Correction DM 2 - Compléments d'algèbre linéaire

Problème 1 - Mines Maths 1 PC 2014

Partie I - Traces et projecteurs.

1. Pour toute matrice M, notons M_{ij} ses coefficients. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \sum_{i=1}^{n}(\mathbb{A}\mathbb{B})_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{A}_{ij}\mathbb{B}_{ji} \\
&= \sum_{j'=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n}\mathbb{A}_{j'i'}\mathbb{B}_{i'j'} \\
&\quad (j'=i \text{ et } i'=j) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{B}_{ij}\mathbb{A}_{ji} \\
&\quad (\text{les coefficients sont des scalaires et commutent}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{B}_{ij}\mathbb{A}_{ji} \\
&\quad (\text{interversion des sommes}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\mathbb{B}\mathbb{A})_{ii} \\
&= \boxed{\operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}).}
\end{aligned}$$

2. Soit maintenant T un endomorphisme. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de X. On a par la formule de changement de base :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

où $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. On a de plus :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\mathbb{T}_{\mathcal{B}}) &= \operatorname{tr}\left((\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\left[(\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}\right]\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\left[(\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1}\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}\right]\right) \\
&= \operatorname{tr}(\mathbb{I}_n\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}) \\
&= \boxed{\operatorname{tr}(\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}).}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la trace de } \mathbb{T}_{\mathcal{B}} \text{ ne dépend pas de la base } \mathcal{B} \text{ choisie.}}$

3. **Méthode 1 :** on profite du fait que l'exercice est en dimension finie.
Montrons que $\operatorname{Ker}(P)$ et $\operatorname{Im}(P)$ sont en somme directe. Puisqu'il n'y a que deux espaces, on peut se contenter de vérifier que $\operatorname{Ker}(P)\cap\operatorname{Im}(P)=\{0_X\}$ (en pratique $\operatorname{Ker}(P)\cap\operatorname{Im}(P)\subset\{0_X\}$ puisque l'inclusion réciproque est toujours vraie).
Soit $x\in\operatorname{Ker}(P)\cap\operatorname{Im}(P)$. Montrons que $x=0_X$.

Comme $x \in \mathrm{Im}(P)$, il existe $y \in X$ tel que $x = P(y)$. Et comme $x \in \mathrm{Ker}(p)$, on a : $P(x) = 0_X$. Ainsi on a :

$$P(P(y)) = 0_X.$$

Or $P^2 = P$ puisque P est un projecteur. Donc $P(y) = 0_X$ c'est-à-dire :

$$\boxed{X = 0_X.}$$

Donc $\mathrm{Ker}(P)$ et $\mathrm{Im}(P)$ sont en somme directe.
De plus, d'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\mathrm{rg}(P)}_{=\dim \mathrm{Im}(P)} + \dim \mathrm{Ker}(P) = \underbrace{\dim X}_{=n}.$$

Donc par égalité sur les dimensions, $\mathrm{Ker}(P)$ et $\mathrm{Im}(P)$ sont même supplémentaires. Ainsi :

$$\boxed{X = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P).}$$

Méthode 2 : on procède de la manière générale par analyse-synthèse.
Il s'agit de montrer que pour tout $x \in X$, il existe une unique décomposition $x = y + z$ où $y \in \mathrm{Ker}(P)$ et $z \in \mathrm{Im}(P)$. Ainsi, soit $x \in X$ et procédons par analyse-synthèse pour prouver l'existence et l'unicité.

- **Analyse :** On suppose qu'il existe $y \in \mathrm{Ker}(P)$ et $z \in \mathrm{Im}(P)$ tel que $x = y + z$.
  On a alors par linéarité de P :
  $$P(x) = \underbrace{P(y)}_{=0_X} + P(z).$$
  Or $z \in \mathrm{Im}(P)$. Il existe donc $z' \in X$ tel que $z = P(z')$. D'où $P(x) = P(P(z'))$. Or P est un projecteur, donc $P^2 = P$. On en déduit $P(z') = P(x)$ c'est-à-dire :
  $$\boxed{z = P(x).}$$
  Et donc on a nécessairement :
  $$\boxed{y = x - P(x).}$$
  L'analyse prouve l'unicité puisque ces formules définissent entièrement y et z à partir de x et P.
- **Synthèse :** Soit $x \in X$. Posons $y = x - P(x)$ et $z = P(x)$. Vérifions que :
  - $\underline{x = y + z.}$ On a bien :
    $$y + z = (x - P(x)) + P(x) = x.$$
  - $\underline{y \in \mathrm{Ker}(P).}$ On a :
    $$P(y) = P(x - P(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0_X.$$
  - $\underline{z \in \mathrm{Im}(P).}$ Par définition, $z = P(x)$ qui est bien dans l'image.

  Donc la synthèse prouve l'existence de la décomposition.

Ainsi, pour tout $x \in X$, il existe un unique couple (y, z) de $\mathrm{Ker}(P) \times \mathrm{Im}(P)$ tel que $x = y + z$. Dit autrement, $\boxed{\text{Ker}(P) \text{ et Im}(P) \text{ sont supplémentaires dans } X.}$

4. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $X = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P)$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ où $e_1, \ldots, e_r \in \mathrm{Im}(P)$ et $e_{r+1}, \ldots, r_n \in \mathrm{Ker}(P)$. En particulier, on a :

$$\mathrm{rg}(P) = \dim \mathrm{Im}(P) = r \text{ et } \dim \mathrm{Ker}(P) = n - r.$$

On a par définition $\boxed{P(e_i) = 0_X \text{ si } i \in [\![r+1, n]\!].}$
Calculons $P(e_i)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$. Comme $e_i \in \mathrm{Im}(P)$, on peut écrire $e_i = P(f_i)$. Ainsi :

$$\boxed{P(e_i) = P(P(f_i)) = P^2(f_i) = P(f_i) = e_i.}$$

Dit autrement l'endomorphisme induit par P sur le sous-espace stable $\mathrm{Im}(P)$ est l'identité de $\mathrm{Im}(P)$.
La matrice de P dans la base $\mathcal{B}$ ainsi choisie a donc la forme suivante :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right).$$

La trace $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$ est donc égale au nombre de 1 qui apparaissent sur la diagonale à savoir r (un pour chaque vecteur e_i de $\mathrm{Im}(P)$).
On a donc :

$$\boxed{\mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}(\mathbb{P}_{\mathcal{B}}) = r = \dim \mathrm{Im}(P) = \mathrm{rg}(P).}$$

5. Commençons par remarquer que :

$$(P')^2 = (\mathrm{Id} - P) \circ (\mathrm{Id} - P) = \mathrm{Id} - 2P + P^2 = \mathrm{Id} - 2P + P = \mathrm{Id} - P = P'.$$

Ainsi $\boxed{P' \text{ est aussi un projecteur.}}$
Ainsi, il suffit de montrer l'une des deux égalités, l'autre se déduit par symétrie de la situation.
Montrons $\mathrm{Im}(P') = \mathrm{Ker}(P)$ par double inclusion.

- $\underline{\mathrm{Im}(P') \subset \mathrm{Ker}(P).}$ Soit $x \in \mathrm{Im}(P')$. On peut donc écrire $x = P'(y)$ avec $y \in X$. Montrons que $P(x) = 0_X$.
On a :

$$\boxed{P(x) = P(P'(y)) = P(y - P(y)) = P(y) - \underbrace{P^2(y)}_{=P(y)} = 0_X.}$$

- $\underline{\mathrm{Im}(P') \supset \mathrm{Ker}(P).}$ SOit $x \in \mathrm{Ker}(P)$. Montrons qu'il existe $y \in X$ tel que $x = P'(y)$.
On a $P(x) = 0_X$. Donc :

$$\boxed{x = x - 0_X = x - P(x) = (\mathrm{Id} - P)(x) = P'(x).}$$

Ainsi, on a bien $\boxed{\mathrm{Im}(P') = \mathrm{Ker}(P).}$

Par symétrie, on a également $\boxed{\mathrm{Ker}(P') = \mathrm{Im}(P).}$

6. Soit $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et soit $\mathcal{B}_G = (f_1, \ldots, f_q)$ une base de G. En tant que bases, ce sont des familles génératrices de F et G respectivement. Leur concaténation $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une famille génératrice de $F + G$.
En effet soit $x \in F + G$. On peut écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Écrivons :

$$y = y_1 e_1 + \cdots y_p e_p \text{ et } z = z_1 f_1 + \cdots z_q f_q.$$

Donc :

$$\boxed{x = y_1 e_1 + \cdots y_p e_p + z_1 f_1 + \cdots z_q f_q.}$$

Or on a :

$$\dim(F + G) \leqslant \mathrm{card}(\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G)$$

car c'est une famille génératrice. Et on a :

$$\mathrm{card}(\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G) = \mathrm{card}(\mathcal{B}_F) + \mathrm{card}(\mathcal{B}_G) = \dim F + \dim G.$$

D'où :

$$\boxed{\dim(F + G) \leqslant \dim F + \dim G.}$$

7. Notons :
$$S = \sum_{i=1}^{m} P_i.$$
Par linéarité de la trace, on a :
$$\boxed{\mathrm{tr}(S) = \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{m} P_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\mathrm{tr}(P_i)}_{\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}.}$$
Il reste à montrer que $\mathrm{tr}(S) \geqslant \mathrm{rg}(S)$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(S)$. On peut écrire $x = S(y)$. On a donc :
$$x = \sum_{k=1}^{m} P_i(y) \in \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Im}(P_i).$$
D'où :
$$\boxed{\mathrm{Im}(S) \subset \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Im}(P_i).}$$
On a donc :
$$\boxed{\mathrm{rg}(S) = \dim \mathrm{Im}(S) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \dim \mathrm{Im}(P_i) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{rg}(P_i) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{tr}(P_i) = \mathrm{tr}\left(\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Im}(P_i)\right) = \mathrm{tr}(S).}$$

Partie II - Projecteurs de rang 1.

8. Commençons par montrer qu'il existe $u \in \mathrm{Im}(P)$ tel que :
$$\forall x \in X,\ P(x) = \lambda(x)u$$
où $\lambda : X \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.
En effet, comme $\dim \mathrm{Im}(P) = \mathrm{rg}(P) = 1$, il existe $u \neq 0$ tel que $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(u)$ et tel que (u) soit une base de $\mathrm{Im}(P)$.
Comme (u) est une base de $\mathrm{Im}(P)$, pour tout vecteur de $\mathrm{Im}(P)$, en particulier $P(x)$, il existe un coefficient $\lambda(x)$ tel que :
$$P(x) = \lambda(x)u.$$
λ est une application de X dans $\mathbb{R}$ par construction. Il reste à montrer que λ est linéaire.
Soient $x, y \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :
$$P(x + \alpha y) = P(x) + \alpha P(y) = \lambda(x)u + \alpha\lambda(y)u = (\lambda(x) + \alpha\lambda(y))u.$$
Et :
$$P(x + \alpha y) = \lambda(x + \alpha y)u.$$
Par unicité de l'écriture dans une base, on en déduit :
$$\boxed{\lambda(x + \alpha y) = \lambda(x) + \alpha\lambda(y).}$$
Soit $x \in X$. Calculons désormais :
$$PTP(x) = PT(\lambda(x)u) = \lambda(x)P(T(u)) = \lambda(x)\lambda(T(u))u = \lambda(T(u))\lambda(x)u = \lambda(T(u))P(x).$$
Ainsi :
$$\boxed{PTP = \mu P}$$
avec $\boxed{\mu = \lambda(T(u)).}$

9. Le seul point à montrer est que le coefficient en haut à gauche est bien μ. Il faut donc montrer que le coefficient selon f_1 de $T(f_1)$ est μ.
Comme $f_1 \in \mathrm{Im}(P)$, on a $P(f_1) = f_1$. Et donc $T(f_1) = T(P(f_1))$. Décomposons maintenant $T(f_1)$ sur la base :
$$T(f_1) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k.$$
Or par définition du projecteur P, on a :
$$P(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{P(f_k)}_{=0 \text{ si } k\neq 1} = \alpha_1 P(f_1) = \alpha_1 f_1.$$
Or $PTP = \mu P$. Donc :
$$\alpha_1 f_1 = P(T(P(f_1))) = \mu P(f_1) = \mu f_1.$$
D'où $\boxed{\alpha_1 = \mu.}$

10. Procédons par contraposée.
On suppose que $\mathbb{B}$ est une matrice d'homothétie, c'est-à-dire que l'on peut écrire $\mathbb{B} = \alpha \mathbb{I}_{n-1}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que $P'TP'$ est proportionnel à P'.
Nous allons le prouver en passant par les écritures matricielles. La matrice $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$ de P dans la base précédente est :
$$\mathbb{P}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{O} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$
On a alors :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}'_{\mathcal{B}}\mathbb{T}_{\mathcal{B}}\mathbb{P}'_{\mathcal{B}} &= (\mathbb{I}_n - \mathbb{P}_{\mathcal{B}})\mathbb{T}_{\mathcal{B}}(\mathbb{I}_n - \mathbb{P}_{\mathcal{B}}) \\
&= \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & \star & \cdots & \star \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & \alpha\mathbb{I}_{n-1} & \\ \star & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & \alpha\mathbb{I}_{n-1} & \\ \star & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \alpha\mathbb{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \boxed{\alpha \mathbb{P}'_{\mathcal{B}}.}
\end{aligned}$$

Partie III - Endomorphismes différents d'une homothétie.

11. Procédons par contraposée : montrons que si toutes familles $(x, T(x))$ sont liées alors T est une homothétie. Ainsi on suppose que pour tout $x \in X$, on peut écrire :
$$T(x) = \lambda_x x$$
où λ_x est une quantité réelle qui dépend *a priori* de x. Montrons que cette quantité est indépendante de x.
Soient $x_1, x_2 \in X$ que l'on suppose non nuls (si l'un des deux vaut 0_X alors le λ associé est arbitraire et peut donc être fixé pour avoir $\lambda_{x_1} = \lambda_{x_2}$). On a $T(x_1) = \lambda_{x_1} x_1$ et $T(x_2) = \lambda_{x_2} x_2$. Montrons que $\lambda_{x_1} = \lambda_{x_2}$.
Si x_1 et x_2 sont colinéaires on peut écrire $x_2 = \alpha x_1$ avec $\alpha \neq 0$. Et alors :
$$\underbrace{T(x_2)}_{=\lambda_{x_2} x_2 = \lambda_{x_2}\alpha x_1} = T(\alpha x_1) = \alpha T(x_1) = \alpha \lambda_{x_1} x_1.$$

Et comme αx_1 est non nul, on en déduit $\boxed{\lambda_{x_1} = \lambda_{x_2}.}$
Si x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires, calculons :

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) = \lambda_{x_1} x_1 + \lambda_{x_2} x_2.$$

Et :

$$T(x_1 + x_2) = \lambda_{x_1+x_2}(x_1 + x_2).$$

Or (x_1, x_2) est libre puisque x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires. On a donc :

$$\boxed{\lambda_{x_1} = \lambda_{x_1+x_2} = \lambda_{x_2}.}$$

Dans tous les cas, on peut donc écrire :

$$T(x) = \lambda x$$

avec λ indépendant de x, c'est-à-dire $\boxed{T \text{ est une homothétie.}}$
Par contraposée, $\boxed{\text{si } T \text{ n'est pas une homothétie, il existe } x \in X \text{ tel que } x \text{ et } T(x) \text{ ne sont pas liés.}}$

12. Puisque x et $T(x)$ ne sont pas liés, $(x, T(x))$ est libre. Complétons $(x, T(x))$ en une base de X. On a donc :

$$e_1 = x,\ e_2 = T(x),\ e_3,\ \ldots, e_n.$$

On a $T(e_1) = T(x) = 0 \times x + 1 \times T(x) + 0 \times e_2 + \cdots + 0 \times e_n$. Donc la matrice est bien de la forme :

$$\boxed{\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{array}\right).}$$

13. Procédons par récurrence sur la dimension de X.
   - **Initialisation :** si $n = 2$, alors d'après la question précédente, il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que :

   $$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

   où $a, b \in \mathbb{R}$. De plus, puisque $\mathrm{tr}(T) = 0$, on a $0 + b = 0$ et donc $b = 0$. Ainsi :

   $$\boxed{\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

   $\boxed{\text{qui est bien de diagonale nulle.}}$
   - **Hérédité :** Soit $n \geqslant 2$. On suppose que pour tout espace de dimension n et pour tout endomorphisme de cet espace de trace nulle qui n'est pas une homothétie, il existe une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est nulle.
   Prenons maintenant T endomorphisme (non proportionnel à l'identité) de trace nulle dans X de dimension $n + 1$. D'après la question précédente, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que :

   $$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{array}\right).$$

   Si $\mathbb{A} = \lambda \mathbb{I}_n$. alors comme $\mathrm{tr}(T) = 0$, on a $\lambda = 0$ et donc la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ convient et a une trace nulle.
   Sinon, $\mathbb{A}$ est une matrice d'un endomorphisme de $\mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_{n+1})$ non proportionnel à l'identité. Et sa trace est bien nulle. Donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_{n+1})$ telle que la matrice $\mathbb{B}$ de cette endomorphisme soit de diagonale nulle.

Or posons maintenant $\mathcal{B}' = (e_1, f_1, \dots, f_n)$. On a $T(e_1) = e_2 \in \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1}) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$. Donc la matrice de T dans cette base est de la forme :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ \hline \star & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & & \\ \star & & & & \end{array}\right).$$

Cette matrice est bien de diagonale nulle.

14. Posons $T' = T - t_1 \mathrm{Id}$. Ce n'est pas une homothétie (sinon T le serait). On peut donc appliquer le résultat de la question 12. Il existe une base telle que :

$$\mathbb{T}'_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

Or $\mathrm{tr}(T') = \mathrm{tr}(T) - t_1 \mathrm{tr}(\mathrm{Id}) = (t_1 + t_2) - 2t_1 = t_2 - t_1$. Donc $b = t_2 - t_1$.
D'où :

$$\boxed{\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \mathbb{T}'_{\mathcal{B}} + t_1 \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} t_1 & a \\ 1 & (t_2 - t_1) + t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & a \\ 1 & t_2 \end{pmatrix}.}$$

15. Il suffit d'appliquer la propriété admise avec $t = t_1$ puis d'appliquer le résultat de la question 9. On obtient la forme :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & \star & \cdots & \star \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \star & & & \end{array}\right).$$

De plus $\mathbb{B}$ n'est pas une homothétie d'après le résultat de la question 10.

16.
   - **Initialisation :** le case $n = 2$ a été traité en question 14.
   - **Hérédité :** Soit $n \geqslant 2$. On suppose le résultat vrai au rang n. Montrons-le au rang $n + 1$.
   D'après la question 15, on peut toujours écrire :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & \star & \cdots & \star \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \star & & & \end{array}\right)$$

où $\mathbb{B}$ n'est pas une homothétie.
Or $\mathbb{B}$ est la matrice d'un endomorphisme U dans $\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ (si on note $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_{n+1})$). Sa trace est :

$$\mathrm{tr}(\mathbb{B}) = \mathrm{tr}(\mathbb{T}_{\mathcal{C}}) - t_1 = \sum_{i=2}^{n+1} t_i.$$

L'hypothèse de récurrence s'applique. Il existe donc une base $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ telle que la matrice $\mathbb{B}'$ de U ait pour éléments diagonaux les $(t_i)_{i \in [\![2, n+1]\!]}$.
Or dans la base $\mathcal{B}'' = (e_1, f_1, \dots, f_n)$, la matrice de T s'écrit :

$$\boxed{\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & \star & \cdots & \star \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & \mathbb{B}' & \\ \star & & & \end{array}\right)}$$

et donc a pour éléments diagonaux les $(t_i)_{i \in [\![1, n+1]\!]}$.

Partie IV - Décomposition en somme de projecteurs.

17. Soit $(e_{\rho+1}, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(T)$. On peut compléter cette base en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_\rho, e_{\rho+1}, \dots, e_n)$ de X. Dans cette base, la matrice $\mathbb{T}_\mathcal{B}$ est :
$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{array}\right),$$
où $\mathbb{T}_1$ est de taille $\rho \times \rho$ et $\mathbb{T}_2$ est de taille $(n-\rho) \times \rho$.

18. $\mathbb{T}_1$ est la matrice d'un endomorphisme U dans l'espace $\text{Vect}(e_1, \dots, e_\rho)$.
Comme $\text{tr}(T) \geqslant \text{rg}(T) = \rho$. Donc il existe des entiers t_i non nuls tels que $\sum t_i = \text{tr}(T) = \text{tr}(\mathbb{T}_1)$. Par exemple $t_1 = t_2 = \dots = t_{\rho-1} = 1$ et $t_\rho = \text{tr}(T) - \rho + 1$ conviennent.
On a supposé que $\mathbb{T}_1$ n'est pas la matrice d'une homothétie. Donc d'après la question 16, il existe une base $(f_1, \dots, f_\rho)$ de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_\rho)$ tel que la matrice de U ait pour diagonale t_1, ..., t_ρ.
Dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_\rho, e_{\rho+1}, \dots, e_n)$, la matrice T est alors de la forme :
$$\boxed{\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{cccc|c} t_1 & \star & \cdots & \star & \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star & \mathbb{O} \\ \star & \cdots & \star & t_\rho & \\ \hline \star & \cdots & \cdots & \star & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \mathbb{O} \\ \star & \cdots & \cdots & \star & \end{array}\right).}$$

19. Pour tout $i \in [\![1, \rho]\!]$, on note C_i la colonne numéro i de la matrice précédente. on pose P_i l'endomorphisme de X dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est nulle sauf pour la colonne i qui est $\frac{1}{t_i} C_i$.
On a alors $P_i^2 = P_i$ (en effet, la matrice précédente à un 1 à l'intersection de la ligne i et la colonne i). Donc P_i est un projecteur.
De plus :
$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{\rho} t_i P_i.}$$
Comme les t_i sont des entiers, cela ne fait que multiplier le nombre d'apparition du projecteur P_i dans la somme. $\boxed{\text{C'est donc une somme d'un nombre fini de projecteurs.}}$

20. On suppose maintenant que $\mathbb{T}_1$ est une matrice d'homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{T}_1 = \lambda \mathbb{I}_\rho$.
Ainsi $\text{tr}(T) = \lambda\rho$ et comme $\text{tr}(T) \geqslant \text{rg}(T) = \rho$, on a : $\lambda \geqslant 1$.
Si $\lambda = 1$, alors on peut procéder comme dans la question précédente, en posant P_i l'endomorphisme dont la matrice est celle obtenue en ne conservant que la colonne i dans la matrice.
Si $\lambda \neq 1$, alors $\text{tr}(T) > \text{rg}(T)$. Or ce sont des entiers, donc $\text{tr}(T) \geqslant \text{rg}(T) + 1$.
Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_\rho, e_{\rho+1}, \dots, e_n)$ la base dans laquelle on a exprimé $\mathbb{T}_\mathcal{B}$. Posons P_0 le projecteur sur $\text{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$.
Alors $T - P_1$ vérifie : $\text{tr}(T - P_1) \in \mathbb{N}$, $\text{tr}(T - P_0) \geqslant \text{rg}(T - P_1)$. Donc la question précédente s'applique et donc $T - P_0$ s'écrit comme une somme de projecteurs.
Puis :
$$\boxed{T = P_0 + (T - P_0)}$$
s'écrit également comme une somme de projecteurs.