

## DM 3 - SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

À rendre le lundi 06/10/2025

1. Ce travail est facultatif pour les 3/2.
2. Rendre une copie pour deux.

### Exercice 1 - CCINP PC 2021 (Extrait de l'exercice 2)

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les relations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (1)$$

#### Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (1).

Dans cette partie, on démontre que le problème (1) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

##### Existence de la solution

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $\varphi_k : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions  $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$ .

Dans tout le reste de cet exercice, on note  $\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la somme de la série  $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ .

2. Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a  $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ .
3. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4. Montrer que la fonction  $\varphi$  est une solution de (1).

##### Unicité de la solution

5. Montrer que si  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de (1), alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6. En déduire que la fonction  $\varphi$  est l'unique solution de (1).

#### Partie II - Étude de la solution du problème (1).

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution  $\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  du problème (1).

7. Soit  $\epsilon > 0$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$  converge uniformément sur  $[\epsilon, +\infty[$ .
8. Montrer que la fonction  $\varphi$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . En utilisant le fait que  $\varphi$  est une solution du problème (1), en déduire un équivalent simple de  $\varphi$  au voisinage de  $0^+$ .

9. Justifier que la fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que l'on a :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. En déduire que la fonction  $\varphi$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (1), montrer que :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de  $\varphi$  en  $+\infty$ .