Chapitre 4 - Suites et séries de fonctions

But :

- définir la notion de limite pour une suite de fonctions
- utiliser cette notion pour construire des théorèmes d'inversion

1 Modes de convergence

1.1 Convergences pour les suites

Définition : Convergence simple

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soit f une fonction définie sur le même intervalle. (f_n) converge simplement vers f sur I si :

$$\forall t \in I,\ f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t).$$

Exemples :

- $f_n : t \mapsto t^n$ (limite pas $\mathcal{C}^0$)
- $g_n : t \mapsto \begin{cases} (n+1)t^n & \text{si } t<1 \\ 0 & \text{si } t=1 \end{cases}$ (interversion avec l'intégrale ne fonctionne pas)

Définition : Convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soit f une fonction définie sur le même intervalle. (f_n) converge uniformément vers f sur I si :

- la différence $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang
- $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Remarques :

- La convergence uniforme est donc la convergence dans l'espace des fonctions bornées sur I muni de la norme infinie.
- Avec des quantificateurs, la convergence simple s'écrit :

$$\forall t \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \epsilon.$$

La convergence uniforme quant à elle s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall t \in I, \forall n \geqslant N,\ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \epsilon.$$

Exemples :

- Les deux exemples précédents ne convergent pas uniformément
- $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, t \mapsto \frac{t}{n^2}\mathrm{e}^{-t/n}$ converge uniformément vers 0.

Proposition

La convergence uniforme implique la convergence simple.

1.2 Convergences pour les séries

Définition : Convergence simple

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soit f une fonction définie sur le même intervalle. $\sum f_n$ converge simplement vers f sur I si :

$$\forall t \in I,\ \sum_{k=0}^{n} f_k(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t).$$

Définition : Convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soit f une fonction définie sur le même intervalle. $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur I si :

- la différence $\sum_{k=0}^n f_k - f$ est bornée à partir d'un certain rang
- $\|\sum_{k=0}^n f_k - f\|_\infty \to 0$.

Remarque : Ce sont les mêmes définitions que pour une suite de fonctions mais transposées à la suite des sommes partielles. Cependant, ces définitions sont souvent moins pratiques à utiliser pour les séries.

Définition : Convergence normale

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soit f une fonction définie sur le même intervalle. $\sum f_n$ converge normalement vers f sur I si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Proposition

- La convergence normale entraine la convergence absolue en tout point.
- La convergence normale entraine la convergence uniforme.

Remarque : Et donc la convergence normale entraine la convergence simple.

Démonstration : ***À faire en cours*** □

Exemples :

- $t \mapsto \sum t^n$ converge normalement sur tout $[0,q]$ avec $q \in [0,1[$ mais pas pour $q=1$
- $\sum \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur tout $[a,+\infty[$ avec $a>1$.
  Remarque : Pour montrer la convergence normale, on peut chercher à majorer $|f_n(t)| \leqslant u_n$ avec $\sum u_n$ convergente.
- Que dire de $\sum f_n$ avec $f_n : t \mapsto \frac{t}{n^2}\mathrm{e}^{-t/n}$. Convergence normale sur $\mathbb{R}_+$? simple ? normale sur $[0,a]$? uniforme sur $\mathbb{R}_+$? (considérer $R_n(n) - R_{2n}(n)$)
- $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ mais pas normalement.

2 Théorèmes d'interversion et de régularité

2.1 Interversion avec une limite, continuité

Théorème : continuité de la limite pour les suites

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I. Soit f une fonction définie sur I.
Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I
- f_n converge uniformément vers f sur I ;

alors f est continue sur I.

Démonstration : ***À faire en cours*** □

Remarque : En pratique, on peut uniquement vérifier la convergence uniforme sur tout segment.

Exemple : $f_n : t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{1}{n}}}$.

Théorème : double limite pour les séries

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I. Soit $a \in I$ (ou éventuellement au bord de I).
Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a
- $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur I ;

alors :

- la série $\sum \ell_n$ est convergente
- la somme de la série admet une limite en a
- le passage à la limite et la sommation peuvent être intervertis :

$$\lim_{t\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{t\to a} f_n(t).$$

Démonstration : *Hors-programme* □

Exemples :

- Calculer la limite $\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+x}$.
- Calculer la limite $\lim_{x\to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x}$.
- Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.

Théorème : continuité de la limite pour les séries

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I.
Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I
- $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur I ;

alors S est continue sur I.

Démonstration : *Se déduit des théorèmes précédents.* □

Remarque : En pratique, on peut uniquement vérifier la convergence uniforme sur tout segment.

Exemple : ζ définie sur $]1,+\infty[$ par $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est continue.

2.2 Interversion avec une intégrale sur un segment

Théorème : interversion limite-intégrale, cas d'un segment

Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur I. Soit f une fonction continue définie sur I.
Si :

- I est un segment de la forme $[a,b]$;
- f_n converge uniformément vers f sur I

alors :

$$\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

Démonstration : ***Non faite*** □

Remarque : On peut interpréter ce résultat comme une comparaison entre $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.
Exemple : Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^a \frac{1-x^n}{1+x} \mathrm{d}x$ pour $a \in [0,1[$.

Théorème : interversion série-intégrale, cas d'un segment

Soit $\sum f_n$ une séries de fonctions continues définies sur I. Soit S une fonction continue sur I.
Si :

- I est un segment de la forme $[a,b]$;
- f_n converge uniformément vers S sur I

alors $\sum \int_a^b f_n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Démonstration : ***Non faite*** □

Exemple : Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a x^n \mathrm{d}x$ pour $a \in [0,1[$. En déduire la somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

2.3 Interversion avec une dérivée, dérivabilité continue

Théorème : Cas $\mathcal{C}^1$ pour une suite

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soit f et g deux fonctions définies sur I.
Si :

- pour tout entier n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- la suite (f_n) converge simplement vers f sur I ;
- la suite (f_n') converge uniformément vers g sur I ;

alors :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
- $f' = g$ c'est-à-dire : $(\lim f_n)' = \lim(f_n')$.

Démonstration : ***Non faite*** □

Théorème : Cas $\mathcal{C}^1$ pour une série

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et soit S et T deux fonctions définies sur I.
Si :

- pour tout entier n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I ;
- $\sum f_n'$ converge uniformément vers T sur I ;

alors :

- S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
- $S' = T$ c'est-à-dire : $(\sum f_n)' = \sum(f_n')$.

Démonstration : ***Non faite*** □

Remarque : En pratique, on peut uniquement vérifier la convergence uniforme sur tout segment.

Exemple : Montrer que la fonction ζ définie précédemment est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.

Théorème : Cas $\mathcal{C}^k$ pour une suite

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et soient g_0, ..., g_k $k+1$ fonctions définies sur I.
Si :

- pour tout entier n, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- pour tout entier $i \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(i)})$ converge simplement vers g_i sur I ;
- la suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers g_k sur I ;

alors :

- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pout tout $i \in [\![1, k]\!]$, $f^{(i)} = \lim f_n^{(i)}$.

Théorème : Cas $\mathcal{C}^k$ pour une série

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et soient S_0, ..., S_k $k+1$ fonctions définies sur I.
Si :

- pour tout entier n, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- pour tout entier $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(i)}$ converge simplement vers S_i sur I ;
- la suite $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément vers S_k sur I ;

alors :

- S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pout tout $i \in [\![1, k]\!]$, $S^{(i)} = \sum f_n^{(i)}$.