TD4 - Suites et séries de fonctions

1 Suites de fonctions

Exercice 1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$
2. $g_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$
3. $\ell_n(x) = \sin\left(\frac{n}{n+1}x\right)$ sur $[0, 2\pi]$.
4. $\phi_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
5. $\psi_n(x) = \sin(x)e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$
6. $k_n(x) = 3^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$ sur $[0, 1]$

Exercice 2 (Similaire à un exo CCP 2017)**.** On pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

1. Montrer la convergence simple de cette série de fonctions.
2. Converge-t-elle normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$?
3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ (*pensez au critère des séries alternées*). Qu'en déduire ?
4. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$.
6. Donner un équivalent de S en 0 puis en $+\infty$ (*on pourra commencer par justifier que S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$*).

Exercice 3. On définit par récurrence sur $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ une suite de fonctions en posant $f_0 = 0$ et pour $n \geq 0$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f_n^2(t)\mathrm{d}t \qquad (\star)$$

1. Prouver que $|f_n(x)| \leq \frac{5}{6}$ pour tout x de I.
2. Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{5}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$.
3. Qu'en déduire concernant la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$? On note f la somme de cette série de fonctions, prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f.
4. Prouver que f est une solution sur I de l'équation différentielle $y' = x^2 + y^2$ satisfaisant à $f(0) = 0$ (*On pourra commencer par prouver que (f_n^2) converge uniformément vers f^2, puis passer à la limite dans* $(\star)$).

Exercice 4 (CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2)**.** La série de fonctions de terme général $u_n : x \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$? Normalement sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 5 (CCP 2009 Officiel de la Taupe)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^0\big([a, b]\big)$; on pose $f_0(x) = f(x)$ et $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a, b]$, $|f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!}\|f\|_\infty$.
2. On pose $g_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)$. Montrer que g_0 est $\mathcal{C}^0$ sur $[a, b]$, que g_1 est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, puis que g_n est $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$.
3. Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 dont g_n est solution pour $n \geq 1$. En déduire que pour tout $x \in [a, b]$,

$$g_0(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 6 (adapté de CCP 2016 PC)**.**

1. Étudier les variations de $t \mapsto g_x(t) = t + \frac{x-t^2}{2}$, pour x et $t \in [0, 1]$.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g_x(u_n)$. Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout entier n.
3. Montrer que (u_n) est croissante et converge vers une limite à déterminer.

4. Soit (P_n) une suite de fonctions définie par $P_0 = 0$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer que P_n est un polynôme pour tout entier n.
5. Montrer par récurrence sur n l'inégalité $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$ pour tout $x \in [0, 1]$
6. En déduire que la suite (P_n) converge uniformément vers $\sqrt{.}$ sur $[0, 1]$.

Exercice 7 (Oral Mines-Telecom 2016)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel, on pose $u_n(x) = \frac{(-x)^n}{n}$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.
2. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme.

2 Séries de fonctions

Exercice 8. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ définie par : $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}$ et calculer sa somme.
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur tout segment de $]0, +\infty[$.
3. La convergence est-elle normale sur $[0, +\infty[$?
4. Montrer que la convergence est normale sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 9. Montrer que la série de fonctions définie sur $[0, \pi]$ par $\sum\limits_{n \geq 0} \sin(x) \cos^n(x)$ est simplement convergente sur $[0, \pi]$. Étudier la convergence normale de cette série de fonctions sur $[0, \pi]$, puis sur tout segment de $]0, \pi[$.

Exercice 10. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, 1[$, où $f_n : x \in [0, 1[\mapsto \frac{(1-x)x^n}{n(1-x^n)}$.

Exercice 11. On définit : $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 12.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n}$.
   On notera f sa somme.
2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.
4. Montrer que f est convexe.
5. Calculer f. *indication : on pourra commencer par calculer f'.*

Exercice 13. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$ puis en donner un équivalent.
4. Déterminer un équivalent de f en 0^+ (*faire une comparaison série/intégrale puis montrer que* $\frac{1}{t(1+tx)} = \frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}$.)

Exercice 14.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^x e^{-nx}$.
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Quelle est la limite de S en $+\infty$.

Exercice 15. Soit $f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{-x}\right)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis écrire f' sous forme de la somme d'une série de fonctions sur $\mathbb{R}_+$.
2. Justifier que pour tout x, $f(x) = \ln(3) - \ln(2) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$. En déduire une expression de f sous forme de la somme d'une série de fonctions sur $\mathbb{R}_+$.
3. A l'aide d'une majoration, montrer que $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p2^p} e^{-px} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p2^p} e^{-px}$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 16. Montrer que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Y est-elle intégrable ? (*on pourra appliquer le critère des séries alternées*).

Exercice 17. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$. Justifier que f est bien définie, puis calculer $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 18. Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exercice 19 (CCP 2018 - 2014 Officiel de la Taupe)**.** Soit $u_n(t) = \frac{e^{-nt^2}}{n^2+1}$, et $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ si convergence.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner les variations de u_n' sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire $\|u_n'\|_\infty$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Donner les variations de f et l'allure de la courbe ; on prendra $f(0) \approx 2,07$ à 10^{-2} près.
5. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 1$. Montrer que $g(t) = f(t) - 1$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que $\sum_{n=0}^{100} \frac{1}{n^2+1}$ est une approximation à 10^{-2} près de $f(0)$.

Exercice 20 (CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2)**.** La série de fonctions de terme général $u_n : x \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$? Normalement sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 21 (CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2)**.** Soit $f_n : x \mapsto \frac{1}{n+n^3x^2}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$? Montrer que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 22. Soit S la fonction définie par : $t \mapsto S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + e^{-nt}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition.
2. Donner le sens de variation de S.
3. Donner la limite de S en $+\infty$.
4. S est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?
5. Donner un équivalent de S en 0 (*on pourra faire une comparaison série/intégrale*).
   Est-elle intégrable sur $]0,1]$?

Exercice 23. Soit r un réel élément de $[0,1[$ fixé.

1. Prouver que pour x réel élément de $]-1,1[$, la série $\sum \frac{x^n}{n}$ est convergente, et peut-être dérivée terme à terme. En déduire la valeur de sa somme.

2. Prouver la convergence de la série de fonctions (de la variable θ) $\sum r^n \sin(n\theta)$, et calculer sa somme.
3. Prouver de même la convergence de la série $\sum r^n \frac{\cos(n\theta)}{n}$. Calculer la somme de cette série.
4. Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \ln\left(1-2r\cos(\theta)+r^2\right) \mathrm{d}\theta$.
5. Prouver que pour $|r|>1$, l'intégrale envisagée à la question précédente converge, et la calculer.

Exercice 24 (BEOS exo 3133 CCP PC 2017)**.** On considère pour $x>0$ la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

1. Rappeler le critère des séries alternées avec la majoration du reste et son signe.
2. (a) f est-elle bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$?
   (b) Montrer que pour tout $x>0$, $f(x) = \frac{1}{x} - \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$.
3. Montrer que pour tout $x>0$, $2f(x) = \frac{1}{x} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$.
4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent de f en 0^+.
6. Montrer que : $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

Solutions

Exercice 1. 1) • Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \neq 0$, alors

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et si $x = 0$,

$$f_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
• **Méthode « évoluée » :** puis, si on pose

$$g : x \mapsto \frac{x}{1+x^2},$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} = g(nx),$$

donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|g\|_\infty$$

ne tend pas vers 0 ($\|g\|_\infty > 0$, car g n'est pas la fonction nulle).
En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x) - 0\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|g(nx)\right| = \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|g(y)\right| = \|g\|_\infty,$$

en posant $y = nx$, et car la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto y = nx \in \mathbb{R}$ est surjective (puisque $n \in \mathbb{N}^*$).
Méthode plus élémentaire : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'idée de calculer

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2},$$

donc

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{2},$$

donc la suite numérique $\big(\|f_n\|_\infty\big)_{n\geq 1}$ ne peut pas tendre vers 0.
Méthode basique : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on fait l'étude de variations de la fonction f_n. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (quotient de deux fonctions polynomiales, dont celle du dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = n\frac{1+n^2x^2 - x2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = n\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = n\frac{(1-nx)(1+nx)}{(1+n^2x^2)^2}.$$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$		∞
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

et donc

$$\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \max\left(0, \left|-\frac{1}{2}\right|, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ne tend pas vers 0 si $n \to \infty$.
2) ★ Si $\alpha > 0$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est définie sur $\mathbb{R}_+$.
⋄ On a

$$g_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et si $x > 0$, par croissance comparée,

$$g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_n'(x) = e^{-nx} x^{\alpha-1}(\alpha - nx).$$

D'où le tableau de variations pour $n \geq 1$ (en utilisant que g_n est continue en 0) :

x	0		$\frac{\alpha}{n}$		∞
$g_n'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

◇ Donc

$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \frac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
★ Si $\alpha = 0$, la fonction g_n est la fonction

$$g_n : x \mapsto e^{-nx}.$$

◇ Puis, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_n(x) = e^{-nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et

$$g_n(0) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

◇ Il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$, car la fonction g n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$, alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n l'est (on applique donc la contraposée du théorème de continuité des suites de fonctions), ou bien car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|g_n - g\|_\infty \geq \left|g_n\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)\right| = e^{-1},$$

ce qui empêche la suite $\left(\|g_n - g\|_\infty\right)_{n\geq 1}$ de tendre vers 0.
★ Si $\alpha < 0$, la fonction g_n n'est défini que sur $\mathbb{R}_+^*$.
◇ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle.
◇ Puis,

$$\|g_n\|_\infty \geq \left|g_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{e^{-1}}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Pour ceux qui préfèrent, on peut faire le tableau de variations : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_n'(x) = e^{-nx} x^{\alpha-1}(\alpha - nx) < 0$$

(car $\alpha < 0$). D'où le tableau de variations :

x	0		∞
$g_n'(x)$	$\|\|$	$-$	
$g_n(x)$	∞	$\searrow$	0

donc la fonction g_n n'est pas bornée, donc la fonction g_n non plus. Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) ⋄ La suite de fonctions $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers sin (par continuité de sin sur $\mathbb{R}$) : pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\frac{n}{n+1}x \underset{\to\infty}{\longrightarrow} x \qquad \text{donc} \qquad \ell_n(x) \underset{\to\infty}{\longrightarrow} \sin(x).$$

⋄ Puis, la fonction sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, $|\sin'| = |\cos| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$, donc par inégalité des accroissements finis, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\sin(a) - \sin(b)| \leq 1 \times |a - b|.$$

Donc, pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\big|\ell_n(x) - \sin(x)\big| = \left|\sin\left(\frac{n}{n+1}x\right) - \sin(x)\right| \leq \left|\frac{n}{n+1}x - x\right| = \frac{1}{n+1}|x| \leq \frac{2\pi}{n+1}.$$

Donc en passant à la borne supérieure, on a

$$0 \leq \|\ell_n - \sin\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} \big|\ell_n(x) - \sin(x)\big| \leq \frac{2\pi}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le théorème des gendarmes conclut :

$$\lim_{n\to\infty} \|\ell_n - \sin\|_\infty = 0,$$

autrement dit la suite de fonctions $\big(\ell_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction sin sur $[0, 2\pi]$.

4) ⋄ Comme $|\sin| \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$0 \leq |\phi_n(x)| \leq \frac{1}{x\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc le théorème des gendarmes donne :

$$\phi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

autrement dit la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

⋄ Pour tout $\mathrm{e} > 0$, pour tout $x \in [\mathrm{e}, \infty[$, on a

$$\left|\frac{\sin(nx)}{x\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{n}},$$

donc

$$0 \leq \|\phi_n\|_{\infty,[\mathrm{e},\infty[} \leq \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\mathrm{e}, \infty[$. Donc, s'il y a un problème sur la convergence uniforme, c'est vers 0.

Première idée : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si la fonction ϕ_n est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $x \in]0, \infty[$ on a

$$\|\phi_n\|_\infty \geq \big|\phi_n(x)\big|.$$

En particulier,

$$\|\phi_n\|_\infty \geq \lim_{x\to 0^+} \big|\phi_n(x)\big|$$

si cette limite existe. Or,

$$\phi_n(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{nx}{x\sqrt{n}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \sqrt{n}.$$

Donc

$$\|\phi_n\|_\infty \geq |\sqrt{n}| = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

donc la suite numérique $\big(\|\phi_n\|_\infty\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (si elle existe) ne tend pas vers 0. Donc la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Deuxième idée : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si la fonction ϕ_n est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, alors

$$\|\phi_n\|_\infty \geq \left|\phi_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \sqrt{n}\sin(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

(car $\sin(1) > 0$), et on conclut de même.
5) $\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|\psi_n(x)| \leq e^{-nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(car $|\sin| \leq 1$), donc la suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in [a, \infty[$, on a

$$|\sin(x)e^{-nx}| \leq e^{-na},$$

soit

$$0 \leq \|\psi_n\|_{\infty,[a,\infty[} \leq e^{-na} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(la limite provient de $a > 0$), donc le théorème des gendarmes conclut :

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{\infty,[a,\infty[} = 0,$$

autrement dit la suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, \infty[$ vers la fonction nulle. C'est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, en particulier pour $a = 1$: la suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[1, \infty[$.
$\diamond$ Regardons sur $[0, 1]$: soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction ψ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi_n'(x) = e^{-nx}\big(\cos(x) - n\sin(x)\big),$$

donc ψ_n' ne s'annule sur $[0, 1]$ qu'en un unique point, $x_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ (d'où la nécessité de prendre $n \neq 0$). D'où le tableau de variations :

x	0		x_n		1
$\psi_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\psi_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\sin(1)e^{-n} > 0$

Donc la fonction ψ_n atteint son maximum (sur $[0, 1]$, mais en fait sur $\mathbb{R}_+$) en x_n, et est positive. On a alors

$$\|\psi_n\|_{\infty,[0,1]} = \psi_n(x_n).$$

Puis, $x_n = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc $e^{-nx_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$ (par continuité de exp en -1), et

$$\sin(x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

donc

$$\|\psi_n\|_{\infty,[0,1]} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur $[0, 1]$.
$\diamond$ La suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et sur $[1, \infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+$, puisque : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, si $x \in [0, 1]$, on a

$$|\psi_n(x)| \leq \|\psi_n\|_{\infty,[0,1]} \leq \max\left(\|\psi_n\|_{\infty,[0,1]}, \|\psi_n\|_{\infty,[1,\infty[}\right)$$

et si $x \in [1, \infty[$, on a

$$|\psi_n(x)| \leq \|\psi_n\|_{\infty,[1,\infty[} \leq \max\left(\|\psi_n\|_{\infty,[0,1]}, \|\psi_n\|_{\infty,[1,\infty[}\right)$$

D'où

$$0 \leq \|\psi_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \max\left(\|\psi_n\|_{\infty,[0,1]}, \|\psi_n\|_{\infty,[1,\infty[}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et le théorème des gendarmes conclut.
Autre idée : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|\psi_n(x)| \leq xe^{-nx}$$

(car $|\sin(x)| \leq |x| = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$). Par conséquent,

$$0 \leq \|\psi_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \|\theta_n\|_\infty,$$

en notant

$$\theta_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x e^{-nx} \in \mathbb{R}.$$

Or, la fonction θ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\theta_n'(x) = e^{-nx}(1 - nx)$, d'où le tableau de variations :

x	0	$\frac{1}{n}$	∞
$\theta_n'(x)$	$+$	0	$-$
$\theta_n(x)$	$0 \nearrow$		$\searrow 0$

(car $\lim\limits_{x\to\infty} \theta_n(x) = 0$ par croissance comparée, car $n > 0$).
Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|\psi_n(x)| \leq \theta_n(x) \leq \theta_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}e^{-1},$$

soit

$$0 \leq \|\psi_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}e^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut bien (grâce au théorème des gendarmes) à la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle.

6) $\diamond$ La suite de fonctions $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$: si $x \in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(x) = 0$ par croissance comparée, car

$$3^n x^{2^n} = \exp\big(n\ln(3) + 2^n\ln(x)\big) = \exp\big(2^n\ln(x) + \underset{n\to\infty}{o}(2^n)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(car $\ln(x) < 0$), et car

$$k_n(0) = k_n(1) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\diamond$ Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$, $k_n(x) = f_n\big(x^{2^{n-1}}\big)$ avec

$$f_n : y \in [0,1] \mapsto 3^n(y^2 - y).$$

Donc

$$\|k_n\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{x\in[0,]} |k_n(x)| = \sup_{x\in[0,]} \left|f_n\big(x^{2^{n-1}}\big)\right| = \sup_{y\in[0,1]} |f_n(y)| = \|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \frac{3^n}{4}$$

car (pour justifier la troisième égalité) la fonction

$$x \in [0,1] \mapsto y = x^{2^{n-1}} \in [0,1]$$

est surjective.

Remarque. Une étude de fonction toute simple donne que $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \left|f_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{3^n}{4}$

Et comme $\frac{3^n}{4} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, la suite de fonctions $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 2.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
   La suite numérique $\left(\frac{1}{n+x_0}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (est bien définie car $x_0 > 0$!!!) est positive (donc la série considérée est alternée), décroissante et de limite nulle. D'après le théorème des séries alternées, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ converge. La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $|f_n|$ étant décroissante et positive sur $[a,b]$, on a

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{n+a},$$

   et c'est le terme général d'une série divergente (par critère d'équivalence des séries à termes positifs, car $\frac{1}{n+a} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, avec la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ qui est divergente et à termes positifs).

Remarque. En fait, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|f_n(x)\right| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

avec la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ qui est divergente et à termes positifs, donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ ne converge pas absolument, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne peut pas converger normalement sur un ensemble contenant x...

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, le critère des séries alternés (puisqu'il s'applique) donne, à $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$$

(majoration **indépendante de** x **!**). Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ convergence uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit par le théorème de continuité des séries de fonctions que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. **Méthode 1 :**
★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

★ La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf. question 1).
★ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$\left|f_n'(x)\right| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{(n+a)^2},$$

donc

$$0 \leq \|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{(n+a)^2}$$

et la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+a)^2}$ converge (*car* $a > 0$*, sinon il y a un problème pour* $n = 0$) par critère d'équivalence des séries à termes positifs, car $\frac{1}{(n+a)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, avec la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ qui est convergente et à termes positifs.
Donc le critère de comparaison des séries à termes positifs donne que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n'\|_{\infty,[a,b]}$ converge, autrement dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
★ Ainsi le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (par « caractère local » de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^1$ »). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

Méthode 2 :
★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

★ La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (conséquence directe de la question 1).

★ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left|f_n'(x)\right| = \frac{1}{(n+x)^2} \le \frac{1}{n^2}$$

(c'est là qu'on utilise $n>0$), donc

$$0 \le \|f_n'\|_\infty \le \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge, par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n'\|_\infty$ converge, autrement dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

★ Ainsi le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction

$$S - f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$(S-f_0)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

★ Enfin, comme la fonction f_0 est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par somme, la fonction

$$S = (S-f_0) + f_0$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$S'(x) = (S-f_0)'(x) + f_0'(x) = f_0'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

Remarque. La fonction f_0' n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on ne peut pas avoir que la série de fonctions $\sum\limits_{n\ge 0} f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$...

5. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} S(x)+S(x+1) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1+x} \\ &\underset{p=n+1}{=} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p+x} \\ &= \textstyle\frac{(-1)^0}{0+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

6. ★ Comme la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en 1, d'après la question 3, on a

$$\lim_{x\to 0} S(x+1) = S(1).$$

Or, d'après la question précédente,

$$\lim_{x\to 0} \big(xS(x) + xS(x+1)\big) = 1.$$

On a donc

$$\lim_{x\to 0} xS(x) = 1, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}}.$$

★ Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}.$$

Or, la suite numérique $\left(\frac{1}{(x+n)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive (donc la série précédente est alternée), décroissante et tend vers 0. Donc le critère des séries alternées s'applique, et donne que $S'(x)$ est du signe de son premier terme, à savoir $\frac{(-1)^{0+1}}{(x+0)^2} = -\frac{1}{x^2}$, donc

$$S'(x) \leq 0.$$

Donc la fonction S' est négative sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Donc la fonction S est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. On a donc : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S(x+1) \leq S(x),$$

ce qui donne en additionnant $S(x+1)$ ou $S(x)$ (et par la question précédente) :

$$2S(x+1) \leq S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} \leq 2S(x).$$

Puis, pour $y \in]1, \infty[$, en posant $x = y - 1$ (avec $x \in \mathbb{R}_+^*$, puisque $y > 1$), on a

$$2S(y) = 2S(x+1) \leq S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} = \frac{1}{y-1}.$$

Donc, pour tout $x \in]1, \infty[$,

$$\frac{1}{2x} \leq S(x) \leq \frac{1}{2(x-1)} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Donc, le théorème des gendarmes donne

$$\boxed{S(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}.$$

Exercice 3. On peut commencer par remarquer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car par récurrence sur n, on a f_n continue sur I (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) :
Initialisation : pour $n = 0$, f_0 est la fonction nulle, donc est continue sur I.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la fonction f_n définie et continue sur I. Alors la fonction f_n^2 est aussi continue sur I, I est un intervalle, et $0 \in I$. Donc, le théorème fondamental de l'analyse donne que la fonction

$$x \in I \mapsto \int_0^x f_n^2(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de la fonction f_n^2 sur I, donc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Enfin, la fonction

$$x \mapsto \frac{x^3}{3}$$

est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Par addition, on a alors la fonction f_{n+1} définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Donc la fonction f_{n+1} est définie et continue sur I. D'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie et continue sur I.
1) Montrons le résultat demandé par récurrence sur n :
Initialisation : pour $n = 0$, on a

$$|f_0(x)| = |0| = 0 \leq \frac{5}{6}$$

pour tout $x \in I$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq \frac{5}{6}$.
Alors, pour tout $x \in I$, par inégalité triangulaire, inégalité triangulaire généralisée puis croissance de l'intégrale (**car** « les bornes sont dans le bon sens », c'est-à-dire $x \geq 0$) :

$$|f_{n+1}(x)| \leq \left|\frac{x^3}{3}\right| + \left|\int_0^x f_n^2(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{x^3}{3} + \int_0^x |f_n|^2(t)\mathrm{d}t \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \int_0^x \left(\frac{5}{6}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{24} + \frac{25}{36}x \leq \frac{1}{24} + \frac{25}{36} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{18} < \frac{5}{6}.$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : on a donc

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{5}{6}$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in I$, linéarité de l'intégrale, puis (puisque $x \geq 0$) par inégalité triangulaire généralisée et croissance de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= \left|\int_0^x \left(f_n^2(t) - f_{n-1}^2(t)\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^x \left|f_n^2(t) - f_{n-1}^2(t)\right|\mathrm{d}t = \int_0^x \left|f_n(t) - f_{n-1}(t)\right|\left|f_n(t) + f_{n-1}(t)\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^x \left|f_n(t) - f_{n-1}(t)\right|\Big(\left|f_n(t)\right| + \left|f_{n-1}(t)\right|\Big)\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^x \|f_n - f_{n-1}\|_\infty\big(\|f_n\|_\infty + \|f_{n-1}\|_\infty\big)\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^x \|f_n - f_{n-1}\|_\infty \tfrac{5}{6} \times 2\mathrm{d}t = \tfrac{5}{6} \times 2\|f_n - f_{n-1}\|_\infty x \leq \tfrac{5}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty
\end{aligned}$$

(car $x \leq \frac{1}{2}$).
On a donc bien

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{5}{6}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty.$$

Initialisation : pour $n = 0$, $\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1$, il y a donc égalité (ce qui est plus fort que l'inégalité voulue).
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty$. Alors, en prenant l'inégalité de la question précédente en $n+1$ au lieu de n (c'est possible car $n+1 \in \mathbb{N}^*$), on a

$$\|f_{n+2} - f_{n+1}\|_\infty \leq \frac{5}{6}\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \underset{\text{H.R.}}{\leq} \frac{5}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty = \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \|f_1 - f_0\|_\infty,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{5}{6}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty$ est une série géométrique de raison $\frac{5}{6}$, convergente car $\frac{5}{6} \in]-1, 1[$. Donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_{n+1} - f_n\|_\infty$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}}(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement, donc uniformément, sur I.
Or la somme partielle d'indice $n-1$ de cette série est $f_n - f_0 = f_n$ (car c'est une série télescopique) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et comme la série de fonctions converge uniformément, la suite des sommes partielles converge uniformément vers la somme de la série.
D'où la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction f, somme de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}}(f_{n+1} - f_n)$.
4) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$,

$$|f(x)^2 - f_n(x)^2| = |f(x) - f_n(x)||f(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)|\big(|f(x)| + |f_n(x)|\big) \leq \|f - f_n\|_\infty \left(\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\right)$$

(car, pour tout $x \in I$, comme $|f_n(x)| \leq \frac{5}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, donc simplement, vers la fonction f, on a en passant à la limite, $|f(x)| \leq \frac{5}{6}$. Autrement dit, $\|f\|_\infty \leq \frac{5}{6}$).
• Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f^2 - f_n^2\|_\infty \leq \frac{5}{3}\|f - f_n\|_\infty,$$

et comme $\|f - f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit

$$\|f^2 - f_n^2\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

autrement dit la suite de fonctions $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f^2.
• Soit $x \in I$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n^2 est continue sur I, donc sur $[0, x]$. La suite de fonctions (f_n^2) converge uniformément sur I vers f^2, donc converge uniformément sur $[0, x]$ vers f^2, et $[0, x]$ est un segment. Le théorème d'interversion limite/intégrale donne alors

$$\int_0^x f_n^2(t)\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t.$$

Donc, pour tout $x \in I$, l'égalité

$$f_{n+1} = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f_n^2(t)\mathrm{d}t$$

donne, en passant à la limite pour $n \to \infty$,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t.$$

Comme la fonction f est continue sur l'intervalle I (limite uniforme de fonctions continues sur I), et que $0 \in I$, le théorème fondamental de l'analyse donne que la fonction

$$x \mapsto \int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$$

est une primitive de la fonction f^2 sur I.
Donc, par somme de fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = x^2 + f^2(x).$$

Puis, $f(0) = 0$ est direct.

Exercice 4. ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1+x}{n(1+x)}$ existe et $\frac{1+x}{n(1+x)} > 0$, donc $u_n(x)$ existe.
On a $\ln(1+u) = u + \underset{u\to 0}{O}(u^2)$, et $\frac{x}{n(1+x)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x)} + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs. Donc, par critère de domination des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument, donc converge.
Puis, la suite numérique $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante positive de limite nulle, donc par le critère des séries alternées, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, et, pour $x \geq 0$, en multipliant par la constante $\frac{x}{1+x}$ (qui existe car $1 + x \neq 0$), la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x}{n(1+x)}$ converge.
Par addition, on en déduit que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Autre façon : on peut appliquer directement le critère des séries alternées, mais la vérification est moins directe. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la suite numérique $\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (car $\frac{x}{1+x} \geq 0$) et minorée par 1 (idem). En composant par ln qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la suite numérique $\left(\ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par $\ln(1) = 0$, donc positive (donc la série de terme général $u_n(x)$ est alternée). Un calcul direct montre qu'elle tend vers 0 si $n \to \infty$. Alors on peut appliquer le critère des séries alternées, et la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge.
★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n|$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|u_n|'(x) = \frac{\frac{(1+x)-x}{n(1+x)^2}}{1 + \frac{x}{n(1+x)}} = \frac{1}{n(1+x)^2 + x(1+x)} \geq 0.$$

Donc la fonction $|u_n|$ est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $|u_n|(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} |u_n(x)| = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Donc

$$\|u_n\|_\infty = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_\infty = \sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

converge. Or, c'est une série à termes positifs,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

(car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, et que $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$), et comme la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque. Autre façon : on remarque, pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, que

$$0 \leq \left|u_n(x_0)\right| \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x_0}{1+x_0}\frac{1}{n}.$$

Or, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, et $\frac{x_0}{1+x_0} \neq 0$, donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x_0}{1+x_0}\frac{1}{n}$ diverge. Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \left|u_n(x_0)\right|$ diverge, autrement dit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas absolument en x_0. Alors, en contraposant un résultat du cours, pour tout intervalle I contenant x_0 (donc en particulier pour $\mathbb{R}_+$), la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ ne peut pas converger normalement sur I.

Le critère des séries alternées nous donne aussi que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, pour $n \in \mathbb{N}$, si l'on note $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ le reste d'ordre n de la série de fonctions considérée, alors

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \|u_{n+1}\|_\infty.$$

C'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc

$$\|R_n\|_\infty \leq \|u_{n+1}\|_\infty = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. 1) • On montre que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I = [a, b]$ par récurrence sur n.
Initialisation : pour $n = 0$, il faut montrer que $f_0 = f$ est continue sur I, ce qui est vrai par hypothèse.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la fonction f_n de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors la fonction f_n est au moins continue sur I, I est un intervalle, et $a \in I$, donc le théorème fondamental de l'analyse s'applique, et donne que la fonction f_{n+1} est bien définie sur I et est la primitive de la fonction f_n qui s'annule en a (donc $f'_{n+1} = f_n$).
Donc la fonction f_{n+1} est dérivable sur I, et

$$f'_{n+1} = f_n$$

est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I par hypothèse de récurrence, donc la fonction f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. D'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
• On montre par récurrence sur n la propriété P_n :

« pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!}\|f\|_\infty$ ».

Initialisation : pour $n=0$, comme $0!=1$ et $(b-a)^0=1$, cela revient à dire que pour tout $x\in I$,

$$|f_0(x)|=|f(x)|\leq \frac{1}{1}\|f\|_\infty,$$

ce qui est vrai par définition de la norme infinie (*remarquons qu'elle existe, car la fonction f est continue sur le segment I, donc est bien bornée*).
Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$, supposons P_n vraie, alors pour $x\in I$, par inégalité triangulaire généralisée puis croissance de l'intégrale (car $x\geq a$, donc « les bornes sont dans le bon sens »), on a

$$|f_{n+1}(x)|\leq \int_a^x |f_n(t)|\mathrm{d}t \leq \int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!}\|f\|_\infty \mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{n!}\left[\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}\right]_a^x = \frac{\|f\|_\infty}{n!}\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{\|f\|_\infty}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

D'où P_{n+1}.
Conclusion : on a bien, pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in I$,

$$|f_n(x)|\leq \frac{(x-a)^n}{n!}\|f\|_\infty.$$

On en déduit en particulier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{(b-a)^n}{n!}\|f\|_\infty$$

(car, pour tout $x\in[a,b]$, $0\leq x-a\leq b-a$, et car la fonction $t\mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$).
2) • La série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty$ converge car $\frac{(b-a)^n}{n!}$ est le terme général d'une série exponentielle, donc convergente. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge normalement, donc uniformément, sur I. Comme de plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction f_k est continue sur I, on en déduit (par le théorème de continuité des séries de fonctions) que la fonction g_0 (la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$) est continue sur I.
• Par construction, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$f_k'=f_{k-1}.$$

De plus, on a vu que la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} f_n \underset{k=n+1}{=} \sum_{k\geq 1} f_{k-1} = \sum_{k\geq 1} f_k'$$

converge normalement, donc uniformément, sur I.
Donc par application du théorème de dérivation terme à terme, la fonction g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et pour tout $x\in I$,

$$g_1'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = g_0(x).$$

• Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout entier k avec $k\geq n$, la fonction f_k est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, pour tout entier k avec $k\geq n$,

$$f_k^{(i)}=f_{k-i}$$

(récurrence immédiate), et la série de fonctions

$$\sum_{k\geq n} f_{k-i} \underset{j=k-i}{=} \sum_{j\geq n-i} f_j$$

converge normalement, donc uniformément, sur I (puisque $n-i\geq 0$ et que la série de fonctions $\sum\limits_{j\geq 0} f_j$ converge normalement sur I), donc par le théorème de dérivation terme à terme, la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
3) De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in I$,

$$g_n'(x)=\sum_{k=n}^{\infty} f_k'(x) = \sum_{k=n}^{\infty} f_{k-1}(x) \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=n-1}^{\infty} f_j(x) = g_{n-1}(x).$$

Donc

$$g_n' = g_{n-1} = g_n + f_{n-1}$$

(et par récurrence immédiate, $g_n^{(n)} = g_0$).
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n(a) = 0$$

car $f_k(a) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, cela donne

$$\boxed{g_1' = g_1 + f},$$

que l'on résout par la variation de la constante : l'équation homogène est $y' = y$ dont les fonctions solutions sont les fonctions

$$y : x \in I \mapsto Ke^x$$

pour $K \in \mathbb{R}$.
Posons alors la fonction

$$K : x \in I \mapsto g_1(x)e^x.$$

Par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et pour tout $x \in I$, on a $g_1(x) = K(x)e^x$, soit pour tout $x \in I$,

$$g_1'(x) = K'(x)e^x + K(x)e^x.$$

On reporte dans l'équation différentielle vérifiée par g_1, et on a, pour tout $x \in I$,

$$K'(x) = e^{-x}f(x),$$

donc

$$K : x \in I \mapsto K(a) + \int_a^x e^{-t}f(t)\mathrm{d}t$$

(car la fonction K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I). Or,

$$K(a) = g_1(a)e^{-a} = 0$$

(car $g_1(a) = 0$), et donc pour tout $x \in I$,

$$K(x) = \int_a^x e^{-t}f(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{puis} \qquad g_1(x) = e^x \int_a^x e^{-t}f(t)\mathrm{d}t.$$

On conclut en remarquant que $g_1 = g_0 - f$, donc pour tout $x \in I$,

$$g_0(x) - f(x) = e^x \int_a^x e^{-t}f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 6. 1) A $x \in [0,1]$ fixé, la fonction g_x est un polynôme, donc dérivable sur $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$g_x'(t) = 1 - t \geq 0,$$

donc la fonction g_x est croissante sur l'intervalle $[0,1]$, et même strictement croissante, car $g_x' > 0$ sur $[0,1[$. Remarquons que $g_x(0) = \frac{x}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (pour $x \in [0,1]$) et $g_x(1) = \frac{1+x}{2} \in [0,1]$ (pour $x \in [0,1]$).

t	0		1
$g_x'(t)$		$+$	
$g_x(t)$	$\frac{x}{2}$	$\nearrow$	$\frac{x+1}{2}$

2) Soit $x \in [0,1]$. Tout d'abord, remarquons que, pour tout $t \in [0,1]$, comme la fonction g_x est croissante, on a

$$0 \leq g_x(0) \leq g_x(t) \leq g_x(1) \leq 1.$$

On montre alors le résultat voulu sur u_n par récurrence sur n.
Initialisation : si $n = 0$, $u_0 = 0 \in [0,1]$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Si u_n existe et $u_n \in [0,1]$, alors u_n est dans le domaine de définition de g_x, donc $u_{n+1} = g_x(u_n)$ existe, et de plus $u_{n+1} \in [0,1]$ d'après la remarque faite au début de cette question. D'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a u_n qui existe et $u_n \in [0,1]$.

Remarque. Le même résultat subsiste pour $u_0 \in [0,1]$ quelconque !

3) Soit $x \in [0,1]$. Montrons par récurrence sur n que $u_n \leq u_{n+1}$.
Initialisation : comme $x \in [0,1]$, on a

$$u_1 - u_0 = \frac{x}{2} \geq 0, \qquad \text{donc} \qquad u_0 \leq u_1.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n \leq u_{n+1}$, alors comme $u_n \in [0,1]$, $u_{n+1} \in [0,1]$ et la fonction g_x est croissante sur $[0,1]$, on a

$$u_{n+1} = g_x(u_n) \leq g_x(u_{n+1}) = u_{n+2}.$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : donc, par récurrence sur n, on a $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Donc la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Remarque. $u_1 - u_0 = \frac{x-u_0^2}{2}$. Donc, si $u_0 \leq \sqrt{x}$, la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et si $u_0 \geq \sqrt{x}$, la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Cela se montre de même que ci-dessus.

La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 1 donc (par le théorème de la limite monotone) converge vers un réel ℓ (avec $\ell \leq 1$), et comme la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, on a $\ell \geq 0$.
Mais alors, par opérations algébriques sur les limites, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ donne

$$u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell + \frac{x-\ell^2}{2}.$$

Mais

$$u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

(car la suite numérique $\left(u_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), donc par unicité de la limite,

$$\ell = \ell + \frac{x-\ell^2}{2}, \qquad \text{soit} \qquad \ell^2 = x.$$

Comme $\ell \geq 0$, on a alors

$$\ell = \boxed{\sqrt{x}}.$$

Remarque. Le résultat subsiste pour la même raison pour $u_0 \in [0,1]$ quelconque.

4) Montrons par récurrence sur n que P_n est un polynôme sur $[0,1]$.
Initialisation : pour $n = 0$, $P_0 = 0$ qui est bien un polynôme (le polynôme nul).
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Si P_n est un polynôme sur $[0,1]$, alors P_n^2 aussi, puis par combinaison linéaire de polynômes réels, P_{n+1} aussi. D'où l'hérédité.
Conclusion : donc on a bien, par récurrence sur n, que P_n est un polynôme sur $[0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5) Montrons par récurrence sur n : pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

Initialisation : pour $n = 0$, comme pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sqrt{x} - P_0(x) = \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^0 = 1,$$

l'initialisation est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

On a déjà vu $0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x)$ (en effet, la suite $\big(P_n(x)\big)$ est la suite (u_n) du début de l'exercice, donc est croissante et tend vers $\sqrt{x}$, donc est majorée par $\sqrt{x}$). Puis,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \tfrac{\sqrt{x}^2 - P_n(x)^2}{2} \\
&= \sqrt{x} - P_n(x) - \tfrac{\left(\sqrt{x} - P_n(x)\right)\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)}{2} \\
&= \left(\sqrt{x} - P_n(x)\right)\left(1 - \tfrac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right) \\
&\leq \sqrt{x}\left(1 - \tfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \left(1 - \tfrac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right)
\end{aligned}$$

(par application de l'hypothèse de récurrence, et car $\sqrt{x} \leq 1$, $P_n(x) \leq 1$, donc $1 - \frac{\sqrt{x}+P_n(x)}{2} \geq 0$).
Or, $P_n(x) \geq 0$, donc

$$\frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \geq \frac{\sqrt{x}}{2}, \qquad \text{puis} \qquad 1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{x}}{2},$$

et donc (en multipliant des inégalités **positives** et **dans le même sens**), on a bien

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n+1},$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : donc, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

6) La convergence uniforme sur $[0,1]$ se montre alors par simple étude de fonction.
En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto x\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n,$$

alors la fonction f_n est polynomiale, donc dérivable sur $[0,1]$, et pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_n'(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n + nx\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{nx}{2}\right) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{(n+1)x}{2}\right).$$

Donc, pour $x \in [0,1]$, $f_n'(x)$ est du signe de $1 - \frac{(n+1)x}{2}$. Donc f_n est croissante sur $\left[0, \frac{2}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{n+1}, 1\right]$:

x	0		$\frac{2}{n+1}$		
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{1}{2^n}$

Donc f_n admet un maximum en $\frac{2}{n+1}$. On en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) \leq f_n\left(\frac{2}{n+1}\right).$$

Or, pour tout $x \in [0,1]$, $\sqrt{x} \in [0,1]$, donc

$$\sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n = f_n(\sqrt{x}) \leq f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{2}{2(n+1)}\right)^n,$$

soit, grâce à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\sqrt{\cdot} - P_n\|_\infty \leq f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{2}{2(n+1)}\right)^n.$$

Or,

$$n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}-n\frac{1}{n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}-1,$$

donc

$$\left(1-\frac{2}{2(n+1)}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}e^{-1}$$

(car la fonction exp est continue en -1), donc

$$f_n\left(\frac{2}{n+1}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

On en déduit, par le théorème des gendarmes, que

$$\|\sqrt{\cdot}-P_n\|_\infty\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

autrement dit que la suite de fonctions $\big(P_n\big)$ converge uniformément vers $\sqrt{\cdot}$ sur $[0,1]$, ce qui conclut.

Exercice 7. 1) • Pour $x\in]-1,1[$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$0\leq|u_n(x)|\leq|x|^n.$$

Or, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|x|^n$ est une série géométrique de raison $|x|$, convergente car $|x|\in]-1,1[$, donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}u_n(x)$ converge absolument, donc converge.
• Si $|x|>1$, alors

$$|u_n(x)|=\frac{|x|^n}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

(par croissance comparée), donc la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}u_n(x)$ diverge grossièrement.

Remarque. On peut aussi retrouver ces deux résultats en disant que $\sum\limits_{n\geq1}u_n(x)$ est une série entière, et le n-ième coefficient est $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$, non nul pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et pour tout $x\neq0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\frac{n}{n+1}|x|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}|x|,$$

donc (par le critère de D'Alembert), la série entière $\sum\limits_{n\geq1}u_n(x)$ converge absolument pour $|x|<1$, et divergence grossièrement pour $|x|>1$. Autrement dit, son rayon vaut 1.

• Si $x=1$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n(1)=\frac{(-1)^n}{n}$$

est le terme général d'une série convergente par le critère des séries alternées, puisque $\big(u_n(1)\big)$ est bien alternée ($\frac{1}{n}\geq0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$), et la suite $\big(|u_n(1)|\big)_{n\in\mathbb{N}^*}=\big(\frac{1}{n}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît et tend vers 0.
• Si $x=-1$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n(1)=\frac{1}{n}$$

est le terme général d'une série divergente (série harmonique).
• Donc le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$ est

$$\boxed{]-1,1]}.$$

2) ★ Étude de la convergence normale
• Soit $a\in[0,1[$. Pour tout $x\in[-a,a]$, on a

$$|x|\leq a<1,$$

donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|u_n(x)| \leq \frac{a^n}{n} \leq a^n.$$
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq \|u_n\|_{\infty,[-a,a]} \leq a^n.$$
Or la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a^n$ est une série géométrique de raison a, convergente car $a \in]-1,1[$, donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \|u_n\|_{\infty,[-a,a]}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.

• La série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne peut pas converger normalement sur un intervalle contenant 1, car la convergence normale implique la convergence absolue en tout point, mais la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(1)$ est une série convergente qui n'est pas absolument convergente (car $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n(1)| = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est la série harmonique, donc divergente).

• Regardons sur $]-1,a]$ avec $a \in]-1,1[$: soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]-1,a]$,
$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$
car $|x| \leq 1$, et
$$|u_n(x)| \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} \frac{1}{n},$$
donc
$$\|u_n\|_{\infty,]-1,a]} = \frac{1}{n},$$
terme général d'une série divergente. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas normalement sur $]-1,a]$.

Remarque. En particulier, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas normalement sur $]-1,1[$.

• Regardons sur $[a,1[$ avec $a \in]-1,1[$: soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [a,1[$,
$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$
car $|x| \leq 1$, et
$$|u_n(x)| \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{n},$$
donc
$$\|u_n\|_{\infty,[a,1[} = \frac{1}{n},$$
terme général d'une série divergente. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas normalement sur $[a,1[$.

• De là, on sait dire s'il y a convergence normale ou non, sur tout intervalle inclus dans $]-1,1]$, ce qui doit normalement largement suffire pour répondre à la question.

★ Étude de la convergence uniforme

• Pour tout $x \in [0,1]$, la suite numérique $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive (donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(x)$ est alternée) et tend vers 0 par le théorème des gendarmes, puisque
$$0 \leq \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
De plus, la suite numérique $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante : comme $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n,$$
et bien sûr,
$$0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Or, des inégalités **positives** et **dans le même sens** se multiplient, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{x^n}{n},$$

d'où la décroissance annoncée.
Le critère des séries alternées s'applique donc, et donne en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or, cette majoration du reste ne dépend pas de x, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le théorème des gendarmes donne alors

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n\|_{\infty,[0,1]} = 0,$$

autrement dit la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
• Pour $a \in]-1,0[$, on sait que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,0]$.
Donc

$$\boxed{\text{pour tout } a \in]-1,1], \text{ la série de fonctions } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge uniformément sur } [a,1].}$$

En effet, pour tout $x \in [a,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- si $x \in [a,0]$, alors
$$\left|R_n(x)\right| \leq \|R_n\|_{\infty,[a,0]} \leq \|R_n\|_{\infty,[a,0]} + \|R_n\|_{\infty,[0,1]},$$
- et si $x \in [0,1]$, alors
$$\left|R_n(x)\right| \leq \|R_n\|_{\infty,[0,1]} \leq \|R_n\|_{\infty,[a,0]} + \|R_n\|_{\infty,[0,1]}.$$

Par conséquent, on a

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty,[a,1]} \leq \|R_n\|_{\infty,[a,0]} + \|R_n\|_{\infty,[0,1]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0+0=0,$$

et le théorème des gendarmes conclut.
• Puis, pour tout $a \in]-1,0]$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,a]$. En effet,
Méthode 1 : on raisonne par l'absurde avec le théorème de la double limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{x\to-1^+} u_n(x) = \frac{1}{n},$$

et « -1 est une borne de l'intervalle $]-1,a]$ ».
Si de plus l'on suppose que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $]-1,a]$, alors le théorème de la double limite s'applique, et donne que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ a une limite **finie** en -1^+, qui vaut

$$\lim_{x\to-1^+} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to-1^+} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

ce qui est absurde car la série numérique $= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,a]$.
Méthode 2 : plus « élémentaire ».
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme la série à termes positifs $\sum\limits_{k\geq n+1} \frac{1}{k}$ diverge, il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $\sum\limits_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} \geq 2$. Donc, pour tout $x \in]-1,a]$, comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k(x) \geq 0$ (car $x \leq 0$), on a

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{N} u_k(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} \geq 2.$$

Donc il existe $x_n \in]-1,a]$ avec

$$\|R_n\|_\infty = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right\|_{\infty,]-1,a]} \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x_n) \geq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} - 1 \geq 2-1 = 1$$

(la norme infinie valant ∞ par convention si la fonction R_n n'est pas borné sur $]-1,a]$).
Donc la suite numérique $\left(\|R_n\|_{\infty,]-1,a]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,a]$.
Méthode 3 : Toujours de façon « élémentaire », basée sur la même idée que la méthode 2, mais présentée différemment :
pour $a \in]-1,0]$, pour $x \in]-1,a]$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k(x) \geq 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N > n$, pour tout $x \in]-1,a]$, on a

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right\|_{\infty,]-1,a]} \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{N} u_k(x)$$

(la norme infinie valant ∞ par convention si la fonction R_n n'est pas borné sur $]-1,a]$). Comme c'est vrai pour tout $x \in]-1,a]$, en faisant tendre $x \to -1^+$, on obtient (en passant à la limite dans une somme **finie**)

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right\|_{\infty,]-1,a]} \geq \sum_{k=n+1}^{N} \lim_{x\to-1^+} u_n(x) = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k}$$

Ceci étant vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N > n$, on peut faire tendre $N \to \infty$, et donc

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right\|_{\infty,]-1,a]} \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k}$$

Or, cette dernière limite vaut ∞, car la série numérique $\sum_{k\geq n} \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique) et est à termes positifs. Par conséquent, le reste de notre série de fonctions n'est pas borné sur $]-1,a]$, donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,a]$.

Exercice 8.

1. **Méthode 1 :** soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{(-1)^n x_0}{(1+x_0^2)^n} = 0$$

(si $x_0 = 0$, c'est toujours nul, et si $x_0 \neq 0$, alors $1 + x_0^2 > 1$, donc c'est par croissance comparée). Donc

$$f_n(x_0) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs. Donc, par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x_0)$ converge.
Donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Méthode 2 : par le critère de D'Alembert : si $x \neq 0$, $f_n(x) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{1}{1+x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x^2} < 1$$

(car $x \neq 0$), donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge. Et pour $x = 0$, on a la série nulle, qui converge.

Remarque. Si on veut appliquer le critère de D'Alembert, il faut calculer une **limite**. Même si le quotient $\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|$ ne dépend pas de n, il ne faut pas oublier de passer à la limite !

Méthode 3 : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} \geq 0,$$

donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}$ est alternée. Puis, la suite numérique $\left(\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, de limite nulle pour $x \neq 0$ (car c'est alors une suite géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2}$ avec $\frac{1}{1+x^2} \in [0,1[$), donc on peut appliquer le critère des séries alternées, et donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(1+x^2)^n}$ est convergente. On multiplie alors par x, et on a le résultat voulu pour $x \neq 0$. Et pour $x = 0$, on a la série nulle, qui converge.
Calcul de la somme : pour $x \neq 0$, c'est une série géométrique de raison $\frac{-1}{1+x^2}$ (qui est bien dans $]-1,1[$ car $x \neq 0$), donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n} = x\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}} - 1\right) = \boxed{\frac{-x}{2+x^2}}$$

(en faisant attention que la somme part de 1 et pas de 0...). On peut remarquer que cette formule reste valable pour $x = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $0 < a < b$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a $0 < a \leq x \leq b$, donc

$$0 < 1 + a^2 \leq 1 + x^2 \leq 1 + b^2,$$

et comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $n > 0$),

$$0 < \frac{1}{(1+b^2)^n} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}.$$

Enfin, des inégalités positives dans le même sens se multiplient, ce qui donne

$$|f_n(x)| = \frac{x}{(1+x^2)^n} \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

Cette majoration ne dépendant pas de x, on peut affirmer

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

Or, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{b}{(1+a^2)^n}$ est convergente (série géométrique de raison $\frac{1}{1+a^2}$ avec $\frac{1}{1+a^2} \in]-1,1[$ **car** $a > 0$). Donc la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.
Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur tout segment de $]0,+\infty[$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions le sens de variation de la fonction

$$|f_n| : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

(qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, comme quotient de deux polynômes, dont celui du dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$).
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|f_n|'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1+x^2-2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\left(1-\sqrt{2n-1}x\right)\left(1+\sqrt{2n-1}x\right)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Donc la fonction $|f_n|$ est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}}, +\infty\right[$. Puis,

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \geq \left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)\right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}\sqrt{2n}},$$

et la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}\sqrt{2n}}$ est divergente (Riemann, $\frac{1}{2} \leq 1$) et à termes positifs. Donc, par critère de comparaison puis d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$ diverge, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque.

(a) Justifions l'équivalent :

$$\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\right],$$

or

$$n\ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

donc par continuité de la fonction exp en $\frac{1}{2}$,

$$\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\frac{1}{2}},$$

c'est un grand classique.

(b) Une autre façon pour le voir : on évalue en $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, et on a directement le terme d'une série divergente, encore faut-il le remarquer...

(c) Si la somme partait de $n = 0$, alors comme f_0 n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$ (f_0 est la fonction $x \mapsto x$), on aurait pu directement conclure à la non convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.

(d) Comme $|f_n|(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} |f_n|(x) = 0$ (car $n \geq 1$), du tableau de variations, on a même

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \|\,|f_n|\,\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)\right|.$$

Mais ici, on a seulement utilisé une inégalité, ce qui a suffit pour conclure.

4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors $\frac{1}{\sqrt{2n-1}} < a$. Comme la fonction $|f_n|$ est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}}, +\infty\right[$ (d'après l'étude faite précédemment), pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ alors la fonction $|f_n|$ restreint à $[a, +\infty[$ est décroissante positive, donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \|\,|f_n|\,\|_{\infty,[a,+\infty[} = |f_n(a)|.$$

De plus, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n(a)|$ est convergente (vu à la première question), donc la série numérique

$$\sum_{n\geq N} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$$

converge. Donc la série de fonctions

$$\sum_{n\geq N} f_n$$

est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. *il reste à rajouter les premiers termes...*
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[a, +\infty[$, on en déduit que la somme

$$\sum_{n=1}^{N-1} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$$

est fini, et donc la série numérique

$$\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$$

converge, autrement dit la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} f_n$$

est normalement convergente sur $[a,+\infty[$.

Autre méthode : une autre façon de montrer ceci, est d'utiliser l'inégalité classique $\frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ (une retraduction de $\big(1+|x|\big)^2 \geq 0$), ce qui donne pour $x \geq a$ et $n \geq 1$:

$$\left|\frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}\right| \leq \frac{1}{2(1+x^2)^{n-1}} \leq \frac{1}{2(1+a^2)^{n-1}}.$$

C'est vrai pour tout $x \in [a,+\infty[$, donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{2(1+a^2)^{n-1}},$$

et on conclut car la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2(1+a^2)^{n-1}}$ est une série géométrique convergente, car de raison $\frac{1}{1+a^2}$, avec $\frac{1}{1+a^2} \in]0,1[$ (car $a>0$).

Remarque. On n'a fait l'étude que sur $[0,+\infty[$, car f_n est impaire pour tout entier n, donc la somme de la série aussi.

Exercice 9. ★ Convergence simple :
Soit $x_0 \in [0,\pi]$, si $0 < x_0 < \pi$, on a

$$0 \leq \big|\sin(x_0)\ \cos^n(x_0)\big| \leq \big|\cos(x_0)\big|^n$$

et la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \big|\cos(x_0)\big|^n$ est convergente (série géométrique de raison $\big|\cos(x_0)\big|$ avec $\big|\cos(x_0)\big| < 1$ puisque $x_0 \in]0,\pi[$). Donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(x_0)\cos^n(x_0)$ converge absolument, donc converge.

Si $x_0 = 0$ ou π alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(x_0)\cos^n(x_0) = 0$. Donc la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(x_0)\cos^n(x_0)$ converge.

La série de fonctions converge donc simplement sur $[0,\pi]$.

★ Convergence normale sur $[0,\pi]$?

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il y a convergence normale sur $[0,\pi]$. Essayons de nier un théorème du cours.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \in [0,\pi] \mapsto \sin(x)\ \cos^n(x).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0,\pi]$ (*par produit de fonctions usuelles continues*).
- Supposons que la suite de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $[0,\pi]$.

Alors, par le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

serait continue sur $[0,\pi]$.

Or

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0,$$

et pour tout $x \in]0,\pi[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(x)\cos^n(x) = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

(somme d'une série géométrique convergente de raison $\cos(x)$, avec $\cos(x) \in]-1,1[$ car $x \in]0,\pi[$). Or,

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \text{et} \qquad 1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2},$$

donc

$$\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x}, \qquad \text{en particulier} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \neq 0 = f(0),$$

donc la somme de la série de fonctions n'est pas continue en 0. Absurde.
Donc la série de fonctions étudiée ne converge pas normalement sur $[0,\pi]$.

Remarque. On a le même problème en π.

★ Convergence normale sur tous les segments de $]0,\pi[$.
Soit $0 < a < b < \pi$, alors, comme la fonction cos est décroissante sur $[0,\pi]$, on a, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\cos(a) \geq \cos(x) \geq \cos(b), \qquad \text{et donc} \qquad 0 \leq \big|\cos(x)\big| \leq \max\Big(\big|\cos(a)\big|, \big|\cos(b)\big|\Big).$$

Remarque. En effet, $\alpha \geq y \geq \beta$ donne $|y| \leq \max\big(|\alpha|,|\beta|\big)$, et cela se voit en distinguant trois cas :

- si $\beta \geq 0$, alors $|\alpha| = \alpha$, $|\beta| = \beta$ et $|y| = y$, et $\max(\alpha,\beta) = \alpha$, et l'inégalité est directe.
- si $\alpha \leq 0$, $|\alpha| = -\alpha$, $|\beta| = -\beta$ et $|y| = -y$, donc on a $-\beta \geq -y = |y| \geq -\alpha \geq 0$ et $\max(-\alpha,-\beta) = -\beta$, et l'inégalité est directe.
- si $\beta \leq 0 \leq \alpha$, alors $|\alpha| = \alpha$, $|\beta| = -\beta$, et deux cas sont possibles : si $y \in [0,\alpha]$, alors $|y| = y \leq \alpha = |\alpha| \leq \max\big(|\alpha|,|\beta|\big)$, et si $y \in [\beta,0]$, alors $\beta \leq y \leq 0$, soit $-\beta = |\beta| \geq -y = |y| \geq 0$, et donc $|y| \leq |\beta| \leq \max\big(|\alpha|,|\beta|\big)$.

Dans tous les cas, on a bien l'inégalité annoncée.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\big|f_n(x)\big| \leq \big|\cos(x)\big|^n \leq \max\Big(\big|\cos(a)\big|, \big|\cos(b)\big|\Big)^n$$

(car la fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$).
Alors, avec les notations précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \max\Big(\big|\cos(a)\big|, \big|\cos(b)\big|\Big)^n$$

et la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \max\Big(\big|\cos(a)\big|, \big|\cos(b)\big|\Big)^n$$

est une série géométrique convergente car de raison $\max\Big(\big|\cos(a)\big|, \big|\cos(b)\big|\Big)$ avec $0 \leq \max\Big(\big|\cos(a)\big|, \big|\cos(b)\big|\Big) < 1$ (puisque l'on a $0 \leq \big|\cos(a)\big| < 1$ et $0 \leq \big|\cos(b)\big| < 1$, puisque a et b sont dans $]0,\pi[$). Donc la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$$

converge (par critère de comparaison des séries à termes positifs), autrement dit la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.
Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur tout segment de $[0,\pi]$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Notons

$$f_n : x \in [0,1[\mapsto \frac{(1-x)x^n}{n(1-x^n)},$$

alors la fonction f_n est dérivable sur $[0,1[$ (comme quotient de deux polynômes, dont celui du dénominateur qui ne s'annule pas sur $[0,1[$, puisque $1-x^n>0$ pour tout $x\in[0,1[$), et pour tout $x\in[0,1[$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \tfrac{\left(nx^{n-1}-(n+1)x^n\right)(1-x^n)+nx^{n-1}(x^n-x^{n+1})}{n(1-x^n)^2} \\ &= \tfrac{x^{n-1}}{n(1-x^n)^2}\left(n-nx^n-(n+1)x+(n+1)x^{n+1}+nx^n-nx^{n+1}\right) \\ &= \tfrac{x^{n-1}}{n(1-x^n)^2}\left(n-(n+1)x+x^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Notons alors $P : x\in[0,1[\mapsto n-(n+1)x+x^{n+1}$. Alors, P est une fonction polynomiale, donc dérivable, et pour tout $x\in[0,1[$, on a

$$P'(x)=(n+1)(x^n-1)<0,$$

donc la fonction P est strictement décroissante sur l'intervalle $[0,1[$. Comme

$$\lim_{x\to1^-} P(x) = n-(n+1)+1=0,$$

on en déduit $P>0$ sur $[0,1[$.
Donc $f_n'>0$ sur $[0,1[$, et donc la fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1[$.
Comme, pour tout $x\in[0,1[$, on a

$$f_n(x)=\frac{(1-x)x^n}{n(1-x^n)}=\frac{x^n}{n}\frac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{n^2},$$

(en reconnaissant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x avec $x\neq1$), et $f_n(0)=0$ (car $n\geq1$), on en déduit que, pour tout $x\in[0,1[$,

$$0\leq f_n(x)\leq\frac{1}{n^2}.$$

Donc $\|f_n\|_\infty\leq\frac{1}{n^2}$ (et en fait, la limite $\lim\limits_{xx\to1^-} f_n(x)=\frac{1}{n^2}$ donne même qu'il y a égalité).
Or, la série numérique $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq1}\|f_n\|_\infty$ converge. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge normalement sur $[0,1[$.

Exercice 11.

1. Soit $x_0\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$0\leq\left|\frac{e^{-nx_0^2}}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2},$$

   et la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2>1$) et à termes positifs. Donc, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} f_n(x_0)$ converge absolument, donc converge.
   Donc la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$, autrement dit, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{e^{-nx^2}}{n^2}\in\mathbb{R}.$$

   ★ Pour tout $n\geq1$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
   ★ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f_n(x)|\leq\frac{1}{n^2}$. Donc

$$0\leq\|f_n\|_\infty\leq\frac{1}{n^2},$$

or la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2>1$). Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction f est alors continue sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. De plus comme la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et que $+\infty$ « est une borne de $\mathbb{R}$ », le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$

4. ★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_n'(x) = \frac{-2xe^{-nx^2}}{n} \qquad \text{et} \qquad f_n''(x) = \frac{-2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2e^{-nx^2}.$$

★ La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

★ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0<a<b$, alors pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$|f_n'(x)| \leq \frac{2be^{-na^2}}{n} \leq 2be^{-na} \qquad \text{et (par inégalité triangulaire)} \qquad |f_n''(x)| \leq \frac{(2+4nb^2)e^{-na^2}}{n} \leq (2+4b^2)e^{-na^2}.$$

Ces majorations ne dépendent pas de x, donc

$$\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} \leq 2be^{-na} \qquad \text{et} \qquad \|f_n''\|_{\infty,[a,b]} \leq (2+4b^2)e^{-na}.$$

Or, les séries numériques $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2be^{-na}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (2+4b^2)e^{-na}$ sont des séries géométriques convergentes (car de raison e^{-a}, avec $e^{-a}]-1,1[$ car $a>0$).
Donc les séries de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n'$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n''$ convergent normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$.
Donc, par le théorème de dérivation terme à terme, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (par caractère « local » de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^2$ »). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2xe^{-nx^2}}{n} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2e^{-nx^2}}{n} + 4x^2e^{-nx^2} \right).$$

Enfin, la fonction f est paire et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 12.

1. Si $x=0$, la série numérique

$$\sum_{n\geq 1} f_n(0) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

diverge (série de Riemann divergente).
Si $x \leq 0$ alors pour tout $n \geq 1$ on a

$$\frac{e^{-nx}}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0,$$

or la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Donc d'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$ est divergente.
Si $x>0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{e^{-nx}}{n} = 0$$

par croissance comparée, donc
$$\frac{e^{-nx}}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2>1$) et est à termes positifs. Donc, par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{n}$ est (absolument) convergente, donc $f(x)$ existe.

Ainsi
$$\boxed{D_f =]0,+\infty[}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ (car $n>0$). De plus, pour tout $x \in [1,+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{e^{-n}}{n} \leq e^{-n},$$
donc $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq e^{-n}$. De plus, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-n}$ est une série géométrique de raison e^{-1}, avec $e^{-1} \in]-1,1[$, donc est convergente. Donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$. Comme $+\infty$ « est une borne de $[1,+\infty[$ », le théorème de la double limite s'applique, et donne
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$
Autre méthode : pour tout $n\geq 1$, pour tout $x>0$,
$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{n} \leq e^{-nx},$$
donc (puisque les séries convergent bien car $x>0$), par croissance de la somme, on a
$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Par théorème des gendarmes, on en déduit $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0<a<b$.
★ Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x>0$, on
$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^{k-1} e^{-nx}.$$
★ La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
★ Comme exp est une fonction croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $n\geq 1$, pour tout $x \in [a,b]$,
$$\left|f_n^{(k)}(x)\right| = n^{k-1}e^{-nx} \leq n^{k-1}e^{-na},$$
par conséquent
$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq n^{k-1}e^{-na}$$
(en fait, il y a même égalité, car $a \in [a,b]$).
De plus, par croissance comparée, on a $\lim_{n\to+\infty} n^2 n^{k-1} e^{-na} = 0$, donc
$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2>1$) et à termes positifs, donc par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum_{n\geq 1}\|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$.
Donc le théorème de dérivation terme à terme s'applique : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (par « caractère local » de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^\infty$ »).
De plus, pour tout entier naturel $k\in\mathbb{N}$, pour tout $x>0$,

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k n^{k-1}e^{-nx}.$$

4. De la question précédente (pour $k=2$), on déduit : pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\geq 0.$$

Donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

5. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x>0$,

$$f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=-\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

(somme d'une série géométrique de raison e^{-x}, convergente car $e^{-x}\in]-1,1[$ puisque $x>0$). En intégrant (c'est de la forme $-\frac{u'}{u}$), on a :

les fonctions f et $x\mapsto -\ln\left(1-e^{-x}\right)$ sont deux primitives de f' sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe $K\in\mathbb{R}$ avec, pour tout $x>0$,

$$f(x)=-\ln\left(1-e^{-x}\right)+K$$

(**on n'oublie pas la constante quand on primitive !**).
Cherchons K : en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $0=0+K$. Donc $K=0$. Ainsi, pour tout $x>0$,

$$\boxed{f(x)=-\ln\left(1-e^{-x}\right)}.$$

Exercice 13.

1. Soit $x_0>0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{1}{n+n^2x_0}=\frac{1}{x_0},\qquad \text{donc}\qquad \frac{1}{n+n^2x_0}\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2>1$) et à termes positifs. Donc le théorème de convergence absolue par comparaison donne que la série définissant $f(x)$ est (absolument) convergente. Donc $f(x)$ existe pour $x>0$.

Remarque.

(a) On peut aussi utiliser le critère d'équivalence, puisque $\frac{1}{n+n^2x_0}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2x_0}$ d'après la limite précédente...

(b) $f(0)$ n'existe pas, mais $f(x)$ existe pour tout $x<0$ dès que $n+n^2x\neq 0$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$. Donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*\setminus\left\{-\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

2. Pour tout $n \geq 1$, on pose
$$f_n : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{n + n^2 x} \in \mathbb{R}.$$
Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $0 < a$.
★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$.
★ Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a
$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{n + n^2 a} \leq \frac{1}{n^2 a},$$
(car $a > 0$), donc
$$0 \leq \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{n^2 a}.$$
Or, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 a}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge. Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$.
Ainsi, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction f est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc par « caractère local » de la continuité, sur $\displaystyle\bigcup_{a>0} [a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

3. **Calcul de la limite :**
Méthode 1 : Pour tout $n \geq 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Or, à la question précédente, on a montré (en prenant $a = 1$) que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$. De plus, « $+\infty$ est une borne de $[1, +\infty[$ ». Donc le théorème de la double limite s'applique, et donne
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$
Méthode 2 : Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x > 0$, on a
$$0 \leq \frac{1}{n + n^2 x} \leq \frac{1}{n^2 x}.$$
Donc, pour tout $x > 0$, en sommant des inégalités dans le même sens (par croissance de la somme),
$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
(car cette dernière série converge (Riemann, $2 > 1$)), et donc si $x \to +\infty$, le théorème des gendarmes donne
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}.$$

Calcul de l'équivalent :
Méthode 1 : Calculons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x f(x)$.
Pour tout $n \geq 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x f_n(x) = \frac{1}{n^2}$.
Or, pour tout $x \in [1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\left| x f_n(x) \right| = \frac{x}{n + n^2 x} \leq \frac{1}{n^2},$$
donc si on note $g_n : x \mapsto x f_n(x)$, on a montré
$$\left\| g_n \right\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2>1$), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1}\|g_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ converge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$.
De plus, « $+\infty$ est une borne de $[1,+\infty[$ ». Donc le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty} g_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Comme $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}>0$, on en déduit

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{s}{x}}.$$

Méthode 2 : Notons $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (on sait (?) que $s=\frac{\pi^2}{6}$). Alors, pour tout $x>0$,

$$0\leq\frac{s}{x}-f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2x}-\frac{1}{n+n^2x}\right)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+n^2x)}\leq\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

(car cette dernière série converge (Riemann, $3>1$), et car, pour tout $n\geq 1$, $\frac{1}{n(n+n^2x)}\leq\frac{1}{xn^3}$). Donc

$$\frac{s}{x}-f(x)=\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right),$$

soit

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{s}{x}}.$$

4. Soit $x>0$. On pose $h:\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \frac{1}{t+t^2x}=\frac{1}{t(1+tx)}\end{array}\right.$
La fonction h est continue (par morceaux), positive, décroissante (car dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, avec pour tout $x>0$, $h'(t)=-\frac{1+2tx}{(t+t^2x)^2}\leq 0$).
Pour tout $t>0$ et $x>0$, on a :

$$\frac{1}{t}-\frac{x}{1+tx}=\frac{1+tx}{t(1+tx)}-\frac{tx}{t(1+tx)}=\frac{1}{t(1+tx)}$$

en réduisant au même dénominateur.
Pour tout $n\geq 2$, par décroissante de h :

pour tout $t\in[n-1,n]$, on a $n-1\leq t\leq n$ donc $h(t)\geq h(n)$,

et

pour tout $t\in[n,n+1]$, on a $n\leq t\leq n+1$ donc $h(n)\geq h(t)$.

Donc, par croissance de l'intégrale (qui s'applique ici sur $[n-1,n]$ ou $[n,n+1]$ **car on a** $n\geq 2$ (h n'est pas continue en 0, c'est pour cela qu'on ne prend pas le terme $n=1$...)),

$$\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t\geq\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n(1+nx)}\mathrm{d}t=\frac{1}{n(1+nx)}\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{n(1+nx)}=\int_{n}^{n+1}\frac{1}{n(1+nx)}\mathrm{d}t\geq\int_{n}^{n+1}\frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}$$

Ainsi en sommant pour $n\in[\![2,N]\!]$ (avec $N\geq 2$), on a :

$$\sum_{n=2}^{N}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t\geq\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(1+nx)}\geq\sum_{n=2}^{N}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t$$

Donc, si $N \to +\infty$ (et en utilisant la relation de Chasles), **sous réserve d'existence de la limite**,

$$\lim_{N\to+\infty}\int_1^N \frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t \geq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(1+nx)} \geq \lim_{N\to+\infty}\int_2^N \frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t$$

soit en additionnant $\frac{1}{1+x}$ (qui est le terme $n=1$ de la somme) :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_1^N \frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t + \frac{1}{1+x} \geq f(x) \geq \lim_{N\to+\infty}\int_2^N \frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t + \frac{1}{1+x}$$

Calculons $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_1^N \frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t$ (c'est-à-dire $\int_1^\infty \frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t$). On a :

$$\begin{aligned}
\int_1^N \frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t &= \int_1^N \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \int_1^N \frac{x}{1+tx}\mathrm{d}t \\
&= \ln(N) - \ln(1+Nx) + \ln(1+x) \\
&= -\ln\left(\frac{1+Nx}{N}\right) + \ln(1+x) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(x) + \ln(1+x)
\end{aligned}$$

donc la limite existe bien.
Par la même méthode de calcul, on a :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_2^N \frac{1}{t(1+tx)}\mathrm{d}t = -\ln(x) - \ln(2) + \ln(1+2x)$$

(et la limite existe bien là aussi). On a donc : pour tout $x>0$,

$$-\ln(x) + \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \geq f(x) \geq -\ln(x) - \ln(2) + \ln(1+2x) + \frac{1}{1+x}.$$

Donc par double encadrement, on a $\boxed{f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)}$ (on divise par $-\ln(x)$ les inégalités précédentes et on applique le théorème des gendarmes).

Exercice 14.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
★ Si $x_0 > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 n^{x_0} e^{-nx_0} = 0$$

par croissance comparée (car $x_0 > 0$). On a donc :

$$n^{x_0}e^{-nx_0} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

or la série numérique $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ est une série convergente (Riemann, $2>1$) à termes positifs. Donc d'après le théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} n^{x_0}e^{-nx_0}$ converge, autrement dit $S(x_0)$ est bien défini.
★ Si $x_0 < 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^{x_0}e^{-nx_0} = +\infty \neq 0$$

par croissance comparée, donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} n^{x_0}e^{-nx_0}$ diverge grossièrement, en particulier $S(x_0)$ n'existe pas.
★ Si $x_0 = 0$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n^0e^{-n\cdot0} = 1$ qui ne tend pas vers 0, donc de même, il y a divergence grossière, et $S(0)$ n'existe pas.
★ Ainsi

$$\boxed{D_S =]0,+\infty[}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons
$$f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto n^x e^{-nx} \in \mathbb{R}.$$
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
★ Pour tout $x \in [a,b]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$|f_n(x)| \leq n^b e^{-na}.$$
On a donc
$$0 \leq \|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq n^b e^{-na},$$
et la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} n^b e^{-na}$ converge (car $a > 0$, idem qu'à la première question), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge.
Autrement dit, la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$.
★ Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique, et donne que la fonction S est continue sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc par « caractère local » de la continuité, sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. ★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(n)-nx} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\big(\ln(n)-n\big)} = 0$$
car $\ln(n) - n < 0$ (en effet, $\ln(u) \leq u - 1 < u$ pour tout $u > -1$).

★ Montrons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions les variations de f_n : la fonction $f_n : x \mapsto e^{x\ln(n)-nx}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, et pour tout $x \in [1,+\infty[$,
$$f_n'(x) = \big(\ln(n) - n\big)e^{x\ln(n)-xn} \leq 0.$$
Donc la fonction f_n est décroissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.
De plus, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Le tableau de variations de la fonction f_n donne alors
$$\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = f_n(1).$$
Or, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(1)$ converge (cf. question 1), donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ converge, d'où la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$.
★ Enfin, $+\infty$ est « une borne de $[1,+\infty[$ », donc le théorème de la double limite s'applique :
$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$

Exercice 15. 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$1 + \frac{1}{2}e^{-x} > 1 > 0,$$
donc $f(x)$ existe. Puis, par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{2\left(1 + \frac{1}{2}e^{-x}\right)},$$
et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$f'(x) == -\frac{e^{-x}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{2^{n+1}} \underset{p=n+1}{=} \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p e^{-px}}{2^p},$$
car on a reconnu la somme d'une série géométrique de raison $-\frac{1}{2}e^{-x}$, avec $-\frac{1}{2}e^{-x} \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right] \subset]-1,1[$ pour $x \geq 0$ (car $x \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq 1$).

Remarque. C'est même valable tant que $\frac{1}{2}e^{-x} < 1$, soit pour $x > -\ln(2)$.

2) La fonction f' est **continue** sur $\mathbb{R}$, et la fonction f est une primitive de f' sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) = f(x) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = f(x) - \ln(3) + \ln(2).$$

Puis, fixons $x \in \mathbb{R}_+$. Notons, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$f_p : t \in [0,x] \mapsto \frac{(-1)^p e^{-pt}}{2^p},$$

alors la fonction f_p est continue sur $[0,x]$.
Montrons que la série de fonctions $\sum\limits_{p\geq 1} f_p$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0,x]$: pour tout $t \in [0,x]$, on a

$$0 \leq |f_p(t)| = \frac{e^{-pt}}{2^p} \leq \frac{1}{2^p}$$

(car $t \geq 0$, car $x \geq 0$), donc

$$0 \leq \|f_p\|_{\infty,[0,x]} \leq \frac{1}{2^p}.$$

Or la série numérique $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^p}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{2} \in]-1,1[$), donc, par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}^*} \|f_p\|_{\infty,[0,x]}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}^*} f_p$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,x]$.
On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(3) - \ln(2) + \int_0^x \sum_{p=1}^{\infty} f_p(t)\mathrm{d}t \\
&= \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^x f_p(t)\mathrm{d}t \\
&= \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \int_0^x e^{-pt}\mathrm{d}t \\
&= \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^x \\
&= \boxed{\ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{1-e^{-px}}{p}}
\end{aligned}$$

3) Pour tout $x > 0$, par inégalité triangulaire (et car les séries suivantes convergent), on a

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p2^p} e^{-px}\right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p2^p} e^{-px} \leq \sum_{p=1}^{\infty} e^{-px} = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison e^{-x}, avec $e^{-x} \in]0,1[$ pour $x > 0$) (*on fait attention : la somme de la série géométrique part de $p = 1$, et pas $p = 0$...*). Donc le théorème des gendarmes conclut.

Remarque.

1. On peut aussi majorer ainsi : pour tout $x \geq 1$,

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p2^p} e^{-px}\right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p2^p} e^{-x} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} e^{-x} = e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. On peut aussi utiliser le théorème de la double limite, car la série de fonctions $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p2^p} e^{-px}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$, mais c'est plus long à rédiger que la simple majoration ci-dessus...

On en déduit que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln(3) - \ln(2) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{1}{p}.$$
Or, de la définition de f, on a
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{-x}\right) = 0.$$
Donc, par unicité de la limite, on a $\ln(3) - \ln(2) + \sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{1}{p} = 0$, et donc pour tout $x \geq 0$,
$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{-e^{-px}}{p} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{2^p} \frac{e^{-px}}{p}$$
d'après la question précédente.

Exercice 16. • Pour tout $n \geq 0$, on pose $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(-1)^n}{n^2+x^2} \end{array} \right.$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\lim_{n \to +\infty} n^2 |f_n(x_0)| = \frac{1}{x_0^2} \qquad \text{donc} \qquad |f_n(x_0)| = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
or la série numérique $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$) et à termes positifs. Donc d'après le théorème de convergence absolue par comparaison (car $x_0 > 0$), la série numérique $\sum\limits_{n \geq 0} f_n(x_0)$ est absolument convergente, donc convergente.

Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Étudions la continuité.

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

★ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$, alors pour tout $x \in [a, b]$,
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 + a^2}$$
(même pour $n = 0$, car on suppose $a > 0$), donc
$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{n^2 + a^2}.$$
De plus, la série numérique $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + a^2}$ est convergente (car $\frac{1}{n^2+a^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$...), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$.

Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique : la fonction $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par « caractère local » de la continuité.

Autre façon :

On a $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (et pas juste $\mathbb{R}_+^*$), et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2},$$

puis

$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (Riemann, $2 > 1$), le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge.
Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de continuité des séries de fonctions donne alors que la fonction

$$T : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
Par addition, la fonction

$$S : x \mapsto T(x) + \frac{1}{x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque.

1. Cette façon est intéressante, car on constate que le problème en 0 provient juste de f_0, et donc (et c'est ce qu'on fait dans la suite), il peut être intéressant d'étudier $\sum_{n\geq 1} f_n$.
2. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne peut pas converger normalement sur $\mathbb{R}_+^*$, car la fonction f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La suite numérique $\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)_{n\geq 1}$ est positive (donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ est alternée), décroissante et tend vers 0, donc le critère des séries alternées s'applique. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|T(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \leq |f_1(x)| = \frac{1}{x^2+1}.$$

Donc,

- la fonction T est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a
$$|T(x)| \leq \frac{1}{1+x^2},$$
- et la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car continue positive sur $\mathbb{R}_+$, et admet arctan comme primitive, et que arctan a une limite finie en $+\infty$).

Donc, par critère de comparaison, la fonction T est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si la fonction S était intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on aurait par soustraction que la fonction $x \mapsto S(x) - T(x) = \frac{1}{x^2}$ le serait aussi, ce qui est faux (Riemann, $2 > 1$).
Donc la fonction S n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Autre façon : la fonction T est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc en 0. Donc

$$S(x) = T(x) + \frac{1}{x^2} = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow}+\infty} + T(0) + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

En particulier,

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Mais la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue positive sur $]0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ diverge (Riemann, $2 > 1$), et la fonction S est continue sur $]0,1]$, donc par critère d'équivalence, l'intégrale $\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x$ diverge. A plus forte raison, l'intégrale $\int_0^\infty S(x)\mathrm{d}x$ diverge, donc la fonction S n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 17. ★ Pour tout entier $n \geq 2$ et $x \in [0,1]$, on a

$$n - x \geq 2 - 1 = 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad n + x \geq 2 + 0 = 2 > 0,$$

donc

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

existe.
Puis, à $x \in]0,1]$ fixé,

$$\frac{2x}{n^2 - x^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2x}{n^2}.$$

Or, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{2x}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$), est à termes positifs, donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 2} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge, donc $f(x)$ existe.
Enfin, $f(0)$ existe, car c'est la somme de la série nulle.
★ Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, notons

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

Alors la fonction f_n est continue sur $[0,1]$ (comme quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$), et pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{n^2 - 1},$$

donc

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{2}{n^2 - 1}.$$

Or, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2}{n^2-1}$ converge (série à terme positif, $\frac{2}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$...), donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$.
Donc, par le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction f est continue sur $[0,1]$ (donc l'intégrale de l'énoncé existe), et par le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on a

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{n-t} - \frac{1}{n+t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{\infty} \left[-\ln(n-t) - \ln(n+t)\right]_0^1 = \sum_{n=2}^{\infty} \big(2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)\big).$$

Or, pour tout entier $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^{N} \big(2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)\big) = \sum_{n=2}^{N} \big(\ln(n) - \ln(n-1)\big) + \sum_{n=2}^{N} \big(\ln(n) - \ln(n+1)\big) = \ln(N) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(N+1)$$

(en reconnaissant des sommes télescopiques). Et donc

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \big(2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)\big) = \lim_{N\to+\infty} \left(\ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)\right) = \boxed{\ln(2)}.$$

Exercice 18. ★ Notons

$$f : x \mapsto x^{-x} = e^{-x\ln(x)}.$$

Alors la fonction f est définie et continue sur $]0,1]$, par composition de fonctions usuelles. Puis,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

car par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ (et car exp est continue en 0). Donc on prolonge la fonction f par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$ (d'où la célèbre convention $0^0 = 1$). Donc la fonction f ainsi définie est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x$ est bien définie.

★ Pour tout $x \in]0,1]$, on a
$$x^{-x} = e^{-x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(-x\ln(x)\big)^n}{n!}$$
(car $e^u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ pour tout réel $u \in \mathbb{R}$).
Notons alors, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$f_n : x \in]0,1] \mapsto \big(-x\ln(x)\big)^n.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n continue sur $]0,1]$ par produit de fonctions continues, et pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f_n(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$
(car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$), et donc on prolonge la fonction f_n par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 0$. Pour $n = 0$, on a $f_0 : x \mapsto 1$ qui se prolonge naturellement par continuité en 0 en posant $f_0(0) = 1$.
On a alors, pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n!}.$$
En effet, pour $x \in]0,1]$, c'est l'égalité vue précédemment :
$$x^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(-x\ln(x)\big)^n}{n!},$$
et pour $x = 0$, c'est car
$$1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n!}.$$
★ La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$. En effet, la fonction f_0 (constante égale à 1) est bornée sur $[0,1]$ par 1, puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f_n = (f_1)^n$$
(en distinguant $x = 0$ et $x \in]0,1]$). Or, f_1 est une fonction continue sur le segment $[0,1]$, donc est bornée par un réel $M > 0$: pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$|f_1(x)| \leq M.$$
Donc, par élévation à la puissance n, on a pour tout $x \in [0,1]$,
$$|f_n(x)| \leq M^n.$$
Cela reste vrai pour $n = 0$ avec la convention usuelle $M^0 = 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{M^n}{n!}.$$
Comme la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{M^n}{n!}$ converge (c'est une série exponentielle), par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge, autrement dit, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$.

Remarque. Si on fait une étude de fonction, on constate que la fonction f_1 est positive, et prend son maximum en $x = e^{-1}$, donc $M = f_1(e^{-1}) = e^{-1}$ convient. Mais on n'a pas besoin d'être aussi précis.

★ On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, et donc on a
$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{\big(-x\ln(x)\big)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n(x)\mathrm{d}x.$$

★ Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, notons
$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln^p(x)\mathrm{d}x$$
(c'est une intégrale convergente, par le théorème de convergence absolue par comparaison, car la fonction $x \mapsto x^n \ln^p(x)$ est continue sur $]0,1]$, et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0 par croissance comparée, alors que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$)).
Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, les fonctions
$$u : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto \ln^p(x)$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, de dérivées respectives
$$u' : x \mapsto x^n \qquad \text{et} \qquad v' : x \mapsto \frac{p}{x}\ln^{p-1}(x).$$
Enfin,
$$u(x)v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln^p(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$
(par croissance comparée, car $n+1>0$ pour $n \in \mathbb{N}$), donc le théorème d'intégration par parties s'applique, et comme on sait que l'intégrale
$$I_{n,p} = \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$
converge, on en déduit que l'intégrale
$$\int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{p}{x}\ln^{p-1}(x)\mathrm{d}x$$
converge, et de plus on a
$$I_{n,p} = \underbrace{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln^p(x)\right]_0^1}_{=0-0} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{p}{x}\ln^{p-1}(x)\mathrm{d}x = -\frac{p}{n+1}I_{n,p-1}.$$
Par récurrence directe sur $p \in \mathbb{N}$ (à $n \in \mathbb{N}$ fixé), on en déduit
$$I_{n,p} = (-1)^p\frac{p!}{(n+1)^n}I_{n,0}$$
pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Or, $I_{n,0} = \int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n,n} = (-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$
Donc
$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}I_{n,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \underset{k=n+1}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}.$$

Exercice 19. 1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(t)$ existe (car n^2+1 ne s'annule pas), et $|u_n(t)| \leq \frac{1}{n^2+1}$ car $e^{-nt^2} \leq 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq \|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2+1}.$$
Or, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+1}$ converge (par critère de comparaison des séries à termes positifs, car on a $0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$ et la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ qui converge (Riemann, $2>1$)), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0}\|u_n\|_\infty$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

En particulier, cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
Comme pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue (composition de la fonction exponentielle avec un polynôme, puis multiplication avec une constante), et que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$, le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique, et donne que la fonction f (la somme de cette série de fonctions) est continue sur $\mathbb{R}$.
2) $u_0 = 1$, donc la fonction u_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $u_0' = 0$, donc $\|u_0'\|_\infty = 0$.
Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ (à une constante près, c'est une exponentielle), et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$u_n'(t) = \frac{-2nt}{n^2+1} e^{-nt^2} \qquad \text{et} \qquad u_n''(t) = -\frac{2n}{n^2+1}\left(1 - 2nt^2\right)e^{-nt^2},$$

donc $u_n''(t)$ est du signe de $2nt^2 - 1$.
Donc la fonction u_n' est décroissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\sqrt{2n}}, +\infty\right[$.
Or, $\lim\limits_{t\to+\infty} u_n'(t) = 0$ (par croissance comparée, car $n \geq 1$) et $u_n'(0) = 0$, d'où le tableau de variations :

t	0		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
$u_n'(t)$		$-$	0	$+$	
$u_n(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Donc, pour $n \geq 1$,

$$\|u_n'\|_\infty = -u_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2n}}{n^2+1} e^{-\frac{1}{2}}}.$$

Remarque. Cette formule reste vraie pour $n = 0$.

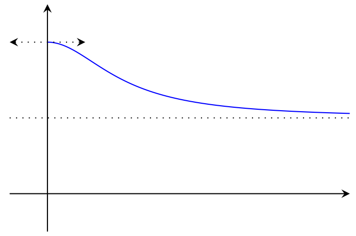
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Puis,

$$\|u_n'\|_\infty = \frac{\sqrt{2n}}{n^2+1} e^{-\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

pour $n \geq 1$ (et $\|u_0'\|_\infty = 0$, l'important est que u_0' soit bornée), et la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$), donc le critère d'équivalence des séries à termes positifs conclut : la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} \|u_n'\|_\infty$ converge, donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.
Comme enfin la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de dérivation termes à termes s'applique : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2nt}{n^2+1} e^{-nt^2}.$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, $f'(t) < 0$ pour $t > 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. De plus, $f'(0) = 0$, d'où une tangente horizontale à la courbe représentative de f en 0. Enfin, la fonction f est décroissante et positive, donc minorée par 0, donc admet une limite finie en $+\infty$ (par le théorème de la limite monotone), d'où une allure de courbe :



5) • Pour la limite :
Méthode 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

De plus, on a vu que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$ (cf. question 1). Comme « $+\infty$ est une borne de $\mathbb{R}$ », le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t\to+\infty} u_n(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 1.$$

Méthode 2 : le terme en $n = 0$ vaut 1 (ne dépend pas de t), et sinon on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq u_n(t) \leq e^{-nt^2}$$

(car $n^2 + 1 \geq 1$), ce qui donne (en sommant des inégalités dans le même sens, et car les séries convergent), pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:

$$1 = u_0(t) \leq u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = f(t) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-t^2}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-t^2}}$$

(car on reconnaît une série géométrique convergente, puisque de raison e^{-t^2}, et qu'on a toujours $e^{-t^2} \in]0,1[$ pour $t \neq 0$). Si on fait tendre $t \to +\infty$, le théorème des gendarmes donne la limite voulue.

• Pour l'intégrabilité, le plus simple est de repartir de l'inégalité de la méthode 2 :

Méthode 2 (suite) : on a vu, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$1 \leq f(t) \leq \frac{1}{1-e^{-t^2}}.$$

Cette majoration donne, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq g(t) \leq \frac{1}{1-e^{-t^2}} - 1 = \frac{e^{-t^2}}{1-e^{-t^2}}.$$

Or, la fonction f, donc la fonction g, est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+$, en particulier sur $[0,1]$.
Et comme

$$\frac{e^{-t^2}}{1-e^{-t^2}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

(par croissance comparée), et que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann, $2 > 1$), on en déduit par le théorème de convergence absolue par comparaison que la fonction g est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Autre majoration possible (variante de la méthode 2) : Pour tout $n \geq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-nt^2} \leq e^{-t^2}$, et donc

$$0 \leq f(t) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt^2}}{n^2+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{n^2+1} = K.e^{-t^2},$$

en notant $K = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (qui est un réel, car la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$ converge) (en fait, $K = f(0)$...), et on retrouve :

- $\lim\limits_{t\to+\infty} Ke^{-t^2} = 0$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{t\to+\infty} \big(f(t) - 1\big) = 0$,
- $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, par croissance comparée, donc $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et on conclut de même pour l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}_+$.

Méthode 1 (suite) pour 5/2 : si on ne veut pas faire de majoration, on utilise le théorème d'intégration terme à terme.

◇ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$, par croissance comparée (*et c'est là que* $n \geq 1$ *intervient*)).

◇ La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement vers la fonction $g = f - 1$ sur $\mathbb{R}_+$, qui est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.

◇ Il reste à justifier que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \int_0^{\infty} \big|u_n(t)\big| \mathrm{d}t$ converge. Faisons pour cela un changement de variable.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$t \mapsto t\sqrt{n}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur

$$\big[\lim_{t\to 0} t\sqrt{n}, \lim_{t\to+\infty} t\sqrt{n}\big[= [0,+\infty[.$$

Le théorème de changement de variable s'applique alors : on peut poser $u = t\sqrt{n}$ (et alors $\mathrm{d}u = \sqrt{n}\mathrm{d}t$). Comme l'intégrale

$$\int_0^\infty \big|u_n(t)\big|\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{e^{-nt^2}}{n^2+1}\mathrm{d}t$$

converge, on en déduit :

$$\int_0^\infty \big|u_n(t)\big|\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{n^2+1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}} = \frac{K}{(n^2+1)\sqrt{n}},$$

en notant $K = \int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u$, **qui ne dépend pas de** n. Alors

$$n^2\int_0^\infty \big|u_n(t)\big|\mathrm{d}t = \frac{Kn^2}{n^2+1}\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{donc} \qquad \int_0^\infty \big|u_n(t)\big|\mathrm{d}t = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2>1$) et est à termes positifs, donc le théorème de convergence absolue par comparaison conclut : la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1}\int_0^\infty \big|u_n(t)\big|\mathrm{d}t$ converge.

◇ Le théorème d'intégration terme à terme s'applique alors, et donne que la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (*et de plus, on a*

$$\int_0^\infty g(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-nt^2}}{n^2+1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^\infty \frac{K}{(n^2+1)\sqrt{n}},$$

mais cela ne sert à rien ici).

Remarque. On a $K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$...

6) Pour l'approximation, on veut encadrer $R_{100} = \sum\limits_{n=101}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ (puisque $f(0) - \sum\limits_{n=0}^{100}\frac{1}{n^2+1} = R_{100}$). Pour cela, on utilise une comparaison série/intégrale : pour $n\in\mathbb{N}$, pour $t\in[n,n+1]$, on a (car la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2+1}$ est clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+$) les inégalités :

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}.$$

Par croissance de l'intégrale (« les bornes sont dans le bon sens »), on a alors

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} = \int_n^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2+1}\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{n^2+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2+1}$$

En sommant l'inégalité de gauche de 100 à N (pour $N\in\mathbb{N}$ avec $N\geq 100$), on a par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=101}^{N+1}\frac{1}{k^2+1} \underset{k=n+1}{=} \sum_{n=100}^{N}\frac{1}{(n+1)^2+1} \leq \sum_{n=100}^{N}\int_n^{n+1}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \underset{\text{Chasles}}{=} \int_{100}^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1},$$

et si $N\to+\infty$ (comme la série et l'intégrale considérée convergent), on a

$$R_{100} \leq \int_{100}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$

Or, cette intégrale se calcule :

$$\int_{100}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = [\arctan(t)]_{100}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(100) = \arctan\left(\frac{1}{100}\right)$$

(car il est bien connu que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ si $x\in\mathbb{R}_+^*$...).

Or, arctan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, donc par inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\arctan(x) = \arctan(x) - \arctan(0) \leq 1 \times (x - 0) = x.$$

Donc

$$\arctan\left(\frac{1}{100}\right) \leq \frac{1}{100}, \qquad \text{puis} \qquad R_{100} \leq \frac{1}{100},$$

qui est bien ce que l'on voulait ($R_{100} \geq 0$ est direct).

Remarque. Ici, il y a une astuce qui permet d'aller beaucoup plus vite : pour tout $n \geq 101$, on a $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2-n}$, donc

$$0 \leq R_{100} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} = \sum_{n=101}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=101}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{101-1} - \frac{1}{N}\right)$$

par somme télescopique. C'est une astuce absolument pas trouvable par un élève normalement constitué.

Exercice 20. ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1+x}{n(1+x)}$ existe et $\frac{1+x}{n(1+x)} > 0$, donc $u_n(x)$ existe.
On a $\ln(1+u) = u + \underset{u \to 0}{O}(u^2)$, et $\frac{x}{n(1+x)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n(1+x)} + \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs. Donc, par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum\limits_{n \geq 1} \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument, donc converge.
Puis, la suite numérique $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante positive de limite nulle, donc par le critère des séries alternées, la série numérique $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, et, pour $x \geq 0$, en multipliant par la constante $\frac{x}{1+x}$ (qui existe car $1 + x \neq 0$), la série numérique $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x}{n(1+x)}$ converge.
Par addition, on en déduit que la série numérique $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(x)$ converge pour $x \in \mathbb{R}_+$.
Autre façon : on peut appliquer directement le critère des séries alternées, mais la vérification est moins directe. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la suite numérique $\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante (car $\frac{x}{1+x} \geq 0$) et minorée par 1 (idem). En composant par ln qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la suite numérique $\left(\ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par $\ln(1) = 0$, donc positive (donc la série de terme général $u_n(x)$ est alternée). Un calcul direct montre qu'elle tend vers 0 si $n \to +\infty$. Alors on peut appliquer le critère des séries alternées, et la série numérique $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(x)$ converge.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n|$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|u_n|'(x) = \frac{\frac{(1+x)-x}{n(1+x)^2}}{1 + \frac{x}{n(1+x)}} = \frac{1}{n(1+x)^2 + x(1+x)} \geq 0.$$

Donc la fonction $|u_n|$ est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $|u_n|(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} |u_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Donc

$$\|u_n\|_\infty = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} \|u_n\|_\infty = \sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

converge. Or, c'est une série à termes positifs,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

(car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, et que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$), et comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque.

1. **Autre façon :** on remarque, pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, que

$$0 \leq \left|u_n(x_0)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_0}{1+x_0}\frac{1}{n}.$$

   Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, et $\frac{x_0}{1+x_0} \neq 0$, donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{x_0}{1+x_0}\frac{1}{n}$ diverge. Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \left|u_n(x_0)\right|$ diverge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas absolument en x_0. Alors, en contraposant un résultat du cours, pour tout intervalle I contenant x_0 (donc en particulier pour $\mathbb{R}_+$), la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne peut pas converger normalement sur I.

2. Le critère des séries alternées nous donne aussi que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, si l'on note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ le reste d'ordre n de la série de fonctions considérée, alors

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \|u_{n+1}\|_\infty.$$

   C'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc

$$\|R_n\|_\infty \leq \|u_{n+1}\|_\infty = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   donc il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$. C'était sans doute la suite de l'exercice.

Exercice 21. • Remarquons déjà que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n + n^3x^2 \geq n > 0$, donc $f_n(x)$ existe.
• Pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3x^2}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3x^2}$ est une série de Riemann convergente, car $3 > 1$, à termes positifs, donc par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge. D'où la convergence simple sur $\mathbb{R}^*$.
• Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f_n'(x) = \frac{-2n^3x}{(n+n^3x^2)^2},$$

donc $f_n' < 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction f_n est décroissante (strictement) sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \frac{1}{n},$$

on en déduit

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \frac{1}{n}.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ **ne** converge **pas** normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Soit ensuite $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, on a $0 < a \leq x \leq b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme la fonction f_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$f_n(a) \geq f_n(x) \geq 0.$$

Donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leq f_n(a)$$

(*en fait, il y a égalité*). Comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(a)$ converge (vu au début de l'exercice, **car** $a > 0$), la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique, et donne que la fonction $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par « caractère local » de la continuité.

Exercice 22. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n : t \mapsto \ln\left(1 + e^{-nt}\right).$$

La fonction u_n est bien définie sur $\mathbb{R}$, car la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$.
   Si $t = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(1 + e^{-n\cdot 0}) = \ln(2)$ qui ne tend pas vers 0 si $n \to +\infty$, donc qui est le terme d'une série grossièrement divergente.
   Si $t < 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

   $$\ln\left(1 + e^{-nt}\right) \geq \ln(2) > 0$$

   donc là encore, on a divergence grossière (*l'expression* $\ln(1 + e^{-nt})$ *ne peut pas tendre vers* 0 *si* $n \to +\infty$).
   Si $t > 0$, on a

   $$\ln(1 + e^{-nt}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-nt} = (e^{-t})^n$$

   (car $e^{-nt} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (e^{-t})^n$ est une série géométrique de raison e^{-t}, convergente car $e^{-t} \in]-1, 1[$ (car $t > 0$), et à termes positifs. Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 + e^{-nt}\right)$ converge, autrement dit $S(t)$ existe.
   On a donc

   $$\boxed{D_S = \mathbb{R}_+^*}.$$

2. **Méthode 1 : Une approche directe.**
   Soit $(t_0, t_1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, supposons $t_0 > t_1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-nt_0 < -nt_1$, et donc par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

   $$e^{-nt_0} < e^{-nt_1},$$

   puis par stricte croissance du logarithme

   $$u_n(t_0) = \ln\left(1 + e^{-nt_0}\right) < \ln\left(1 + e^{-nt_1}\right) = u_n(t_1)$$

   (*ce que l'on aurait pu obtenir en étudiant les variations de* u_n *grâce au signe de sa dérivée...*). Donc (par sommation d'inégalités dans le même sens), pour tout $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$,

   $$\sum_{n=2}^{N} u_n(t_0) < \sum_{n=2}^{N} u_n(t_1).$$

En faisant tendre $N \to +\infty$ (les séries considérées convergent, grâce à la question 1 et car $t_0 > 0$, $t_1 > 0$), on en déduit

$$S(t_0) - u_1(t_0) = \sum_{n=2}^{\infty} u_n(t_0) \leq \sum_{n=2}^{\infty} u_n(t_1) = S(t_1) - u_1(t_1)$$

(en effet, à la limite une inégalité stricte devient large). Enfin, $u_1(t_0) < u_1(t_1)$, donc par addition d'inégalités dans le même sens,

$$S(t_0) = \big(S(t_0) - u_1(t_0)\big) + u_1(t_0) < \big(S(t_1) - u_1(t_1)\big) + u_1(t_1) = S(t_1).$$

Donc la fonction S est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 2 : On cherche les variations de S par l'étude de S'.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u_n'(t) = \frac{-ne^{-nt}}{1 + e^{-nt}}.$$

• Pour tout $a > 0$, pour tout $t \in [a, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|u_n'(t)\right| = \frac{ne^{-nt}}{1 + e^{-nt}} \leq ne^{-nt} \leq ne^{-na}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq ne^{-na},$$

puis

$$0 \leq n^2\|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq n^3 e^{-na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (**car** $a > 0$), donc le théorème des gendarmes donne

$$\|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2 > 1$) et est à termes positifs, donc par théorème de convergence absolue par comparaison, la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} \|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$.

• Le théorème de dérivation terme à terme s'applique alors et donne que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc par caractère local de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^1$ », sur $\bigcup_{a>0}[a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$, et de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nt}}{1 + e^{-nt}} < 0.$$

Donc la fonction S est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

3. **Méthode 1 :** • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{t\to+\infty} u_n(t) = \ln(1) = 0$ par continuité de la fonction ln en 1.

   • Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $-nt \leq -n$, donc par croissance et positivité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$,

$$0 \leq e^{-nt} \leq e^{-n} \qquad \text{puis} \qquad 1 \leq 1 + e^{-nt} \leq 1 + e^{-n}.$$

   Enfin, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit

$$0 = \ln(1) \leq \ln\left(1 + e^{-nt}\right) = u_n(t) \leq \ln\left(1 + e^{-n}\right) = u_n(1)$$

   (en fait, on a directement ceci en exploitant que la fonction u_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque $u_n' \leq 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$). Donc

$$0 \leq \|u_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq u_n(1).$$

Or, la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n(1)$ converge (cf. question 1, car $1>0$), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$.
• Enfin, « $+\infty$ est une borne de $[1,+\infty[$ ».
• Donc le théorème de la double limite s'applique, et donne

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = \lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to+\infty} u_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \boxed{0}.$$

Méthode 2 : par inégalité.
Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$0\leq \ln\left(1+e^{-nt}\right)\leq e^{-nt}$$

(car $e^{-nt}>0>-1$, et que l'on sait, pour tout $u>-1$, que $\ln(1+u)\leq u$), alors en sommant des inégalités dans le même sens (et car les séries qui interviennent convergent), on a

$$0=\sum_{n=1}^{\infty} 0 \leq S(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc le théorème des gendarmes conclut :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} S(t)=0}.$$

4. Là encore, plusieurs façons de faire :
Première façon :
• La fonction S est continue sur $[1,+\infty[$ (car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $[1,+\infty[$, et on a vu que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ convergeait normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$).
• Pour tout $t\in[1,+\infty[$, on a

$$0\leq S(t)\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}},$$

or la fonction $t\mapsto \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (continue et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ si $t\to+\infty$, par croissance comparée), donc la fonction S aussi.
Deuxième façon (pour 5/2) : on peut sinon utiliser le théorème d'intégration terme à terme.
★ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\left|u_n(t)\right| = \left|\ln\left(1+e^{-nt}\right)\right| = \ln\left(1+e^{-nt}\right)\leq e^{-nt}$$

(déjà vu), et la fonction usuelle $t\mapsto e^{-nt}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (car $n>0$). Alors, par critère de comparaison, on en déduit que la fonction u_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
★ La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[1,+\infty[$ vers la fonction S, et la fonction S est continue (par morceaux), car en fait la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ est normale, donc uniforme, sur $[1,+\infty[$ (déjà vu) et car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue.
★ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t = \int_1^{\infty} \ln\left(1+e^{-nt}\right)\mathrm{d}t \underset{u=e^{-nt} \text{ qui est } \mathcal{C}^1 \text{ bijectif}}{=} \int_0^{e^{-n}} \frac{\ln(1+u)}{nu}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{e^{-n}} \overbrace{\frac{\ln(1+u)}{u}}^{\leq u}\mathrm{d}u \leq \frac{e^{-n}}{n}\leq e^{-n}$$

et la série numérique $\sum_{n\geq 1} e^{-n}$ converge, puisque c'est une série géométrique de raison e^{-1} avec $e^{-1} \in]-1,1[$.
Donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \int |u_n|$ est convergente.

★ Ainsi d'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction S est intégrable sur $[1,+\infty[$ (et on a aussi l'égalité $\int_1^\infty S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^\infty \ln\left(1+e^{-nt}\right)\mathrm{d}t$, qui ne sert à rien ici).

5. • Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\phi_t : u \mapsto \ln\left(1+e^{-ut}\right)$$

qui est une fonction continue et décroissante (comme à la question 2) sur $\mathbb{R}_+$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $u \in [k,k+1]$:

$$\phi_t(u) \leq \phi_t(k),$$

et pour tout $u \in [k-1,k]$,

$$\phi_t(k) \leq \phi_t(u).$$

Alors, par croissance de l'intégrale sur $[k,k+1]$ pour la première inégalité, sur $[k-1,k]$ pour la seconde (les bornes « étant bien dans le bon sens »), on a :

$$\int_k^{k+1} \phi_t(u)\mathrm{d}u \leq \int_k^{k+1} \phi_t(k)\mathrm{d}u = \phi_t(k) = u_k(t) = \phi_t(k) = \int_{k-1}^{k} \phi_t(k)\mathrm{d}u \leq \int_{k-1}^{k} \phi_t(u)\mathrm{d}u$$

En sommant les inégalités (et par la relation de Chasles) pour k variant de 1 à n (pour $n \in \mathbb{N}^*$), on a :

$$\int_1^{n+1} \phi_t(u)\mathrm{d}u \underset{\text{Chasles}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \phi_t(u)\mathrm{d}u \leq \sum_{k=1}^{n} u_k(t) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \phi_t(u)\mathrm{d}u \underset{\text{Chasles}}{=} \int_0^n \phi_t(u)\mathrm{d}u$$

Puis, la fonction ϕ_t est continue sur $[0,+\infty[$, et pour tout $u \in [0,+\infty[$, on a

$$0 \leq \phi_t(u) \leq e^{-tu}.$$

Or, la fonction $u \mapsto e^{-tu}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (car $t>0$), donc par critère de comparaison, la fonction ϕ_t est intégrable sur $[0,+\infty[$. On peut donc passer à la limite pour $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente :

$$\int_1^{\infty} \phi_t(u)\mathrm{d}u \leq S(t) \leq \int_0^{\infty} \phi_t(u)\mathrm{d}u$$

• Calcul de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \phi_t(u)\mathrm{d}u$:
On effectue le changement de variable $v = e^{-tu}$: la fonction

$$u \mapsto e^{-tu}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,n]$, on a « $\mathrm{d}v = -te^{-tu}\mathrm{d}u$ » donc « $\frac{-\mathrm{d}v}{tv} = \mathrm{d}u$ ». D'où le théorème de changement de variable donne :

$$\int_0^n \phi_t(u)\mathrm{d}u = \int_1^{e^{-tn}} \frac{\ln(1+v)}{tv}(-1)\mathrm{d}v = \frac{1}{t}\int_{e^{-tn}}^{1} \frac{\ln(1+v)}{v}\mathrm{d}v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{C}{t}$$

en notant

$$C = \lim_{y\to 0} \int_y^1 \frac{\ln(1+v)}{v}\mathrm{d}v = \int_0^1 \frac{\ln(1+v)}{v}\mathrm{d}v$$

(qui existe car la fonction $v \mapsto \frac{\ln(1+v)}{v}$ est continue sur $]0,1]$, et se prolonge par continuité en 0 car $\ln(1+v) \underset{v\to 0}{\sim} v$). D'autre part, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \phi_t(u)\mathrm{d}u \leq \ln(2)$$

par croissance de l'intégrale (car $0 \leq \ln\left(1+e^{-ut}\right) \leq \ln(2)$ pour tout $u \in [0,1]$). On a donc par relation de Chasles :

$$\frac{C}{t} - \ln(2) \leq \int_1^{\infty} \phi_t(u)\mathrm{d}u \leq S(t) \leq \frac{C}{t}$$

On a donc
$$\frac{C}{t} - \ln(2) \leq S(t) \leq \frac{C}{t}$$
pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, et comme $\frac{1}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, le théorème des gendarmes donne
$$\boxed{S(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{C}{t}},$$
si on prouve $C \neq 0$.
Or, la fonction $v \mapsto \frac{\ln(1+v)}{v}$ est continue positive et n'est pas la fonction nulle sur $]0,1]$, son intégrale converge sur $]0,1]$, donc par stricte positivité de l'intégrale, on en déduit que $C > 0$.
Puis, la fonction $t \mapsto \frac{C}{t}$ est positive sur $]0,1]$, d'intégrale divergente car $C \neq 0$ (Riemann), donc par critère d'équivalence on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t$ diverge.
Donc S n'est pas intégrable en 0.

Remarque. On peut calculer C en développant en série entière la fonction ln puis en utilisant le théorème d'intégration terme à terme. On arrive à
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+v)}{v}\mathrm{d}v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 23. On peut supposer $r \in]-1,1[$ au lieu de $0 \leq r < 1$ pour les quatre premières questions, c'est ce que je vais faire dans la correction (il y aura juste $|r|$ au lieu de r à certaines majorations...).
1) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n : x \in]-1,1[\mapsto \frac{x^n}{n}.$$
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$$|u_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right| \leq |x|^n$$
et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x|$, convergente car $|x| \in]-1,1[$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. Donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$,
$$u_n'(x) = x^{n-1}.$$
• Soit $a \in [0,1[$. Pour tout $x \in [-a,a]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|x| \leq a$, puis
$$\left|u_n'(x)\right| = |x^{n-1}| = |x|^{n-1} \leq a^{n-1},$$
et donc
$$0 \leq \|u_n'\|_{\infty,[-a,a]} \leq a^{n-1}.$$
Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a^{n-1}$ est une série géométrique de raison a, convergente car $a \in]-1,1[$, donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|u_n'\|_{\infty,[-a,a]}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.
• Le théorème de dérivation terme à terme s'applique alors, et donne que la fonction $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$, pour tout $a \in [0,1[$, donc par caractère local de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^1$ », sur $\bigcup_{a\in[0,1[}[-a,a] =]-1,1[$.
De plus, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Donc les fonctions f et $x \mapsto -\ln(1-x)$ sont deux primitives de f' sur l'intervalle $]-1,1[$, donc il existe $K \in \mathbb{R}$ avec

$$f : x \mapsto -\ln(1-x) + K.$$

Or, $f(0) = 0$, donc $K = 0$, et donc pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\boxed{f(x) = -\ln(1-x)}.$$

2) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |r^n \sin(n\theta)| \leq |r|^n$$

et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} |r|^n$ est une série géométrique de raison $|r|$, convergente car $|r| \in]-1,1[$. Donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n \sin(n\theta)$ converge absolument, donc converge.

On peut donc définir

$$g : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\theta) \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |r^n e^{in\theta}| \leq |r|^n,$$

donc de même, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n e^{in\theta}$ converge absolument, donc converge.

Puis, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin(n\theta) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(re^{i\theta}\right)^n\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right)$$

en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison $re^{i\theta}$, (absolument) convergente car $\left|re^{i\theta}\right| = |r| < 1$.
Donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, en multipliant/divisant par le conjugué du dénominateur,

$$g(\theta) = \operatorname{Im}\left(\frac{1-re^{-i\theta}}{\left(1-r\cos(\theta)\right)^2 + r^2\sin^2(\theta)}\right) = \boxed{\frac{r\sin(\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta)}}.$$

3) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \left|r^n \frac{\cos(n\theta)}{n}\right| \leq |r|^n,$$

donc de même qu'à la question 2, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge absolument, donc converge.

On peut donc définir

$$\phi : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos(n\theta)}{n} \in \mathbb{R}.$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n : \theta \in \mathbb{R} \mapsto r^n \frac{\cos(n\theta)}{n} \in \mathbb{R}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction v_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$v_n'(\theta) = -r^n \sin(n\theta).$$

- On a vu, au début de la correction de cette question, que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|v_n'(\theta)\right| = \left| -r^n \sin(n\theta)\right| \leq |r|^n,$$

donc

$$0 \leq \|v_n'\|_\infty \leq |r|^n.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |r|^n$ converge (déjà vu), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|v_n'\|_\infty$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

• Le théorème de dérivation terme à terme s'applique alors : la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\phi'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} -r^n \sin(n\theta) = 0 - g(\theta) = -\frac{r\sin(\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta)}$$

(le 0 correspond au terne $n = 0$ de la somme définissant g).
Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ avec

$$\phi : \theta \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2r\cos(\theta) + r^2\right) + K$$

(*on a reconnu une forme du type* $\frac{u'}{u}$ *à constante près, que l'on sait donc primitiver directement*).
Comme $\phi(0) = -\ln(1-r)$ par la question 1 (car $r \in]-1, 1[$), on a

$$K = \frac{1}{2}\ln\left((1-r)^2\right) - \ln(1-r) = 0.$$

Donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\phi(\theta) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2r\cos(\theta) + r^2\right)}.$$

4) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction v_n est continue sur $[0, 2\pi]$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a

$$\left|v_n(\theta)\right| \leq \frac{|r|^n}{n} \leq |r|^n,$$

donc

$$\|v_n\|_{\infty,[0,2\pi]} \leq |r|^n.$$

Or, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |r|^n$ converge (déjà vu), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|v_n\|_{\infty,[0,2\pi]}$ converge, autrement dit la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$.

• Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment s'applique alors :

$$\int_0^{2\pi} \phi(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} v_n(\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r^n}{n}\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\left[\frac{\sin(n\theta)}{n}\right]_0^{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2r\cos(\theta) + r^2\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} -2\phi(\theta)\mathrm{d}\theta = -2 \times 0 = \boxed{0}.$$

5) Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| > 1$. L'idée est de mettre r^2 en facteur dans le ln : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\ln\left(1 - 2r\cos(\theta) + r^2\right) = \ln(r^2) + \ln\left(1 - 2\frac{1}{r}\cos(\theta) + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right)$$

(donc l'expression de gauche existe et a une intégrale convergente sur $[0, 2\pi]$, puisque c'est le cas pour celle de droite par ce qui précède, puisque $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$), puis la linéarité de l'intégrale donne alors

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2r\cos(\theta) + r^2\right)\mathrm{d}\theta = \ln(r^2)2\pi + \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2\frac{1}{r}\cos(\theta) + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right)\mathrm{d}\theta = \ln(r^2)2\pi = \boxed{4\pi\ln|r|}.$$

Exercice 24. 1) Relire son cours !

2a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors u_n est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ (en effet, pour $x > 0$ et $n \geq 0$, on a $x + n > 0$).

De plus, pour $x > 0$ fixé, la suite $\big(u_n(x)\big)$ est alternée car $\frac{1}{x+n} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et la suite $\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle, donc le critère des séries alternées s'applique. On obtient alors la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$, donc l'existence de $f(x)$ (pour $x > 0$), donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, ce critère nous donne que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ (et pour tout $x > 0$), $\left|\sum\limits_{n=N}^{\infty} u_n(x)\right| \leq |u_N(x)| = \frac{1}{x+N} \leq \frac{1}{N}$.

Or, $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N} = 0$, et « $\frac{1}{N}$ ne dépend pas de x », donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a donc la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, par le théorème de continuité des séries de fonctions, on en déduit que f est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2b) Pour tout $x > 0$, on a $u_0(x) = \frac{1}{x}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1}(x) = -\frac{(-1)^k}{x+k+1}$. Donc l'égalité s'obtient en isolant le terme $n = 0$ dans la somme définissant $f(x)$, puis en faisant le changement d'indice $n = k + 1$: pour $x > 0$,

$$f(x) = u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{n=k+1}{=} u_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+1}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{(-1)^k}{x+k+1} = \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}.$$

3) Pour tout $x > 0$, on a $2f(x) = f(x) + f(x)$, or d'après la définition, on a $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, et d'après la question précédente, on a aussi $f(x) = \frac{1}{x} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} -\frac{(-1)^k}{x+k+1}$.

En additionnant ces deux égalités, on obtient

$$2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} - \frac{(-1)^k}{x+k+1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}.$$

4) Soit $x > 0$. De même qu'à la question 2a, la série $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$ est une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère des séries alternées, donc on obtient l'inégalité $\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}\right| \leq \left|\frac{(-1)^0}{(x+0+1)(x+0)}\right| = \frac{1}{x(x+1)}$

Or, $\frac{1}{x(x+1)} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \to +\infty$, donc (par le théorème des gendarmes), on a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \to +\infty$, et donc la question précédente donne $2f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, soit $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$.

5) Notons pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{(-1)^k}{x+k+1}$. Alors f_k est continue sur $[0, +\infty[$, comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ (en effet, pour $x \geq 0$ et $k \geq 0$, on a $x + k + 1 \geq 1 > 0$).

De plus, à $x \geq 0$ fixé, la série $\sum\limits_{k\geq 0} f_k(x)$ est alternée et vérifie le critère des séries alternées, et on a alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=N}^{\infty} f_k(x)\right| \leq |f_N(x)| = \frac{1}{x+k+1} \leq \frac{1}{k+1}.$$

Et comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0$, on en déduit que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} f_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, $\phi : x \mapsto \sum\limits_{k=N}^{\infty} f_k(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0^+} \phi(x) = \phi(0)$, soit $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \in \mathbb{R}$. Mais, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \to 0^+$.

De la question 2b on déduit alors $\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}}$.

6) Fixons $x > 0$. Remarquons que l'intégrale proposée converge, car $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $]0, 1]$, et $\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, et que $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (comme intégrande d'une intégrale de Riemann, avec $1 - x < 1$ puisque $x > 0$).

Pour tout $t \in [0,1[$, on a $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$ (série géométrique de raison t avec $t \in]-1,1[$), donc pour tout $t \in]0,1[$ (j'exclus 0 car 0^{x-1} n'existe pas pour tout x...), on a $\frac{t^{x-1}}{1+t} = t^{x-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{x+n-1}$. Par conséquent, $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{x+n-1}\mathrm{d}t$.

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 (-1)^n t^{x+n-1}\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 t^{x+n-1}\mathrm{d}t = (-1)^n \left[\frac{t^{x+n}}{x+n}\right]_0^1 = \frac{(-1)^n}{x+n}$, par conséquent $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 t^{x+n-1}\mathrm{d}t$.

On aura bien l'égalité voulue si on justifie l'interversion série/intégrale. Problème : les deux théorèmes vus en PC ne s'appliquent pas directement ici ! (celui avec la convergence uniforme ne peut pas s'appliquer, car on n'est pas sur un segment, vu que la série diverge en $t = 1$, ou à cause du problème de définition en $t = 0$, et pour l'autre théorème, c'est l'hypothèse sur la convergence de la série des intégrales des modules qui n'est pas vérifiée...).

Première idée : on introduit $\phi : y \in]0,1] \mapsto \int_0^y \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$. Comme $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ converge, on a ϕ qui est bien définie, et $\phi(y) \underset{y\to 1^-}{\longrightarrow} \phi(1)$.

Soit alors $y \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto (-1)^n t^{x+n-1}$ est continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$ car en valeur absolue c'est l'intégrande d'une intégrale de Riemann, avec $1-x-n < 1$ puisque $x > 0$ et $n \geq 0$.

De plus, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{x+n-1}$ converge pour $t \in]0,1[$, et $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{x+n-1} = \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $]0,1[$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \int_0^y |(-1)^n t^{x+n-1}|\mathrm{d}t = \frac{y^{x+n}}{x+n} \leq \frac{y^x}{x}y^n$, or la série $\sum_{n\geq 0}\frac{y^x}{x}y^n$ converge (série géométrique de raison y avec $y \in]0,1[$), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, on a $\sum_{n\geq 0}\int_0^y |(-1)^n t^{x+n-1}|\mathrm{d}t$ qui converge.

Le théorème d'interversion série/intégrale vu en fin d'année s'applique et donne alors : pour tout $y \in]0,1[$, $\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^y t^{x+n-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{x+n}}{x+n}$.

Notons alors $\psi : y \in]0,1] \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{x+n}}{x+n}$ (ainsi on a $\psi(y) = \phi(y)$ pour $y \in]0,1[$, et on veut montrer $\psi(1) = \phi(1)$).

La suite $\left(\frac{y^{x+n}}{x+n}\right)$ est décroissante (pour $y \in]0,1]$, sinon c'est faux) et tend vers 0, donc on peut appliquer le critère des séries alternées, et donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{x+n}}{x+n}\right| \leq \frac{y^{x+N}}{x+N} \leq \frac{1}{N}$ (car $x \geq 0$ et $y \in]0,1]$). Or, $\frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la série de fonctions de somme ψ est uniformément convergente sur $]0,1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y \mapsto (-1)^n \frac{y^{x+n}}{x+n}$ est continue, donc ψ est continue sur $]0,1]$. Par conséquent, $\psi(1) = \lim_{y\to 1^-}\psi(y) = \lim_{y\to 1^-}\phi(y) = \phi(1)$, et on a l'égalité désirée.

Deuxième idée : notons pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N : t \in]0,1[\mapsto \sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{x+n-1}$. Alors (en reprenant la démonstration du critère des séries alternées), pour tout $t \in]0,1[$, on a $\big(S_{2N}(t)\big)_{N\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante et $\big(S_{2N+1}(t)\big)_{N\in\mathbb{N}}$ qui est croissante, et ces deux suites sont adjacentes et convergent vers $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{x+n-1} = \frac{t^{x-1}}{1+t}$. Par conséquent, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $S_1(t) \leq S_{2N+1}(t) \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq S_{2N}(t) \leq S_0(t)$.

On en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $t^{x-1} - t^x = S_1(t) \leq S_N(t) \leq S_0(t) = t^{x-1}$, soit (pour $t \in]0,1[$) $0 \leq t^{x-1}\big(1-t\big) \leq S_N(t) \leq t^{x-1}$, et par conséquent, $|S_N(t)| \leq t^{x-1}$. Or, $t \mapsto t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (Riemann, car $x > 0$), donc on a « domination ». De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$, S_N est continue (donc continue par morceaux) sur $]0,1[$. Enfin, pour $t \in]0,1[$, $\lim_{N\to+\infty} S_N(t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$ et $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $]0,1[$.

Par le théorème de convergence dominée, on en déduit :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} S_N(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 S_N(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{x+n-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \int_0^1 t^{x+n-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{x+n}$ (par linéarité de

l'intégrale), et donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_0^1 S_N(t)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n} = f(x)$.
On en déduit bien (par unicité de la limite) : $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.