# DM 2 - Compléments d'algèbre linéaire

À rendre le lundi 29/09/2025

1. Ce travail est facultatif pour les 3/2.
2. Rendre une copie pour deux.

## Problème 1 - Mines Maths 1 PC 2014

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

**Dans tout le problème, $X$ est un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ sur le corps des réels et $T$ un endomorphisme non nul de $X$.**

Soit $\mathcal{B}$ une base de $X$ et on note $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ la matrice de $T$ dans cette base.
On note $\mathrm{Ker}(T)$ le noyau de $T$ et $\mathrm{Im}(T)$ l'image de $T$.
On dit que $T$ est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité.
On appelle projecteur un endomorphisme de $P$ de $X$ idempotent, c'est-à-dire tel que $P^2 = P$.
On note Id l'endomorphisme identité de $X$, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{O}$ la matrice nulle.

### Partie I - Traces et projecteurs.

Si $\mathbb{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de $\mathbb{A}$ le nombre réel suivant $\mathrm{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ où $a_{ij}$ représente le coefficient à la ligne $i$ et colonne $j$ de la matrice $\mathbb{A}$.

1. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \mathrm{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$.
2. Montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ associée à $T$ est indépendante de la base $\mathcal{B}$.

On appelle trace de $T$, notée $\mathrm{tr}(T)$, la valeur commune des traces des matrices représentant $T$. On dit que la trace est un invariant de similitude.
Soit $P$ un projecteur de $X$.

3. Démontrer que $X = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$.
4. En déduire que $\mathrm{rg}(P) = \mathrm{tr}(P)$.

On pose $P' = \mathrm{Id} - P$.

5. Montrer que $\mathrm{Im}(P') = \mathrm{Ker}(P)$ et que $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}(P')$.
6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces $F$ et $G$ de $X$ est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.
7. Montrer que si l'endomorphisme $S$ est une somme finie de projecteurs $P_i$, $i = 1, \ldots, m$ alors $\mathrm{tr}(S) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}(S) \geqslant \mathrm{rg}(S)$.

### Partie II - Projecteurs de rang 1.

**On suppose dans cette partie que le rang du projecteur $P$ est égal à 1.**

8. Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $PTP = \mu P$.

Soit $\mathcal{C} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ une base de $X$ adaptée à la décomposition :

$$X = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P).$$

9. Montrer que dans la base $\mathcal{C}$ la matrice représentant $T$ s'écrit :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & \star & \cdots & \star \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \star & & & \end{array}\right), \tag{1}$$

où $\mu$ est le nombre réel dont l'existence découle de la question 8, et $\mathbb{B} \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

10. Montrer que si $P'TP'$ n'est pas proportionnel à $P'$, alors $\mathbb{B}$, défini en (1), n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $P' = \mathrm{Id} - P$

**Partie III - Endomorphismes différents d'une homothétie**

**On suppose dans cette partie que l'endomorphisme $T$ n'est pas une homothétie.**

11. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que $x$ et $T(x)$ ne soient pas liés (c'est-à-dire ne soient pas colinéaires).
12. Montrer qu'il existe une base $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{array}\right) \quad \text{où } \mathbb{A} \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

13. En déduire que si $\mathrm{tr}(T) = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ est nulle.

**Soit $(t_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite de $n$ nombres réels vérifiant $\mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} t_i$.**

14. En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathbb{B}''$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les $(t_i)_{i\in\{1,2\}}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on admettra qu'en dimension $n \geqslant 3$, il existe un projecteur $L$ de $X$ de rang 1 tel que d'une part $LTL = tL$ et d'autre part $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = \mathrm{Id} - L$.

15. En dimension $n \geqslant 3$, à l'aide des questions 9 et 10 démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice représentant $T$ s'écrit :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & \star & \cdots & \star \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \star & & & \end{array}\right) \quad \text{où } \mathbb{B} \text{ n'est pas une homothétie.}$$

16. En dimension $n \geqslant 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les $(t_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

**Partie IV - Décomposition en somme de projecteurs.**

On suppose désormais que $T$ est un endomorphisme de $X$ vérifiant $\mathrm{tr}(T) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}(T) \geqslant \mathrm{rg}(T)$. On pose $\rho = \mathrm{rg}(T)$ et $\theta = \mathrm{tr}(T)$.

17. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{array}\right),$$

où $\mathbb{T}_1$ est une matrice de taille $\rho \times \rho$.

**Supposons tout d'abord que $\mathbb{T}_1$ ne soit pas la matrice d'une homothétie.**

18. À l'aide de la question 16 montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{cccc|c} t_1 & \star & \cdots & \star & \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star & \mathbb{O} \\ \star & \cdots & \star & t_\rho & \\ \hline \star & \cdots & \cdots & \star & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \mathbb{O} \\ \star & \cdots & \cdots & \star & \end{array}\right) \quad \text{où les } (t_i)_{i\in[\![1,\rho]\!]} \text{ sont des entiers non nuls.}$$

19. En déduire que $T$ est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

**On suppose maintenant que $\mathbb{T}_1$ est la matrice d'une homothétie.**

20. Démontrer que là encore, $T$ est la somme d'un nombre fini de projecteurs.