série à termes positifs.

De plus $\frac{1}{n+k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$ (à n fixé). Comme ces termes sont positifs, par critère d'équivalence, la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{n+k}$ et la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ ont la même nature. Or la seconde série est la série harmonique qui diverge.

Donc en particulier, $\boxed{\text{la suite des sommes partielles } (s_p) \text{ diverge également.}}$

(b) Puisque (s_p) est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, (s_p) converge ou tend vers $+\infty$. Comme (s_p) diverge, on a :

$$\lim_{p\to+\infty} s_p = +\infty.$$

Et donc en particulier il existe p entier tel que $s_p > 1$. Et donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} > 1.}$$

3. Comme p_n est toujours entier, on a $p_n \geqslant 0$. Donc on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = n + p_n \geqslant n.$$

Par comparaison, on a $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc $\boxed{(a_n) \text{ diverge.}}$

4. Soit $n \geqslant 2$. On a pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $n+k > n > 0$ et donc $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} &< \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \\ &< n \times \frac{1}{n} \\ &< \boxed{1.}\end{aligned}$$

Pour la deuxième, il faut être un peu plus astucieux.
L'idée est de se rendre compte que quand on passe de n à $n+1$, on perd le premier terme de la somme mais on gagne trois autres termes qui vont largement compenser. Du coup, on peut procéder par récurrence.

- **Initialisation :** pour $n = 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}.$$

Et donc on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2\times 2-2} \frac{1}{2+k} > 1.}$$

- **Hérédité :** Soit $n \geqslant 2$. On suppose que :

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1.$$

Montrons que :

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)-2} \frac{1}{(n+1)+k} > 1.$$

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2(n+1)-2} \frac{1}{(n+1)+k} &= \sum_{k'=1}^{2(n+1)-1} \frac{1}{n+k'} \\ &= \left(\sum_{k'=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k'}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+(2n-1)} + \frac{1}{n+(2n)} + \frac{1}{n+(2n+1)} \\ &> 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+(2n-1)} + \frac{1}{n+(2n)} + \frac{1}{n+(2n+1)} \\ &\quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &> 1 + \frac{(3n-1)(3n+1) + 3n(3n+1) + 3n(3n-1) - 3(3n-1)(3n+1)}{3n(3n-1)(3n+1)} \\ &> 1 + \frac{-1+3}{3n(3n-1)(3n+1)} \\ &> 1 + \underbrace{\frac{2}{3n(3n-1)(3n+1)}}_{>0} \\ &> 1.\end{aligned}$$

La propriété est bien héréditaire.

Par principe de récurrence, on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1.}$$

pour tout $n \geqslant 2$.

5. Puisque (s_p) est croissante, si pour un p donné $s_p < 1$ alors $p_n > p$. Ainsi, avec la question précédente, on a $p_n > n-1$.
De même, puisque p_n est le plus petit entier $s_{p_n} > 1$, alors si $s_p > 1$ pour un certain p alors $p_n \leqslant p$. Ainsi, d'après la question précédente, on a : $p_n \leqslant 2n-2$.
On en déduit $2n-1 < a_n \leqslant 3n-2$. Puis :
$$\frac{2n-1}{n} < u_n \leqslant \frac{3n-2}{n}.$$
Ainsi, *si* (u_n) *admet une limite réelle* ℓ, alors par passage à la limite, on a :
$$\boxed{2 \leqslant \ell \leqslant 3.}$$

6. Par définition de p_n, $s_{p_n} > 1$. On a donc :
$$\boxed{1 < \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}_{=s_{p_n}}}$$
ce qui est la première inégalité à démontrer. Mais puisque p_n est le plus petit entier vérifiant cette propriété, on a $s_{p_n-1} \leqslant 1$, c'est-à-dire :
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n-1} \leqslant 1.$$
Et donc en ajoutant $\frac{1}{a_n}$ des deux côtés, on trouve :
$$\boxed{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}.}$$

7. D'après ce qui précède, on a déjà :
$$\boxed{1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$
en basculant le $\frac{1}{n}$ à gauche et en passant à une inégalité large. Puis $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Donc, en particulier pour $k \in [\![0, p_n-1]\!]$, pour $t \in [n+k, n+k+1]$, on a :
$$\frac{1}{n+k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n+k}$$
et en intégrant sur $[n+k, n+k+1]$:
$$\underbrace{\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{n+k+1}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{n+k+1}} \leqslant \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{n+k}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{n+k}}.$$
Puis en resommant :
$$\sum_{k=0}^{p_n-1} \frac{1}{n+k+1} \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{p_n-1} \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t}_{=\int_n^{n+p_n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t} \leqslant \sum_{k=0}^{p_n-1} \frac{1}{n+k}.$$
D'où :
$$\boxed{\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n-1}.}$$
Le terme de gauche est s_{p_n-1} qui est plus petit que 1 et donc on a bien finalement :
$$\boxed{1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n-1} \leqslant 1.}$$

8. On a :
$$\int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_n^{a_n} = \ln(a_n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = \ln(u_n).$$
D'après ce qui précède, on a donc :
$$\underbrace{1 - \frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1} \leqslant \ln(u_n) \leqslant 1.$$
Donc, par encadrement $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Puis en composant avec exp continue en 1, on obtient :
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}.}$$

Exercice 3 - Inspiré de Centrale PC Maths 2 2016

1. (a) Clairement, si P est un polynôme, $P(X+1) - P(X)$ est un polynôme, donc Δ est bien définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
Montrons que Δ est linéaire. Soient P, $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}\Delta(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(X+1) - (P+\lambda Q)(X)\\ &= P(X+1) + \lambda Q(X+1) - P(X) - \lambda Q(X)\\ & \text{(linéarité de l'évaluation)}\\ &= (P(X+1) - P(X)) + \lambda(Q(X+1) - Q(X))\\ &= \Delta(P) + \lambda\Delta(Q).\end{aligned}$$
Donc Δ est bien linéaire.
Et donc $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$

(b) **Remarque :** Une recherche au brouillon montre rapidement que les termes de plus haut degré de $P(X+1)$ et $P(X)$ vont se compenser. Quelques essais devraient permettre d'intuiter que le degré de $\Delta(Q)$ est exactement un degré de moins que celui de Q. Mais la difficulté est de traiter proprement les monômes de degrés inférieurs qui apparaissent.
Procédons par récurrence et montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'image d'un polynôme de degré n est de degré $n-1$.

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, soit Q un polynôme de degré 1. On peut écrire :
$$Q = aX + b$$
avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On a alors :
$$\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X) = a(X+1) + b - aX - b = a.$$
$\Delta(Q)$ est donc un polynôme constant non nul. $\boxed{Q \text{ est donc de degré } 0 = 1-1.}$
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que pour tout polynôme R de degré n, on a $\deg(\Delta(R)) = n-1$.
Soit maintenant $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ de degré exactement $n+1$. On peut donc écrire :
$$Q = \lambda X^{n+1} + R$$

où $\lambda \neq 0$ et $R \in \mathbb{R}_n[X]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\Delta(Q) &= \Delta(\lambda X^{n+1} + R) \\
&= \lambda \Delta(X^{n+1}) + \Delta(R) \\
&\quad \text{(linéarité de } \Delta) \\
&= \lambda((X+1)^{n+1} - X^{n+1}) + \Delta(R) \\
&= \lambda \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^k - X^{n+1} \right) + \Delta(R) \\
&= \lambda \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} X^k \right) + \Delta(R) \\
&= \lambda \binom{n+1}{n} X^n + \left(\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} X^k + \Delta(R) \right)
\end{aligned}$$

Le premier terme $\lambda \binom{n+1}{n} X^n$ est de degré n. D'après l'hypothèse de récurrence, $\Delta(R)$ est de degré $n-1$. Et le second terme est donc de degré au plus $n-1$.
La somme des deux termes est donc exactement de degré n puisqu'il ne peut y avoir de compensation sur le terme de plus haut degré.
D'où :

$$\boxed{\deg \Delta(Q) = n = (n+1) - 1.}$$

La propriété est bien héréditaire.

Ainsi, par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout polynôme } Q \text{ de degré } n \geqslant 1, \text{ on a } \deg(\Delta Q) = n - 1.}$

(c) D'après ce qui précède, si Q a pour degré $n \geqslant 1$, alors $\Delta(Q)$ a pour degré $n - 1 \geqslant 0$. En particulier, $\Delta(Q)$ est non nul.
Ainsi, seuls les polynômes de degré au plus 0 peuvent avoir une image nulle. Dit autrement, ce qui précède implique :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) \subset \mathbb{R}_0[X].}$$

Vérifions que cette inclusion est en fait une égalité en vérifiant l'inclusion réciproque.
Soit $Q \in R_0[X]$. On peut écrire $Q = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (λ peut être nul et on aura alors le polynôme nul). On a alors :

$$\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X) = \lambda - \lambda = 0.$$

Donc $\boxed{Q \in \mathrm{Ker}(\Delta).}$
Et donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X].}$$

(d) Si $r \in \mathbb{N}^\star$, on a déjà montré que $\Delta(\mathbb{R}_r[X]) \subset \mathbb{R}_{r-1}[X]$. Or $\mathbb{R}_{r-1}[X] \subset \mathbb{R}_r[X]$. Donc :

$$\boxed{\Delta(\mathbb{R}_r[X]) \subset \mathbb{R}_{r-1}[X] \subset \mathbb{R}_r[X]}$$

et $\mathbb{R}_r[X]$ est bien stable par Δ.
Si $r = 0$, alors on a montré que $\mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Ker}(\Delta)$. Or le noyau est toujours un espace stable de l'endomorphisme correspondant.
Dans tous les cas, $\boxed{\mathbb{R}_r[X] \text{ est stable par } \Delta.}$

(e) On a déjà montré que pour tout polynôme P de degré $n \geqslant 1$, $\deg \Delta(P) = n - 1$. Ainsi, si $\deg P \leqslant n$, alors $\deg \Delta(P) \leqslant n - 1$ et ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_r) \subset \mathbb{R}_{r-1}[X].}$$

Il reste à vérifier que cette inclusion est une égalité.
Utilisons le théorème du rang. On sait déjà que $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$. Donc $\mathrm{Ker}(\Delta_r) = \mathbb{R}_0[X] \cap \mathbb{R}_r[X] = \mathbb{R}_0[X]$. On a donc :

$$\dim \mathrm{Im}(\Delta_r) + \dim \mathbb{R}_0[X] = \dim \mathbb{R}_r[X]$$

ce qui donne :

$$\dim \operatorname{Im}(\Delta_r) = \dim \mathbb{R}_r[X] - \dim \mathbb{R}_0[X] = (r+1) - (0+1) = r.$$

Or $\dim \mathbb{R}_{r-1}[X] = (r-1)+1 = r$. Donc par égalité des dimensions, on a bien :

$$\boxed{\operatorname{Im}(\Delta_r) = \mathbb{R}_{r-1}[X].}$$

Montrons maintenant que Δ est surjective. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n = \deg P$. On a donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Or $\operatorname{Im}(\Delta_{n+1}) = \mathbb{R}_n[X]$. Donc P a un antécédent par Δ_{n+1}. Notons-le Q.
On a donc :

$$\Delta_{n+1}(Q) = P.$$

Or par définition de l'endormophisme induit, $\Delta_{n+1}(Q) = \Delta(Q)$. Ainsi :

$$\boxed{\Delta(Q) = P.}$$

Donc P admet un antécédent par Δ et ainsi $\boxed{\Delta \text{ est surjective}}$ (mais pas injective puisque son noyau est non-trivial).

2. (a) On a $\Delta N_0 = \Delta(1) = 0$ (car $1 \in \mathbb{R}_0[X] = \operatorname{Ker}(\Delta)$).
Soit maintenant $k \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta(N_k) &= \Delta\left(\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)\right) \\
&= \frac{1}{k!}\Delta\left(\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)\right) \\
&\quad \text{(linéarité de } \Delta) \\
&= \frac{1}{k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(X+1-i) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)\right) \\
&= \frac{1}{k!}\left((X+1)\prod_{i=1}^{k-1}(X+1-i) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)\right) \\
&= \frac{1}{k!}\left((X+1)\prod_{i'=0}^{k-2}(X-i') - (X-(k-1))\prod_{i=0}^{k-2}(X-i)\right) \\
&= \frac{1}{k!}\left((X+1)-(X-k+1)\right)\prod_{i=0}^{k-2}(X-i) \\
&= \frac{1}{k!} \times k\prod_{i=0}^{k-2}(X-i) \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\prod_{i=0}^{(k-1)-1}(X-i) \\
&= N_{k-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\Delta(N_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ N_{k-1} & \text{si } k \neq 0 \end{cases}.}$$

(b) Le sujet nous indique que le cas $n > k$ est qualitativement différent. Et effectivement, quand on y réfléchit, à chaque fois qu'on applique Δ, on va faire diminuer l'indice de N_k. Mais, si on l'applique plus que k fois, on intuite qu'on va être bloquer au polynôme nul.
Montrons cette intuition par récurrence sur k.

- **Initialisation :** pour $k=0$, on sait déjà que $\Delta(N_0)=0$ et donc immédiatement :

$$\forall n \geqslant 1,\ \Delta^n N_0 = 0.$$

Et pour le cas $n=0$, on a :

$$\Delta^0 N_0 = \mathrm{Id}(N_0) = N_0 = N_{0-0}.$$

On peut résumer en pour $k=0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\Delta^n N_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } n>0 \\ N_{0-n} & \text{si } n=0 \end{cases}}$$

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\Delta^n N_k = \begin{cases} 0 & \text{si } n>k \\ N_{k-n} & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant k \end{cases}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $\Delta^n N_{k+1}$.
On va distinguer trois cas :

i. Si $n \in [\![1, k+1]\!]$, alors :

$$\Delta^n N_{k+1} = \Delta^{n-1}(\Delta N_{k+1}) = \Delta_{n-1} N_k.$$

Or $n-1 \leqslant k$ et donc :

$$\boxed{\Delta^n N_{k+1} = N_{k-(n-1)} = N_{(k+1)-n}.}$$

ii. Si $n > k+1$, on a encore :

$$\Delta^n N_{k+1} = \Delta^{n-1}(\Delta N_{k+1}) = \Delta_{n-1} N_k.$$

Mais cette fois $n-1>k$ et donc :

$$\boxed{\Delta^n N_{k+1} = 0.}$$

iii. Si $n=0$, alors :

$$\boxed{\Delta^0 N_{k+1} = N_{k+1} = N_{(k+1)-0}.}$$

On peut encore une fois résumer en :

$$\boxed{\Delta^n N_{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n>k+1 \\ N_{(k+1)-n} & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant k+1 \end{cases}.}$$

Ainsi, par récurrence, on a bien pour tout k et pour tout n :

$$\boxed{\Delta^n N_k = \begin{cases} 0 & \text{si } n>k \\ N_{k-n} & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant k \end{cases}.}$$

Soit maintenant n et k quelconques et calculons $\Delta^n N_k(0)$. Il y a encore une fois trois cas :

i. Si $n>k$, alors $\Delta^n N_k = 0$ et donc :

$$\boxed{\Delta^n N_k(0) = 0.}$$

ii. Si $n<k$ alors $\Delta^n N_k = N_{k-n}$. Comme $k-n \neq 0$, on a ainsi :

$$\Delta^n N_k = \frac{1}{k} \prod_{i=0}^{n-k-1} (X-i).$$

Le premier terme dans le produit est X qui vaut 0 en 0 et donc :

$$\boxed{\Delta^n N_k(0) = 0.}$$

iii. Si $n = k$, alors $\Delta^n N_k = N_0$. Or $N_0 = 1$. Donc :

$$\boxed{\Delta^n N_k(0) = 1.}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\boxed{\Delta^n N_k(0) = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}.}$$

3. (N_k) est une famille de polynômes de degrés échelonnés. $\boxed{\text{Elle est donc libre.}}$ Puis :

$$\operatorname{card}(N_k)_{0\leqslant k\leqslant n} = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$$

Donc $\boxed{(N_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On note :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k N_k$$

où les $\lambda_k \in \mathbb{R}$ sont les coordonnées de P dans la base (N_k).

On a alors pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$(\Delta^i P)(0) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \underbrace{\Delta^i N_k(0)}_{=\delta_{ik}} = \lambda_i.$$

Et donc, on a bien :

$$\boxed{P = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^i P)(0) N_k.}$$

4. (a) D'après ce qui précède, les seuls polynômes ayant pour image un polynôme de degré 4, sont les polynômes de degré 5. On a donc $F \subset \mathbb{R}_5[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_5[X]$. On note $P = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$. Calculons :

$$\begin{array}{rcl} \Delta(P) & = & a(X+1)^5 + b(X+1)^4 + c(X+1)^3 + d(X+1)^2 + e(X+1) + f \\ & & -aX^5 - bX^4 - cX^3 - dX^2 - eX - f \\ & = & a(5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 5X + 1) + b(4X^3 + 6X^2 + 4X + 1) \\ & + & c(3X^2 + 3X + 1) + d(2X+1) + e \\ & = & 5aX^4 + (10a + 4b)X^3 + (10a + 6b + 3c)X^2 + (5a + 4b + 3c + 2d)X + (a + b + c + d + e). \end{array}$$

Ainsi on a :

$$\Delta(P) = X^4 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 5a & = & 1 \\ 10a + 4b & = & 0 \\ 10a + 6b + 3c & = & 0 \\ 5a + 4b + 3c + 2d & = & 0 \\ a + b + c + d + e & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{5} \\ b & = & -\frac{1}{2} \\ c & = & \frac{1}{3} \\ d & = & 0 \\ e & = & -\frac{1}{30} \end{array} \right. .$$

Ainsi :

$$\boxed{F = \left\{ \frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{30}X + f,\ f \in \mathbb{R} \right\}.}$$

(b) Posons $P=\frac{1}{5}X^5-\frac{1}{2}X^4+\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{30}X$. Comme $P\in F$, on a $\Delta(P)=X^4$. Ainsi pour $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^4 &= \sum_{k=0}^{n}\Delta(P)(k)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(P(k+1)-P(k))\\ &= P(n+1)-P(0) \text{ (somme télescopique)}\\ &= \boxed{\frac{1}{5}(n+1)^5-\frac{1}{2}(n+1)^4+\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{30}(n+1).}\end{aligned}$$

On peut encore simplifier un peu :

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}(n+1)^5-\frac{1}{2}(n+1)^4+\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{30}(n+1) &= \frac{1}{5}n^5+(1-\frac{1}{2})n^4\\ &+ \left(2-2+\frac{1}{3}\right)n^3+(2-3+1)\,n^2\\ &+ \left(1-2+1-\frac{1}{30}\right)n+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30}\right)\\ &= \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}.\end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k^4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}.}$$

Exercice 4

1. (a) Pour $\alpha>1$, la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Donc pour $k\geqslant 2$ et $t\in[k,K+1]$, on a :

$$\frac{1}{t^\alpha}\leqslant\frac{1}{k^\alpha}$$

puis par croissance de l'intégrale sur $[k,k+1]$, on a :

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t\leqslant\underbrace{\int_k^{k+1}\frac{1}{k^\alpha}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{k^\alpha}}$$

et donc :

$$\boxed{\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\leqslant\frac{1}{k^\alpha}.}$$

De même, pour $t\in[k-1,k]$, on a :

$$\frac{1}{k^\alpha}\leqslant\frac{1}{t^\alpha}$$

et donc :

$$\boxed{\frac{1}{k^\alpha}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.}$$

(b) Soit $n\geqslant 2$ et soit $N\geqslant n$. En resommant les inégalités précédentes, on obtient :

$$\sum_{k=n}^{N}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\leqslant\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^\alpha}\leqslant\sum_{k=n}^{N}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

Avec la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

Puis pour $0 < a < b$, puisque $\alpha > 1$ (et donc $\alpha \neq 1$) on a :

$$\int_a^b \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_a^b = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)(N+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}.$$

Les termes de gauche et droite convergent comme $N \to +\infty$. Le terme central converge puisque c'est la somme partielle du reste d'une série de Riemann convergente. Donc en passant à la limite $N \to +\infty$, on obtient :

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}.$$

Puis en divisant par $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$, on obtient :

$$1 \leqslant \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leqslant \underbrace{\frac{\frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}}_{=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\alpha-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}.$$

D'où par encadrement $\frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, ce qui donne :

$$\boxed{\sum_{k\geqslant n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.}$$

2. On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \underbrace{f(t)}_{=u(t)} \underbrace{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}_{=v'(t)} \mathrm{d}t &= \left[\underbrace{f(t)}_{=u(t)} \underbrace{\frac{-2}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}_{=v(t)}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{f'(t)}_{=u'(t)} \underbrace{\frac{-2}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}_{=v(t)} \mathrm{d}t \\
&\quad \text{(car } u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1\text{)} \\
&= \frac{2}{2n+1} f(0) - \frac{2}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) f(\pi) \\
&\quad + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Comme $|\cos|$ est borné par 1, on a :

$$\left|\int_0^\pi f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\pi \left|f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\pi |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

Et donc :

$$\underbrace{\frac{2}{2n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \underbrace{\int_0^\pi f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t}_{\text{borné}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Comme $(2n+1)$ est impair, $\frac{(2n+1)\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\ \pi)$. Et donc $\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = 0$.

Puis comme $\frac{2}{2n+1} f(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par somme, on a bien :

$$\boxed{\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

3. L'idée est de passer par les complexes, afin de transformer les cosinus en des exponentielles plus faciles à manipuler.
   Pour $t \in]0,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^k\right) \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\frac{1-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right) \quad (\text{car } \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 1) \end{aligned}$$

   À ce moment, on a deux approches possibles :

   - **Méthode 1 :** on utilise la technique de l'angle moitié. On obtient alors :

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt/2})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2})}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \end{aligned}$$

     On utilise alors la formule de trigonométrie :

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$$

     ce qui donne :

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin((2n+1)t/2) - \sin(t/2)}{\sin(t/2)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2} \\ &= \boxed{\frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}}. \end{aligned}$$

   - **Méthode 2 :** on reste dans les complexes pour remontrer indirectement la formule dont on ne se souvient pas bien.

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
A_n(t) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{n+1}}{2(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{n+1}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2})}\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{n+1}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}(-2\mathrm{i}\sin(t/2))}\right)\\
&= \frac{1}{2\sin(t/2)}\operatorname{Re}\left(\mathrm{i}\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{n+1}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}}\right)\\
&= \frac{1}{2\sin(t/2)}\times\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\mathrm{i}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{-it/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}}_{=2\cos(t/2)\in\mathbb{R}}-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)t}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2\sin(t/2)}\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)t}\right)\\
&= \boxed{\frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.}
\end{aligned}$$

4. Calculons pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \underbrace{(at^2+bt)}_{=u(t)}\underbrace{\cos(nt)}_{=v'(t)}\,\mathrm{d}t &= \left[\underbrace{(at^2+bt)}_{=u(t)}\underbrace{\frac{1}{n}\sin(nt)}_{=v(t)}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{(2at+b)}_{=u'(t)}\underbrace{\frac{1}{n}\sin(nt)}_{=v(t)}\,\mathrm{d}t\\
&\ \text{(IPP avec } u \text{ et } v\ \mathcal{C}^1)\\
&= -\frac{1}{n}\int_0^\pi \underbrace{(2at+b)}_{=w(t)}\underbrace{\sin(nt)}_{=z'(t)}\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{n}\left(\left[\underbrace{(2at+b)}_{=w(t)}\underbrace{\frac{-1}{n}\cos(nt)}_{=z(t)}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{2a}_{=w'(t)}\underbrace{\frac{-1}{n}\cos(nt)}_{=z(t)}\,\mathrm{d}t\right)\\
&\ \text{(IPP avec } w \text{ et } z\ \mathcal{C}^1)\\
&= \frac{(-1)^n(2a\pi+b)}{n^2}-\frac{b}{n^2}-\frac{2a}{n^2}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi\\
&= \frac{(-1)^n(2a\pi+b)}{n^2}-\frac{b}{n^2}.
\end{aligned}$$

En particulier pour $\boxed{a=\frac{1}{2\pi}\text{ et } b=-1,}$ on a :

$$\boxed{\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}.}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) A_n(t)\mathrm{d}t &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n \cos(kt)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&\ \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{6\pi}-\frac{\pi^2}{2}\right)+S_n \\
&= \boxed{-\frac{\pi^2}{6}+S_n.}
\end{aligned}$$

5. On peut écrire :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right) A_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin(t/2)}\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

Posons :

$$\varphi : t \mapsto \frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin(t/2)}.$$

Cette fonction est clairement bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. Il reste à voir comment on peut donner un sens à cela à 0.

Remarquons qu'en fait, φ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est $\mathcal{C}^1$.

En effet :

$$\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin(t/2)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t}{2\times t/2} \underset{t\to 0}{\sim} -1 \xrightarrow[t\to 0]{} -1.$$

Donc φ est prolongeable par continuité en 0. De plus, pour tout $t \in]0,\pi]$, on a :

$$\varphi'(t) = \frac{(\frac{2t}{2\pi}-1)2\sin(t/2) - \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)}.$$

Faisons un développement limité du numérateur :

$$\begin{aligned}
(\frac{2t}{2\pi}-1)2\sin(t/2) - \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(t/2) &= 2(\frac{2t}{2\pi}-1)(t/2+o(t^2)) - \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)(1+o(t)) \\
&= \frac{t^2}{\pi}-t-\frac{t^2}{2\pi}+t+o(t^2) \\
&= \frac{t^2}{2\pi}+o(t^2) \\
&\underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\varphi'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2\pi}}{4\frac{t^2}{4}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2\pi} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2\pi}.$$

D'après le théorème de prolongement de la dérivée, le prolongement de φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Ainsi, l'intégrale est bien définie et les conditions de la question 2 sont réunies. Donc :

$$\int_0^\pi \frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin(t/2)}\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Et ainsi :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) A_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit $S_n - \frac{\pi^2}{6} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qu'on peut encore écrire :

$$\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}.}$$

6. On a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Or d'après ce qui précède, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Et :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$\boxed{S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

Problème 5 - Extrait adapté de CCINP PC 2019

Partie I - Quelques résultats généraux

1. On a :

$$\boxed{L_0 = \frac{1}{2^0 0!} U_0^{(0)} = U_0 = (X^2-1)^0 = 1.}$$

Puis :

$$\boxed{L_1 = \frac{1}{2^1 1!} U_1^{(1)} = \frac{1}{2} U_1' = \frac{1}{2}\left((X^2-1)^1\right)' = X.}$$

Enfin, on a :

$$\boxed{L_2 = \frac{1}{2^2 2!} U_2^{(2)} = \frac{1}{8} U_2'' = \frac{1}{8}\left((X^2-1)^2\right)'' = \frac{1}{8}(12X^2-4) = \frac{1}{2}(3X^2-1).}$$

2. L_n est du même degré que $U_n^{(n)}$. Sauf dans le cas d'un polynôme constant, on a $\deg P^{(n)} = \deg P - n$. En particulier dans notre cas, pour $n \geqslant 1$:

$$\deg U_n^{(n)} = \deg U_n - n = 2n - n = n.$$

Donc :

$$\boxed{\deg L_n = n}$$

pour tout $n \geqslant 1$ et on a déjà vu que $\deg L_0 = 0$.
De plus, le terme de plus haut degré de L_n provient du terme de plus haut degré de $U_n^{(n)}$ qui lui-même vient du terme de plus haut degré de U_n.
Notons : $U_n = X^{2n} + V_n$ avec $\deg V_n \leqslant 2n$.
On a donc $U_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} X^n + V_n^{(n)}$ avec $\deg V_n^{(n)} \leqslant 2n - n$.
Ainsi :

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.}$$

3. $(L_0, ..., L_n)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. $\boxed{\text{Elle est donc libre.}}$
   De plus $\text{card}(L_0, ..., L_n) = n+1 = \dim R_n[X]$. Donc $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$
4. Pour $n \geqslant 1$, on a $U_n = (X^2-1)^n = ((X-1)(X+1))^n = (X-1)^n(X+1)^n$ et donc
   $\boxed{U_n \text{ admet } -1 \text{ et } 1 \text{ comme racines, toutes deux de multiplicité } n.}$
   Puisque 1 et -1 sont de multiplicité n, elles sont également racines de U_n' de multiplicité $n-1$. Donc $(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}$ divise U_n'. On peut donc écrire :
   $$U_n' = (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}Q$$
   où Q est un polynôme.
   Il reste à montrer que $\alpha \in]-1,1[$.
   $x \mapsto U_n(x)$ est une fonction continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ avec $U_n(-1) = 0 = U_n(1)$. Donc le théorème de Rolle s'applique et il existe $\alpha \in]-1,1[$ tel que $U_n'(\alpha) = 0$.
   Ainsi $X - \alpha$ divise U_n' et donc Q. On peut donc écrire :
   $$U_n' = (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)R$$
   où R est un polynôme. De plus, par considération sur les degrés, on trouve que $\deg R = 1$. On peut donc écrire :
   $$\boxed{U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)}$$
   où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in]-1,1[$.
5. Puisque $k \leqslant n-1$, on a $n-k \geqslant 1$. Ainsi 1 et -1 sont racines de $U_n^{(k)}$ d'ordre $n-k$. Ainsi, 1 et -1 sont également racines de $U_n^{(k+1)}$ d'ordre $n-k-1$. On peut donc écrire :
   $$U_n^{(k+1)} = (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}Q$$
   où Q est un polynôme.
   Quitte à renuméroter les racines de $U_n^{(k)}$, on peut supposer $\alpha_1 < ... < \alpha_n$. On pose également $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{n+1} = 1$.
   Soit $i \in [\![0,n]\!]$. $x \mapsto U_n^{(k)}(x)$ est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ avec $U_n^{(k)}(\alpha_i) = 0 = U_n^{(k)}(\alpha_{i+1})$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$.
   Par construction, puisque $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, ces β_i sont tous distincts. On peut ainsi écrire :
   $$U_n^{(k+1)} = (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})R$$
   où R est un polynôme. De plus, par considération sur les degrés, on trouve que $\deg R = 1$. On peut donc écrire :
   $$\boxed{U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})}$$
   où $\nu \in \mathbb{R}$ et $\beta_i \in]-1,1[$ (tous distincts).
6. On procède par descente finie et on montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il existe α_1, ..., $\alpha_k \in]-1,1[$ tous distincts et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$\boxed{U_n^{(k)} = \lambda(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_{k+1})}$$
   - **Initialisation :** pour $k=0$, on a effectivement :
     $$U_n^{(0)} = (X^2-1)^n = (X-1)^{n-0}(X+1)^{n-0}$$
     donne la bonne expression avec $\lambda = 1$ (et il y a zéro α_i).
   - **Hérédité :** soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Le cas $k=0$ a été traité dans la question 4. Et le cas $k \in [\![1, n-1]\!]$ a été traité dans la question 5.

   Donc en particulier pour $k = n$, on obtient :
   $$\boxed{U_n^{(n)} = \lambda(X-1)^{n-n}(X+1)^{n-n}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n) = \lambda(X-x_a)\cdots(X-x_n)}$$
   en posant $x_i = \alpha_i$.

Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

7. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}[X]$ (car la dérivée - première ou seconde - et les sommes et produits de polynômes sont des polynômes).
   Il reste à vérifier que ϕ est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}\phi(\lambda P+Q) &= (X^2-1)(\lambda P+Q)''+2X(\lambda P+Q)' \\ &= (X^2-1)(\lambda P''+Q'')+2X(\lambda P'+Q') \\ &= \lambda\left((X^2-1)P''+2XP'\right)+\left((X^2-1)Q''+2XQ'\right) \\ &= \lambda\phi(P)+\phi(Q).\end{aligned}$$
   Donc ϕ est linéaire.
   Et ainsi $\boxed{\phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$
8. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg P \leqslant n$. Puis :
$$\deg P' \leqslant n-1 \text{ et } \deg P'' \leqslant n-2.$$
   Ainsi :
$$\deg(X^2-1)P'' \leqslant n$$
   et :
$$\deg 2XP' \leqslant n$$
   et donc :
$$\deg \phi(P) \leqslant \max(\deg(X^2-1)P'', \deg 2XP') \leqslant n.$$
   D'où $\boxed{\phi \in \mathbb{R}_n[X]}$ et donc $\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est stable par } \phi.}$
9. La matrice M est triangulaire supérieure si et seulement si $m_{ij}=0$ lorsque $i>j$.
   m_{ij} est le coefficient en X^i de $\phi(X^j)$. Donc $m_{ij}=0$ pour $i>j$ si $\deg\phi(X^j) \leqslant j$.
   Or $X^j \in \mathbb{R}_j[X]$. Et $\mathbb{R}_j[X]$ est stable par ϕ. Donc $\phi(X^j) \in \mathbb{R}_j[X]$ et ainsi $\deg\phi(X^j) \leqslant j$.
   D'où $\boxed{M \text{ est triangulaire supérieure.}}$
   Maintenant soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a :
$$\begin{aligned}\phi(X^k) &= (X^2-1)k(k-1)X^{k-2}+2X \times kX^{k-1} \\ &= (k(k-1)+2k)X^k-k(k-1)X^{k-2} \\ &= k(k+1)X^k-k(k-1)X^{k-2}.\end{aligned}$$
   En particulier, on a :
$$\boxed{m_{kk}=k(k+1).}$$
   Pour les 5/2 : M est donc une matrice triangulaire supérieur. Son spectre est sur la diagonale. On a donc :
$$\mathrm{Sp}(M)=\{k(k+1), k \in [\![0,n]\!]\}.$$
   $M \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ a donc $n+1$ valeurs propres distinctes. $\boxed{\text{Elle est donc diagonalisable.}}$
10. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a :
$$\begin{aligned}(X^2-1)U_k'-2kXU_k &= (X^2-1)((X^2-1)^k)'-2kX(X^2-1)^k \\ &= (X^2-1)k \times 2X(X^2-1)^{k-1}-2kX(X^2-1)^k \\ &= 2kX(X^2-1)^k-2kX(X^2-1)^k \\ &= \boxed{0.}\end{aligned}$$
11. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a :
$$((X^2-1)U_k'-2kXU_k)^{(k+1)}=((X^2-1)U_k')^{(k+1)}-(2kXU_k)^{(k+1)}.$$

Utilisons la formule de Leibniz sur les deux termes séparément. On a :

$$\begin{aligned}(2kXU_k)^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}2k(X)^{(i)}U_k^{(k+1-i)}\\ &= 2kXU_k^{(k+1)}+2k(k+1)U_k^{(k)}.\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}((X^2-1)U_k')^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}(X^2-1)^{(i)}(U_k')^{(k+1-i)}\\ &= (X^2-1)U_k^{(k+2)}+2(k+1)XU_k^{(k+1)}+2\frac{(k+1)k}{2}U_k^{(k)}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$((X^2-1)U_k'-2kXU_k)^{(k+1)}=(X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}-k(k+1)U_k^{(k)}.$$

Or $(X^2-1)U_k'-2kXU_k=0$. Donc :

$$\boxed{(X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}-k(k+1)U_k^{(k)}=0.}$$

12. On a :

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}-k(k+1)U_k^{(k)}=0$$

que l'on peut réécrire :

$$\underbrace{(X^2-1)(U_k^{(k)})''+2X(U_k^{(k)})'}_{\phi((U_k^{(k)}))}=k(k+1)U_k^{(k)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\phi(L_k) &= \phi\left(\frac{1}{2^k k!}U_k^{(n)}\right)\\ &= \frac{1}{2^k k!}\phi(U_k^{(n)})\\ &= \frac{1}{2^k k!}k(k+1)U_k^{(k)}\\ &= \boxed{k(k+1)L_k.}\end{aligned}$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

13. Vérifions que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
   - **Linéarité à gauche :** Soient $P,Q,R\in\mathbb{R}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\langle P+\lambda Q,R\rangle &= \int_{-1}^{1}(P+\lambda Q)(t)R(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_{-1}^{1}(P(t)+\lambda Q(t))R(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_{-1}^{1}(P(t)R(t)+\lambda Q(t)R(t))\mathrm{d}t\\ &= \int_{-1}^{1}P(t)R(t)\mathrm{d}t+\lambda\int_{-1}^{1}Q(t)R(t)\mathrm{d}t\\ &\quad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\ &= \boxed{\langle P,R\rangle+\lambda\langle Q,R\rangle.}\end{aligned}$$

- **Symétrie :** Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\begin{aligned}\langle P, Q\rangle &= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\mathrm{d}t \\ &= \boxed{\langle Q, P\rangle.}\end{aligned}$$

- **Positivité :** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\begin{aligned}\langle P, P\rangle &= \int_{-1}^{1} P(t)P(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \underbrace{P(t)^2}_{\geqslant 0} \mathrm{d}t \boxed{\geqslant 0} \text{ (positivité de l'intégrale)}\end{aligned}$$

- **Caractère défini :** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose $\langle P, P\rangle = 0$. Montrons que $P = 0$.
  On a :
  $$\int_{-1}^{1} \underbrace{P(t)^2}_{\geqslant 0} \mathrm{d}t = 0.$$
  Puisque $t \mapsto P(t)^2$ est continue sur $[-1, 1]$, on a $\forall t \in [-1, 1],\ P(t)^2 = 0$.
  Ainsi P admet une infinité de racines et donc $\boxed{P = 0.}$

Donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

14. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\langle \phi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} ((t^2 - 1)P''(t) + 2tP'(t))Q(t)\mathrm{d}t$$

Les applications $t \mapsto (t^2 - 1)P'(t)$ et $t \mapsto Q(t)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$. On peut donc faire l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}\langle \phi(P), Q\rangle &= \left[(t^2 - 1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t \\ &= (1^2 - 1)P'(1)Q(1) - ((-1)^2 - 1)P'(-1)Q(-1) - \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t \\ &= \boxed{-\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t.}\end{aligned}$$

Par symétrie, on a :

$$\langle P, \phi(Q)\rangle = -\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t.$$

Et donc :

$$\boxed{\langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle.}$$

15. Soient $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \neq j$. On a :

$$\langle \phi(L_i), L_j\rangle = \langle L_i, \phi(L_j)\rangle$$

d'après la question précédente. On a également $\phi(L_i) = i(i + 1)L_i$ et $\phi(L_j) = j(j + 1)L_j$. Donc :

$$i(i + 1)\langle L_i, L_j\rangle = j(j + 1)\langle L_i, L_j\rangle$$

et ainsi :

$$(i(i + 1) - j(j + 1))\langle L_i, L_j\rangle = 0.$$

Or $x \mapsto x(x + 1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et donc injective. Ainsi $i(i + 1) \neq j(j + 1)$. Et donc :

$$\boxed{\langle L_i, L_j\rangle = 0.}$$

16. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a montré que $(L_0, \dots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc on peut écrire :
$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k L_k$$
avec $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Puis :
$$\begin{aligned} \langle P, L_n \rangle &= \langle \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k L_k, L_n \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \langle L_k, L_n \rangle \\ &\quad \text{(linéarité à gauche)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \delta_{kn} \\ &= \boxed{0.} \end{aligned}$$

17. Par bilinéarité, on aura encore :
$$\langle Q_i, Q_j \rangle = 0$$
pour tout (i, j) avec $i \neq j$. Donc la famille est encore orthogonale.
De plus, on a pour tout $i \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} \langle Q_i, Q_i \rangle &= \langle \sqrt{\frac{2i+1}{2}} L_i, \sqrt{\frac{2i+1}{2}} L_i \rangle \\ &= \frac{2i+1}{2} \langle L_i, L_i \rangle \\ &= \frac{2i+1}{2} \frac{2}{2i+1} \\ &= \boxed{1.} \end{aligned}$$
Donc $\boxed{\text{la famille } (Q_n) \text{ est orthonormée.}}$

18. Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, un tel T_n existe : c'est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$. On a donc :
$$d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$$
avec $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P - T_n \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$$\|P - T_n\|^2 + \|T_n\|^2 = \|P\|^2.$$
Donc :
$$d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \|T_n\|^2.$$
Comme $(L_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, de même $(Q_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ en est une également. C'est même une base orthonormée. On a donc :
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle Q_k.$$
C'est la formule du projeté orthogonal lorsqu'on connaît une base orthonormée de l'espace sur lequel on projette.
On a donc :
$$\|T_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle^2$$
puisque la base base (Q_k) est orthonormée.
Et donc :
$$\boxed{d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle^2.}$$

19. Posons $u_n = d(P, \mathbb{R}_n[X])^2$. Puisque $\mathbb{R}_{n+1}[X] \supset \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$d(P, \mathbb{R}_{n+1}[X]) \leqslant d(P, \mathbb{R}_n[X])$$

et donc (u_n) est décroissante. Comme (u_n) est minorée (par 0), d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge. Donc $\|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle^2$ converge. Et donc $\boxed{\text{la série } \sum_{k \geqslant 0} c_k(P)^2 \text{ converge.}}$

De plus, comme $u_n \geqslant 0$, si on note ℓ sa limite, on a $\ell \geqslant 0$. Et donc par passage à la limite, on obtient :

$$\|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle^2 \geqslant 0$$

que l'on peut réécrire :

$$\boxed{\|P\|^2 \geqslant \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k \rangle^2.}$$