

QUINZAINE DU 29/09 AU 10/10

1 Contenu du cours

Chapitre 1 - Compléments sur les espaces vectoriels (cours et TD)

1. Produits et sommes d'espaces vectoriels

Définitions, dimensions, sommes directes, base adaptée à un sous-espace, base adaptée à une décomposition en somme directe.

2. Décomposition adaptée à un endomorphisme

Sous-espace stable, endomorphisme induit, matrice avec un sous-espace stable, cas d'une décomposition en somme directe de sous-espaces stables, opérations matricielles par blocs.

3. Trace

Définition, propriétés élémentaires, trace d'un produit, invariant de similitude, trace d'un endomorphisme.

4. Interpolation de Lagrange

Théorème, polynômes interpolateurs de Lagrange, propriétés élémentaires, déterminant de Vandermonde

Chapitre 2 - Normes (cours et TD)

1. Normes sur un espace vectoriel

Définition d'une norme, distance associée, exemples de référence sur \mathbb{K}^n , norme euclidienne sur un espace préhilbertien réel, boules et sphères, parties convexes, les boules sont convexes, parties bornées, définition de suites et fonctions bornées sur un espace vectoriel.

2. Convergence de suites dans un espace normé

Définition, unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, compatibilité entre la limite et les combinaisons linéaires, suites extraites.

3. Comparaison des normes

Équivalence de normes, toutes les normes en dimension finie sont équivalentes, équivalence des normes et suites bornées, équivalence des normes et convergence de suites.

Chapitre 3 - Suites et séries de fonctions (cours uniquement)

1. Modes de convergence

Convergence simple pour les suites de fonctions, la continuité ou calculs d'intégral ne sont pas nécessairement compatibles avec cette notion de limite, convergence uniforme, la convergence uniforme implique la convergence simple, convergence simple pour les séries, convergence uniforme pour les séries, convergence normale, exemples.

2. Théorèmes d'interversion et de régularité

Continuité de la limite uniforme, théorème de la double limite pour les séries, continuité de la limite uniforme pour les séries... (à suivre)

2 Questions de cours

- Démonstration :** $\psi : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$, $P \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n))$ est bijective si les a_i sont tous distincts.
- Démonstration :** $\|\cdot\|_\infty$ définie sur \mathbb{K}^n est une norme.
- Exemple :** $f_n : t \mapsto \begin{cases} 1 - nt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$ tend vers 0 pour $\|\cdot\|_1$ mais pas pour $\|\cdot\|_\infty$.
- Exemple :** Déterminer la limite simple de (f_n) avec $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^n$.
- Exemple :** (f_n) avec $f_n : t \mapsto \frac{t}{n^2} e^{-t/n}$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ vers la fonction nulle.
- Exemple :** $\sum g_n$ avec $g_n : s \mapsto \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.