
QUINZAINE DU 13/10 AU 07/11

1 Contenu du cours

Chapitre 3 - Normes (TD)

...

Chapitre 4 - Suites et séries de fonctions (cours et TD)

1. Modes de convergence

Convergence simple pour les suites de fonctions, la continuité ou calculs d'intégral ne sont pas nécessairement compatibles avec cette notion de limite, convergence uniforme, la convergence uniforme implique la convergence simple, convergence simple pour les séries, convergence uniforme pour les séries, convergence normale, exemples.

2. Théorèmes d'interversion et de régularité

Continuité de la limite uniforme, théorème de la double limite pour les séries, continuité de la limite uniforme pour les séries, interversion limite-intégrale sur un segment, interversion série-intégrale sur un segment, interversion limite-dérivée, généralisation à \mathcal{C}^k .

Chapitre 5 - Réduction (cours)

1. Éléments propres

Définition valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres, spectre, pour les matrices et les endomorphismes, propriétés élémentaires, les sous-espaces propres sont stables, les sous-espaces propres sont en somme directe, toute famille finie de vecteurs de sous-espaces distincts est libre, lien matrices-endomorphismes.

2. Polynôme caractéristique

Définition ($\chi_M(t) = \det(tI_n - M)$), lien avec la similitude, lien avec le spectre, coefficients de degré n , $n-1$ et 0 , cas $n=2$, multiplicité des valeurs propres, liens avec la dimension des sous-espaces propres.

3. Diagonalisabilité

Définition pour les matrices et les endomorphismes, quelques exemples élémentaires, diagonalisabilité et sous-espaces propres, les projecteurs et symétries sont diagonalisables,... (**à suivre**)

2 Questions de cours

1. **Exemple** : Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$ (on admettra que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$).
2. **Exemple** : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1-x^n}{1+x} dx$ pour $a \in [0, 1[$.
3. **Exemple** : Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a x^n dx$ pour $a \in [0, 1[$. En déduire la somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
4. **Exemple** : Montrer que la fonction ζ définie par $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$ est \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$.
5. **Exemple** : Déterminer le spectre suivant le corps \mathbb{K} choisi de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6. **Exemple** : Déterminer tous les éléments propres (spectre et espaces propres) de $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.