TD5 - Réduction

Exercice 1. Soit u un automorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Établir : $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \{\lambda^{-1},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, exprimer pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\chi_{A^{-1}}(\lambda)$ en fonction de χ_A.

Exercice 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \in \mathrm{Sp}(u^n)$, montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(u)$.

Exercice 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. Montrer que si $\lambda \neq 0$, alors $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 5. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \alpha$. Trouver une valeur propre de cette matrice et un vecteur propre associé. A-t-on un résultat analogue si toutes les colonnes ont la même somme β ?

Exercice 6. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\phi(P) = (X-1)P' - P$.

1. Montrer que pour tout entier n, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ. On note alors ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ.
2. Déterminer les valeurs propres de ϕ_n, en déduire celles de ϕ.
3. Déterminer les vecteurs propres de ϕ.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f et $g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$ avec $\lambda \neq 0$. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$.
2. On suppose E de dimension finie. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(g \circ f) \Rightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$.

Exercice 8. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres. Puis diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Soit a et b deux réels distincts. Trouver l'ensemble S des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que la matrice A soit diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ 0 & b & z & -y \\ 0 & 0 & a & x \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Exercice 10. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose : $\phi_A : M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Écrire sa matrice dans la base canonique. Calculer $\mathrm{rg}(\phi_A)$ et en déduire une valeur propre de ϕ_A.
2. ϕ_A est-il diagonalisable ? Donner ses éléments propres.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f - f \circ g = \alpha f$ avec $\alpha \neq 0$.

1. Montrer que : pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g \circ f^k - f^k \circ g = \alpha k f^k$.
2. En déduire que f est nilpotente, *i.e.* il existe $k \in \mathbb{N}^*$ avec $f^k = 0$ (*Indication : considérer* $\phi : h \in \mathcal{L}(E) \mapsto g \circ h - h \circ g \in \mathcal{L}(E)$).

Exercice 12.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. U est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser. Calculer U^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \geq 2$, a, $b \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice n'ayant que des a sur la diagonale, que des b partout ailleurs. Montrer que A est diagonalisable, en la diagonalisant. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, et $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$.

On note $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k$ et $B = Q(A) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_p A^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \alpha_k A^k$.

1. Montrer que B est diagonalisable. Décrire $\mathrm{Sp}(B)$ à l'aide de $\mathrm{Sp}(A)$.
2. Montrer que pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$, $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda) = \mu} E_\lambda(A) \subset E_\mu(B)$, puis à l'aide des dimensions, conclure à l'égalité.

Exercice 14. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Montrer que, si pour tout i, λ_i est le i-ème coefficient de la diagonale de $P^{-1}AP$ et C_i la i-ème colonne de P, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $(C_i)_{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda}$ est une base de $E_\lambda(A)$.

Exercice 15.

1. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1. Montrer que M est une matrice diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$.
2. Montrer que M est de rang 1 $\Leftrightarrow$ il existe $(X, Y) \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ non nuls tels que $M = X^\top Y$. Montrer que $M^2 = \mathrm{tr}(M) M$.

Exercice 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 3$ telle que : $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable. Combien $\mathrm{Sp}(A)$ a-t-il d'éléments ?

Exercice 17. Le but de cet exercice est de résoudre l'équation matricielle $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 8 & 1 & 8 \\ 9 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

Soit $U = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que U est un vecteur propre de A, puis diagonaliser A.
2. Résoudre l'équation matricielle $Y^2 = D$ où D est la matrice diagonale où les coefficients sur la diagonale sont 1, 2 et 3 (*On pourra commencer par montrer que si Y est solution alors Y et D commutent*).
3. Déterminer les matrices $X \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$.
4. Combien A a-t-elle de racines carrées ? Généraliser ce nombre si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et possède n valeurs propres distinctes non nulles.

Exercice 18.

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. Cette formule reste-t-elle vraie pour n négatif ?
3. Déterminer le commutant de A dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 19. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable, puis montrer que A est semblable à $I + N$. Calculer N^2, N^3, puis N^n pour $n \geq 3$. En déduire u_n, en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.

Exercice 20 (Mines-Telecom RMS 2016)**.** Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 21. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer qu'un endomorphisme v de E commute avec $u \Leftrightarrow$ il laisse stable chaque sous-espace propre de u.

Exercice 22. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est nilpotent si et seulement s'il admet 0 pour unique valeur propre.

Exercice 23. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^3-2A^2-5A+6I_n = 0_n$. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6 = 0$. En déduire les valeurs propres possibles de A.

Exercice 24. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

Exercice 25. Montrer que si $A \in \mathrm{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ alors A admet une valeur propre (réelle).

Exercice 26. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrivant $A = \lambda I_n + N$, avec $|\lambda| < 1$ et N nilpotente. Montrer que $A^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 27 (CCP RMS 2016 - exo 2)**.** Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 28 (CCP RMS 2016 - exo 2)**.** Soit $f : M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + M^\top$. 1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 2. Est-il diagonalisable ?

Exercice 29 (CCP 2009 Officiel de la Taupe)**.**

1. Déterminer les valeurs propres réelles et complexes de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$? $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$?
3. On pose $t_n = \mathrm{tr}(A^n)$. Exprimer t_{n+3} en fonction de t_{n+2}, t_{n+1} et t_n.
4. Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} t_n x^n$ et somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 30. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$) définie par : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \text{ ou } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(A)$.
3. A a une valeur propre évidente (pour $n \geq 3$) : la donner, et donner sa multiplicité.
4. Dans la suite, on va donner quatre façons différentes pour calculer $\mathrm{Sp}(A)$, et parfois les espaces propres associés.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. En résolvant le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (et de paramètre λ), déterminer les valeurs propres non nulles de A et leurs espaces propres associés.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Déterminer $\mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \cap \mathrm{Im}(A)$ (*en résolvant le système $AX = \lambda X$ tout en écrivant X comme combinaison linéaire d'une base de* $\mathrm{Im}(A)$), mais aussi montrer (*de manière directe*) que $\mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \subset \mathrm{Im}(A)$. En déduire les valeurs propres non nulles de A et leurs espaces propres associés.
   (c) Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$. Donner une autre expressions de ces valeurs à l'aide des valeurs propres de A, et en déduire $\mathrm{Sp}(A)$.
   (d) On note P_n le polynôme caractéristique de A (lorsque $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$). Trouver une relation de récurrence entre P_n et P_{n-1} (pour $n \geq 4$), puis calculer P_n, et en déduire $\mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 31. Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose :

- $1 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\dim\big(E_1(A)\big) = 1$,
- pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, si $\lambda \neq 1$ alors $|\lambda| < 1$,
- A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

1. Pourquoi est-ce que 1 est bien valeur propre de $A^\top$?
   On note désormais X un vecteur propre de A associé à 1, et Y un vecteur propre de $A^\top$ associé à 1.
2. Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice Q telle que $Q^2 = Q$.
3. Quel est le rang de Q ? Montrer que (X) est une base de $\mathrm{Im}(Q)$.
4. Montrer que $Y^\top Q = Y^\top$. En déduire que $Q = \dfrac{1}{\mathrm{tr}(Y^\top X)} XY^\top$.

Solutions

Exercice 1. Montrons l'égalité demandée par double inclusion.

- Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors il existe $x \in E$ non nul avec $u(x) = \lambda x$, et comme u est bijectif (et u^{-1} linéaire),

$$x = u^{-1}\big(u(x)\big) = u^{-1}(\lambda x) = \lambda u^{-1}(x).$$

Enfin, $x \neq \vec{0}$, donc $\lambda \neq 0$, et donc

$$u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda} x.$$

Comme $x \neq \vec{0}$, on en déduit bien $\lambda^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(u^{-1})$.
D'où l'inclusion

$$\big\{\lambda^{-1},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\big\} \subset \mathrm{Sp}(u^{-1}).$$

Remarque. En rédigeant un tout petit peu différemment, on montre ainsi l'inclusion

$$E_\lambda(u) \subset E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1}).$$

- Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(u^{-1})$, alors il existe $x \in E$ non nul avec $u^{-1}(x) = \mu x$, et en composant par u linéaire,

$$x = u\big(u^{-1}(x)\big) = u(\mu x) = \mu u(x).$$

Enfin, $x \neq \vec{0}$, donc $\mu \neq 0$, et donc

$$u(x) = \frac{1}{\mu} x.$$

Comme $x \neq \vec{0}$, on en déduit que $\dfrac{1}{\mu} \in \mathrm{Sp}(u)$. En notant alors $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$, on a bien

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1} \in \big\{\lambda^{-1},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\big\}.$$

D'où l'inclusion

$$\mathrm{Sp}(u^{-1}) \subset \big\{\lambda^{-1},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\big\}.$$

Remarque. En rédigeant un tout petit peu différemment, on montre ainsi l'inclusion

$$E_\mu(u^{-1}) \subset E_{\frac{1}{\mu}}(u).$$

- Par double inclusion, on a bien l'égalité voulue.

Remarque. Les deux remarques donnent alors

$$E_\mu(u^{-1}) = E_{\frac{1}{\mu}}(u)$$

pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(u^{-1})$.

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors

$$\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \det\big(\lambda I_n - A^{-1}\big) = \det\big(\lambda A^{-1}A - A^{-1}I_n\big) = \det\big(-\lambda A^{-1}\big)\det\left(\frac{1}{\lambda}I_n - A\right) = \boxed{\frac{(-\lambda)^n}{\det(A)}\chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right)}.$$

Exercice 3. On suppose $0 \in \mathrm{Sp}(u^n)$, donc l'endomorphisme u^n est non injectif. Comme u^n est non injectif, u est non injectif (en effet, une composée d'injections est injective, donc si u est injectif alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ \cdots \circ u$ aussi). Donc $\mathrm{Ker}(u) \neq \{\vec{0}\}$, donc 0 est valeur propre de u, c'est-à-dire

$$0 \in \mathrm{Sp}(u).$$

Autre façon : on sait

$$\det(u^n) = \det(u)^n,$$

or, si $0 \in \mathrm{Sp}(u^n)$, alors

$$\det(u^n) = 0,$$

donc $\det(u)^n = 0$, donc

$$\det(u) = 0, \qquad \text{soit} \qquad 0 \in \mathrm{Sp}(u).$$

Exercice 4. Soit $x \in E_\lambda(u)$, alors
$$u(x) = \lambda x,$$
et comme $\lambda \neq 0$,
$$x = \frac{1}{\lambda} u(x),$$
et comme u est linéaire,
$$x = u\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in \mathrm{Im}(u).$$

Exercice 5. ★ L'hypothèse sur la somme des lignes se traduit en :
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$
donc α est valeur propre et un vecteur propre associé à α est $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (car c'est un vecteur colonne non nul).

En effet, si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $U \neq 0_{n,1}$, et pour $i \in [\![1, n]\!]$, la formule du produit matriciel donne :
$$(AU)_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \underbrace{u_{j,1}}_{=1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \alpha = \alpha.1 = (\alpha U)_{i,1},$$
ce qui donne bien
$$AU = \alpha U.$$

Autre méthode : présentons une autre méthode pour justifier $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$, qui est intéressante pour des calculs pratiques de polynôme caractéristique. Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{n} C_j}{=} \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} & -a_{1,2} & \dots & \dots & -a_{1,n} \\ \lambda - \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -a_{3,2} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ \lambda - \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} & -a_{n,2} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Pour exploiter le fait que la somme de chaque ligne de A fait α, on a fait l'opération $C_1 \leftarrow \sum_{j=1}^{n} C_j$ dans le calcul de χ_A (ainsi, sur chaque coefficient de la colonne 1, on se retrouve avec λ moins la somme des coefficients de la ligne correspondante). On en déduit donc
$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & -a_{1,2} & \dots & \dots & -a_{1,n} \\ \lambda - \alpha & \lambda - a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -a_{3,2} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ \lambda - \alpha & -a_{n,2} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} = (\lambda - a) \begin{vmatrix} 1 & -a_{1,2} & \dots & \dots & -a_{1,n} \\ 1 & \lambda - a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -a_{3,2} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 1 & -a_{n,2} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}$$
par multilinéarité du déterminant. On en déduit que $\chi_A(\alpha) = 0$, et donc $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$.

Remarque. Pour le calcul de χ_A, on ferait une étape supplémentaire : avec $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in [\![2, n]\!]$, on obtient :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)\begin{vmatrix} 1 & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & (*) & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

et en développant suivant la première colonne, on s'est ramené à un déterminant de taille $n-1$ au lieu de n (qui se trouve être aussi le polynôme caractéristique, mais d'une autre matrice), en ayant factorisé $(\lambda - \alpha)$ dans le calcul de $\chi_A(\lambda)$...

★ A et $A^\top$ ont même valeurs propre. Or, pour $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (A^\top)_{j,i}.$$

D'après le premier point de l'exercice (en échangeant le rôle de i et j), α est une valeur propre de $A^\top$, donc de A.
ATTENTION Dans ce cas, on ne connaît pas de vecteurs propres associés de façon triviale.

Remarque. Ici aussi on peut utiliser une transformation de χ_A, ce coup-ci en faisant $L_n \leftarrow \sum_{i=1}^{n} L_i$, pour que, sur chaque coefficient de la ligne n, on se retrouve avec λ moins la somme des coefficients de la colonne correspondante :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} \underset{L_n \leftarrow \sum_{i=1}^{n} L_i}{=} \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & \dots & - \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n-1,1} & \dots & -a_{n-1,n-2} & \lambda - a_{n-1,n-1} & -a \\ \lambda - \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} & \lambda - \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} & \dots & \dots & \lambda - \end{vmatrix}$$

ce qui donne, par hypothèse,

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & \dots & -a_{n-1,n-2} & \lambda - a_{n-1,n-1} & -a_{n-1,n} \\ \lambda - \beta & \lambda - \beta & \dots & \dots & \lambda - \beta \end{vmatrix} = (\lambda - \beta)\begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & \dots \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -a_{n-1,1} & \dots & -a_{n-1,n-2} & \lambda - a_{n-1,n-} \\ 1 & 1 & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

et donc $\chi_A(\beta) = 0$, ce qui donne bien $\beta \in \mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 6. 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\phi(P) \in \mathbb{R}[X]$, car $\mathbb{R}[X]$ est stable par composition, dérivation et combinaison linéaire. Puis, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\deg\big((X-1)P'\big) = 1 + \deg(P') \leq \deg(P),$$

donc

$$\deg(\phi(P)) \leq \max\big(\deg\big((X-1)P'\big), \deg(-P)\big) \leq \deg(P) \leq n,$$

donc

$$\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X].$$

Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.
2) • Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons la matrice de ϕ_n dans la base canonique (comme $\deg\big(\phi(P)\big) \leq \deg(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on aura que la matrice de ϕ_n dans la base canonique est triangulaire, ce qui est très intéressant).
On calcule : pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\phi(X^k) = (X-1)kX^{k-1} - X^k = (k-1)X^k - kX^{k-1}$$

(on ne prend pas $k=0$, pour ne pas avoir de puissance négative sur le X !) et

$$\phi(X^0)=\phi(1)=-1=-X^0.$$

D'où en notant $B_n=(X^0,X,\dots,X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$A_n:=\mathrm{Mat}_{B_n}(\phi_n)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ & & & n-1\end{pmatrix}$$

La matrice A_n est triangulaire supérieure, donc on lit ses valeurs propres sur sa diagonale, et donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\phi_n)=\{-1,0,\dots,n-1\}=[\![-1,n-1]\!]}.$$

• Par conséquent, pour tout $k\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$, k sera une valeur propre de ϕ_{k+1}, donc il existera $P\in\mathbb{R}_{k+1}[X]$ non nul avec

$$\phi(P)=\phi_{k+1}(P)=kP,$$

en particulier

$$\phi(P)=kP$$

avec $P\in\mathbb{R}[X]$ non nul. Donc $k\in\mathrm{Sp}(\phi)$. Donc

$$\mathbb{N}\cup\{-1\}\subset\mathrm{Sp}(\phi).$$

• Puis, si λ est valeur propre de ϕ, alors il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ non nul avec $\phi(P)=\lambda P$. Si on note $n=\deg(P)$, alors $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et donc

$$\lambda P=\phi(P)=\phi_n(P).$$

Donc on a $P\in\mathbb{R}_n[X]$ non nul avec $\phi_n(P)=\lambda P$, donc

$$\lambda\in\ \mathrm{Sp}(\phi_n)=\{-1,0,\dots,n-1\}=[\![-1,n-1]\!],$$

en particulier

$$\lambda\in\mathbb{N}\cup\{-1\}.$$

Donc

$$\mathrm{Sp}(\phi)\subset\mathbb{N}\cup\{-1\}.$$

• D'où, par double inclusion,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\phi)=\mathbb{N}\cup\{-1\}}.$$

3) On considère alors $k\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$, et on cherche $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\phi(P)=kP$, soit

$$(X-1)P'=(k+1)P.$$

Donc P est solution de l'équation différentielle $(x-1)y'=(k+1)y$, et donc, si on la résout sur $]1,+\infty[$, il existe $K\in\mathbb{R}$ avec

$$P:x\in]1,+\infty[\mapsto K(x-1)^{k+1}.$$

Donc le polynôme $P-K(X-1)^{k+1}$ a une infinité de racines (tout $]1,+\infty[$), et donc $P-K(X-1)^{k+1}=0$, donc

$$P=K(X-1)^{k+1}\in\mathrm{Vect}\big((X-1)^{k+1}\big).$$

Donc

$$E_k\subset\mathrm{Vect}\big((X-1)^{k+1}\big).$$

Comme

$$\dim(E_k)\geq 1=\dim\big(\mathrm{Vect}\big((X-1)^{k+1}\big)\big)$$

(car $k\in\mathrm{Sp}(\phi)$), on en déduit

$$\boxed{E_k=\mathrm{Vect}\big((X-1)^{k+1}\big)}.$$

Exercice 7. **1)** Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$, il existe donc $x \in E$ non nul avec $g\big(f(x)\big) = \lambda x$. Donc

$$f \circ g\big(f(x)\big) = f\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Si $f(x) \neq \vec{0}$, alors $f(x)$ est un vecteur propre de $f \circ g$ associé à λ, et on a le résultat voulu.
Si $f(x) = \vec{0}$, alors on a

$$\lambda x = g\big(f(x)\big) = g(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Or, comme on suppose $\lambda \neq 0$, cela donne $x = \vec{0}$, contradiction. Donc $f(x) \neq \vec{0}$, ce qui conclut.
2) Si $0 \in \mathrm{Sp}(g \circ f)$, alors

$$0 = \det(g \circ f) = \det(g)\det(f) = \det(f)\deg(g) = \det(f \circ g).$$

Donc $f \circ g$ n'est pas inversible, donc $0 \in \mathrm{Sp}(f \circ g)$.

Exercice 8.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{par rapport à} L_3}{=} -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \lambda-1 & -1 \end{vmatrix} + (1+\lambda)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= -(2\lambda - 2 + 1) + (1+\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) \\
&= -(2\lambda - 1) + (\lambda^2 - \lambda - 1 + \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda) \\
&= \lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)
\end{aligned}$$

Donc

$$\chi_A = X(X-2)(X+2) \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{0, 2, -2\}.$$

$\boxed{A \text{ possède trois valeurs propres réelles distinctes et est de taille 3, donc } A \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$.

Remarque. Pour le calcul de $\chi_A(\lambda)$: si on remarque que la somme de chaque colonne de A fait 2, alors pour exploiter ceci, on fait l'opération $L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &\underset{L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3}}{=} (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)(\lambda+2)\lambda
\end{aligned}$$

L'intérêt de cette méthode est d'obtenir une forme partiellement factorisée pour χ_A (ici, on a même eu directement la forme factorisée optimale).

Recherche des vecteurs propres associés :

★ Espace propre associé à 0 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_0(A) \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} y + 2z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ x - z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2z \\ x = z \end{array} \right.$$

Donc

$$E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} ,\ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} ,\ z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_0} \right).$$

(e_0) est une famille de un vecteur, et ce vecteur est non nul, donc c'est une famille libre, et donc c'est une base de $E_0(A)$.

★ Espace propre associé à -2 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_{-2}(A) \Leftrightarrow (A+2I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y + 2z & = & 0 \\ x + 3y + z & = & 0 \\ x + z & = & 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\Leftrightarrow} \left\{ \right.$$

Donc

$$E_{-2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} ,\ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ,\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{e_{-2}} \right).$$

(e_{-2}) est une famille de un vecteur, et ce vecteur est non nul, donc c'est une famille libre, et donc c'est une base de $E_{-2}(A)$.

★ Espace propre associé à 2 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_2(A) \quad \Leftrightarrow \quad (A - 2I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lc} -2x + y + 2z & = \\ x - y + z & = \\ x - 3z & = \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{lcl} -2x + y + 2z & = & 0 \\ -y + 4z & = & 0 \\ x - 3z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & 0 \\ x & = & 3z \\ y & = & 4z \end{array} \right.$$

Donc

$$E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 3z \\ 4z \\ z \end{pmatrix} ,\ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} ,\ z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \right).$$

(e_2) est une famille de un vecteur, et ce vecteur est non nul, donc c'est une famille libre, et donc c'est une base de $E_2(A)$.

★ On pose alors

$$P = \left(\ e_0 \ \middle| \ e_{-2} \ \middle| \ e_2 \ \right) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}},$$

la matrice A est diagonalisable, (e_1), (e_2) et (e_3) sont des bases des différents espaces propres de A, donc la matrice P est bien inversible (les sous-espaces propres sont en somme directe, donc (e_0, e_{-2}, e_2) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$), et on a

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \underset{\text{par rapport à} L_2}{=} (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda^2-4+3) = (\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

Donc

$$\chi_B = (X-1)^2(X+1) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(B) = \{1, -1\}.$$

De plus, -1 est valeur propre simple de B, donc

$$\dim\big(E_{-1}(B)\big) = 1,$$

et 1 est valeur propre double, donc on sait juste

$$1 \leq \dim\big(E_1(B)\big) \leq 2.$$

Remarquons que χ_B est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, donc B est trigonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.
Puis,

$$B \text{ est diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_B \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X] : \text{OK} \\ \dim\big(E_{-1}(B)\big) = 1 \ \text{ OK} \\ \dim\big(E_1(B)\big) = 2 \end{cases} \qquad (\text{car } \mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}).$$

Calculons $\dim\big(E_1(B)\big)$:

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{rg}(B - I_3) = 1.$$

D'après le théorème du rang,

$$\dim\big(E_1(B)\big) = 3 - 1 = 2.$$

Donc B est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

Autre façon de le justifier :

$B \in M_3(\mathbb{R})$,

$$\dim\big(E_1(B)\big) + \dim\big(E_{-1}(B)\big) = 2 + 1 = 3 = \text{taille de } B$$

(et 1 et -1 sont deux éléments différents de $\mathbb{R}$), donc B est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

★ Espace propre associé à 1 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_1(B) \Leftrightarrow (B - I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y - 3z = 0.$$

Donc

$$E_1(B) = \left\{ \begin{pmatrix} -y+3z \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Notons $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors (u, v) est une famille génératrice de $E_1(B)$, formée de deux vecteurs. Or, on a déjà vu $\dim\big(E_1(B)\big) = 2$, donc (u, v) est une base de $E_1(B)$.

★ Espace propre associé à -1 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_{-1}(B) \Leftrightarrow \big(B-(-1)I_3\big)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 3z & = 0 \\ 2y & = 0 \\ x + y - z & = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3}{\Leftrightarrow}$$

Donc

$$E_{-1}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Notons $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors (w) est une famille de un vecteur, et ce vecteur est non nul, donc c'est une famille libre. Donc c'est une base de $E_{-1}(B)$.

Comme B est diagonalisable, et que (u, v) est une base de $E_1(B)$, et (w) une base de $E_{-1}(B)$, avec $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}$, alors (u, v, w) est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc, si on pose $P = \big(u \mid v \mid w \big) = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$, alors on a P inversible, et

$$\boxed{P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

3. • Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\chi_C(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 & 1 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{par rapport à} L_1}{=} (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 2)\Big((\lambda - 3)\lambda + 2\Big) + (-\lambda + 1) + (2 - 3 + \lambda) \\
&= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) + \lambda - 1 + 1 - \lambda \\
&= (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)
\end{aligned}$$

Donc

$$\chi_C = (X - 2)^2(X - 1) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(C) = \{1, 2\}.$$

De plus, 1 est valeur propre simple de B, donc

$$\dim\big(E_1(C)\big) = 1,$$

et 2 est valeur propre double, donc on sait juste

$$1 \leq \dim\big(E_2(C)\big) \leq 2.$$

Remarquons que

$$\boxed{\chi_C \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X], \text{ donc } C \text{ est trigonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{R})}.$$

Puis,

$$C \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_C \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X] : \text{OK} \\ \dim\big(E_1(C)\big) = 1 \ \text{ OK} \\ \dim\big(E_2(C)\big) = 2 \end{cases} \qquad (\text{car } \mathrm{Sp}(C) = \{1, 2\}).$$

Calculons $\dim\big(E_2(C)\big)$. D'après le théorème du rang , on a

$$\dim\big(E_2(C)\big) = 3 - \mathrm{rg}(C - 2I_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 2.$$

Donc $\dim\big(E_2(C)\big) \neq 2$. Donc C n'est pas diagonalisable (par contre elle est trigonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$).

Remarque.

(a) Pour les mêmes raisons, C n'est pas diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, car

$$C \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_C \text{ est scindé dans } \mathbb{C}[X] : \text{OK} \\ \dim\big(E_1(C)\big) = 1 \ \text{ OK} \\ \dim\big(E_2(C)\big) = 2 \ \text{ NON} \end{cases} \qquad (\text{car } \mathrm{Sp}(C) = \{1, 2\}).$$

(b) De manière plus générale, si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie que χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors

$$M \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

En effet, χ_M scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donne que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathbb{R}$, et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$, en notant $E_{\lambda,\mathbb{K}}(M)$ l'espace propre de M dans $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors

$$\dim_{\mathbb{C}}\big(E_{\lambda,\mathbb{C}}(M)\big) = n - \mathrm{rg}(M - \lambda I_n) = \dim_{\mathbb{R}}\big(E_{\lambda,\mathbb{R}}(M)\big)$$

(car le rang d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est le même, que l'on voit la matrice dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ou dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, c'est une conséquence de l'algorithme de Gauss). Ces égalités permettent alors de conclure :

$$M \text{ diagonalisable dans } \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)} \dim_{\mathbb{R}}\big(E_{\lambda,\mathbb{R}}(M)\big) = n \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} \dim_{\mathbb{C}}\big(E_{\lambda,\mathbb{C}}(M)\big) = n \Leftrightarrow \ M \text{ diag}$$

• Montrons que C est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (*vous n'avez pas de méthode dans le cours pour trouver une telle matrice, l'énoncé est censé vous guider*).

★ Espace propre associé à 1 (ça servira pour la suite) : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_1(C) \quad \Leftrightarrow \quad (C - I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ x + 2y - z &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc

$$E_1(C) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

★ Montrons que C est semblable à T.

On cherche donc $(U, V, W) \in \big(\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)^3$ tel que la matrice par blocs $P = \left(\begin{array}{c|c|c} U & V & W \end{array} \right)$ soit inversible et vérifie
$$P^{-1}CP = T.$$

Or, avec P sous cette forme,

$$\begin{aligned}
P^{-1}CP = T \quad &\Leftrightarrow \quad CP = PT \text{ et } P \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c|c} CU & CV & CW \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 2U & U+2V & W \end{array} \right) \text{ (par calcul matriciel par blocs) et } P \text{ est inversib} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} CU = 2U \\ CV = U + 2V \\ CW = W \end{cases} \quad \text{et } P \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (C - 2I_3)U = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ (C - 2I_3)V = U \\ (C - I_3)W = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \end{cases} \quad \text{et } P \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (C - 2I_3)^2 V = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ U = (C - 2I_3)V \\ (C - I_3)W = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \end{cases} \quad \text{et } P \text{ est inversible}
\end{aligned}$$

On veut donc
$$W \in \mathrm{Ker}(C - I_3) = E_1(C), \qquad V \in \mathrm{Ker}\big((C - 2I_3)^2\big),$$
et on posera
$$U = (C - 2I_3)V.$$

On fera attention : comme on veut $P = \left(\begin{array}{c|c|c} U & V & W \end{array} \right)$ *inversible, il faut* $U \neq 0_{3,1}$, *donc* $V \notin \mathrm{Ker}(C - 2I_3) = E_2(C)$. Il restera à vérifier que P est bien inversible.

On a calculé avant $E_1(C)$. On prend par exemple $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puis,

$$(C - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prend par exemple $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et on a donc :

$$U = (C - 2I_3)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors
$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$
vérifie bien
$$CP = PT,$$
et comme $\det(P) = -1 \neq 0$, P est bien inversible. Donc ce qui précède permet d'affirmer

$$\boxed{P^{-1}CP = T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 9. A est une matrice triangulaire, donc on a directement

$$\chi_A = (X-a)^2(X-b)^2.$$

Comme $a \neq b$, a et b sont valeurs propres doubles de A. Donc

$$A \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X] \text{ (OK)} \\ \dim(E_a) = 2 \\ \dim(E_b) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X] \text{ (OK)} \\ \mathrm{rg}(A - aI_4) = 4-2 = 2 \\ \mathrm{rg}(A - bI_4) = 4-2 = 2 \end{cases}$$

(par le théorème du rang).

Méthode 1 :
★ La matrice

$$A - aI_4 = \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ 0 & b-a & z & -y \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

est au moins de rang 2 car les colonnes 2 et 4 ne sont pas colinéaires (car $b-a \neq 0$). Elle sera de rang exactement 2 si et seulement si la seconde et la troisième sont colinéaires, c'est-à-dire (puisque $b-a \neq 0$) s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ et $z = \lambda(b-a)$.
★ La matrice

$$A - bI_4 = \begin{pmatrix} a-b & x & y & z \\ 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 0 & a-b & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est au moins de rang 2 car les lignes 1 et 3 ne sont pas colinéaires (car $a-b \neq 0$). Elle sera de rang exactement 2 si et seulement si la deuxième et la troisième ligne sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mu(a-b)$ et $y = -\mu x$ (ce qui est la même condition qu'avant avec $\lambda = -\mu$).
Donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow (x,y,z) \in S = \left\{ \big(x, \lambda x, \lambda(b-a)\big),\ (\lambda, x) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

Méthode 2 :
Soit $X = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, alors

$$X \in E_a \Leftrightarrow \begin{cases} xt_2 + yt_3 + zt_4 = 0 \\ (b-a)t_2 + zt_3 - yt_4 = 0 \\ xt_4 = 0 \\ (b-a)t_4 = 0 \end{cases}.$$

Comme on suppose $b-a \neq 0$, L_4 devient $t_4 = 0$ et donc

$$X \in E_a \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t_3}{b-a}\big(y(b-a) - zx\big) = 0 \\ t_2 = -\dfrac{z}{b-a} t_3 \\ t_4 = 0 \end{cases}.$$

- Si $y(b-a) - zx \neq 0$, alors $t_3 = 0$, donc $t_2 = 0$, donc $E_a = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, et donc

$$\dim\big(E_a\big) = 1 \neq 2,$$

donc A n'est pas diagonalisable.
• Si $y(b-a)-zx=0$, alors

$$X \in E_a \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = -\dfrac{z}{b-a}t_3 \\ t_4 = 0 \end{cases},$$

donc

$$E_a = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-z\\b-a\\0\end{pmatrix}\right)$$

est bien de dimension 2 (car engendré par deux vecteurs clairement libres).

$$X = \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_4\end{pmatrix} \in E_b \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)t_1 + xt_2 + yt_3 + zt_4 = 0 \\ zt_3 - yt_4 = 0 \\ (a-b)t_3 + xt_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Comme on suppose $b-a \neq 0$, on a

$$X \in E_b \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{x}{b-a}t_2 + \dfrac{yx+z(b-a)}{(b-a)^2}t_4 \\ 0 = \big(zx - y(b-a)\big)\dfrac{t_4}{b-a} \\ t_3 = \dfrac{x}{b-a}t_4 \end{cases}.$$

• Si $zx-y(b-a) \neq 0$, alors $t_4=0$, puis $t_3=0$ et donc $E_b = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}x\\b-a\\0\\0\end{pmatrix}\right)$, et donc

$$\dim\big(E_b\big) = 1 \neq 2,$$

donc A n'est pas diagonalisable.
• Si $zx-y(b-a)=0$, alors

$$X \in E_b \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{x}{b-a}t_2 + \dfrac{yx+z(b-a)}{(b-a)^2}t_4 \\ t_3 = \dfrac{x}{b-a}t_4 \end{cases},$$

donc

$$E_b = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}x\\b-a\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}yx+z(b-a)\\0\\x(b-a)\\(b-a)^2\end{pmatrix}\right)$$

est bien de dimension 2 (car engendré par deux vecteurs clairement libres, puisque $b-a \neq 0$).
Donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow zx = (b-a)y}.$$

(c'est la même condition pour a et b).

Exercice 10.

1. • On a

$$\phi_A\big(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})\big) \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

car $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est stable par produit et soustraction.
• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(M,N) \in \big(\mathrm{M}_2(\mathbb{R})\big)^2$, par bilinéarité du produit matriciel, on a

$$\phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M+N) - (\lambda M+N)A = \lambda AM + AN - \lambda MA - NA = \lambda\phi_A(M) + \phi_A(N).$$

Donc ϕ_A est linéaire.
• Donc ϕ_A est un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
• Calculons la matrice de ϕ_A dans la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.
$\phi_A\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
$\phi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$\phi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
$\phi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc la matrice de ϕ_A dans cette base est :

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Comme les colonnes 1 et 4 de B sont opposées et de mêmes pour les colonnes 2 et 3,

$$\mathrm{rg}(\phi_A) = \mathrm{rg}(B) \leq 2.$$

Comme les colonnes 1 et 2 de B sont libres,

$$\mathrm{rg}(\phi_A) = \mathrm{rg}(B) \geq 2.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{rg}(\phi_A) = 2}.$$

Donc $\boxed{0}$ est valeur propre de A, et

$$\boxed{\dim\big(E_0(\phi_A)\big) = 4 - 2 = 2}$$

(par le théorème du rang).

2. Calculons le polynôme caractéristique de B. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3+L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1}}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3-C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4-C_1}}{=} \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 & -\lambda \\ 1 & \lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{par rapport à } L_4}{=} -\lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -\lambda \\ \lambda & -\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{par rapport à } L_3}{=} -\lambda^2 \begin{vmatrix} -2 & -\lambda \\ -\lambda & -2 \end{vmatrix} \\
&= \; = -\lambda^2(4-\lambda^2) \\
&= \lambda^2(\lambda-2)(\lambda+2)
\end{aligned}$$

Donc

$$\chi_B = X^2(X-2)(X+2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(B) = \{0, 2, -2\}.$$

De plus, 2 et -2 sont des valeurs propres simples, donc

$$\dim\big(E_2(B)\big) = \dim\big(E_{-2}(B)\big) = 1,$$

et 0 est une valeur propre double, donc on a seulement

$$1 \leq \dim\big(E_0(B)\big) \leq 2.$$

Mais, on a déjà calculé $\dim\big(E_0(B)\big) = \dim\big(E_0(\phi_A)\big)$, et on a trouvé 2.
Or, par le cours,

$$B \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_B \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X] \quad \text{OK} \\ \dim\big(E_2(B)\big) = 1 \quad \text{OK} \\ \dim\big(E_{-2}(B)\big) = 1 \quad \text{OK} \\ \dim\big(E_0(B)\big) = 2 \quad \text{OK car } \mathrm{rg}(\phi_A) = 2 \end{cases}.$$

Donc B est diagonalisable (dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$), donc ϕ_A est diagonalisable.
Autre façon de le justifier :

$B \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$,

$$\dim\big(E_0(B)\big) + \dim\big(E_{-2}(B)\big) + \dim\big(E_2(B)\big) = 2+1+1 = 4 = \text{taille de } B$$

(et 0, -2 et 2 sont trois éléments différents de $\mathbb{R}$), donc B est diagonalisable dans $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$.

★ Espace propre associé à 0 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_0(B) \Leftrightarrow BX = 0_{4,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = z \\ x = t \end{array} \right. .$$

Donc

$$E_0(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ x \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Or, la matrice qui a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme matrice-colonne coordonnées dans la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et

la matrice qui a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme matrice-colonne coordonnées dans la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc

$$\boxed{E_0(\phi_A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)}.$$

★ Espace propre associé à 2 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_2(B) \quad \Leftrightarrow \quad (B - 2I_4)X = 0_{4,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - y + z & = & 0 \\ -x - 2y + t & = & 0 \\ x - 2z - t & = & 0 \\ y - z - 2t & = & 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - y + z & = & 0 \\ -x - 2y + t & = & 0 \\ -2z - 2y & = & 0 \\ -2x - 2t & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = x \\ t = -x \\ y = -x \end{array} \right.$$

Donc

$$E_2(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \\ -x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Puis, la matrice qui a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme matrice-colonne coordonnées dans la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{E_2(\phi_A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)}.$$

★ Espace propre associé à -2 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_2(B) \quad \Leftrightarrow \quad \big(B-(-2)I_4\big)X = 0_{4,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2x-y+z & = & 0 \\ -x+2y+t & = & 0 \\ x+2z-t & = & 0 \\ y-z+2t & = & 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3+L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{lcl} 2x-y+z & = & 0 \\ -x+2y+t & = & 0 \\ 2z+2y & = & 0 \\ 2x+2t & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=-x \\ t=-x \\ y=x \end{array} \right.$$

Donc

$$E_{-2}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \\ -x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Puis, la matrice qui a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme matrice-colonne coordonnées dans la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{E_{-2}(\phi_A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)}.$$

Exercice 11. 2) Montrons le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$:
Initialisation : pour $k=1$, c'est l'hypothèse.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $g \circ f^k - f^k \circ g = \alpha k f^k$. Alors en appliquant f à gauche, et en utilisant $f \circ g = g \circ f - \alpha f$ (retraduction de l'hypothèse), on a :

$$\begin{aligned} \alpha k f^{k+1} &= f \circ (\alpha k f^k) \\ &= f \circ \big(g \circ f^k - f^k \circ g\big) \\ &= f \circ g \circ f^k - f^{k+1} \circ g \\ &= (g \circ f - \alpha f) \circ f^k - f^{k+1} \circ g \\ &= g \circ f^{k+1} - \alpha f^{k+1} - f^{k+1} \circ g \end{aligned}$$

d'où, en regroupant les f^{k+1}, on a bien

$$g \circ f^{k+1} - f^{k+1} \circ g = \alpha\,(k+1)\,f^{k+1}.$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$g \circ f^k - f^k \circ g = \alpha k f^k.$$

Remarque. Cela reste vraie pour $k=0$ avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}$.

2) Raisonnons par l'absurde, supposons f non nilpotente. Donc $f^k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On note ϕ l'application donnée par l'énoncé. Elle est linéaire et $\dim\big(\mathcal{L}(E)\big) = n^2$. Donc ϕ possède un nombre finie de valeurs propres différentes (au plus n^2).
D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\phi(f^k) = \alpha\,k\,f^k.$$

Donc f^k est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha\, k$ (car il est non nul, car f n'est pas nilpotent d'après notre raisonnement par l'absurde...). Donc ϕ possède une infinité de valeurs propres (car $\alpha \neq 0$, donc les αk pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux différents). ABSURDE. Donc f est nilpotente.

Exercice 12.

1. • $\boxed{U \text{ est symétrique réelle, donc diagonalisable dans } \mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$
 • U est une matrice de rang 1. Donc 0 est valeur propre et

$$\boxed{\dim(E_0) = n - 1}$$

par le théorème du rang.
 • On a trouvé 0 qui est valeur propre de multiplicité exactement

$$n - 1 = \dim(E_0)$$

car U est diagonalisable. Or, la somme des multiplicités des valeurs propres fait n, donc il reste une autre valeur propre λ et elle est de multiplicité 1.
 • Puis, la trace de la matrice vaut la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc

$$n = \mathrm{tr}(U) = (n-1) \times 0 + 1 \times \lambda = \lambda.$$

Donc

$$\boxed{n \text{ est valeur propre de multiplicité 1 de } U},$$

et on retrouve que U est diagonalisable (car $\dim(E_0) = n - 1$ et $\dim(E_n) = 1$ (car n valeur propre simple), donc la somme fait $n =$ la taille de U).

Remarque. On peut aussi remarquer que la somme de chaque ligne de U fait n, donc

$$U \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

et comme $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne non nulle, on retrouve que n est valeur propre de U.

 • $U^2 = nU$, puis montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{U^p = n^{p-1} U}.$$

Par contre, $\boxed{U^0 = I_n}$.
Initialisation : pour $p = 1$, on a

$$n^{1-1} U = U = U^1$$

car $n^0 = 1$.
Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $U^p = n^{p-1} U$. Alors

$$U^{p+1} = U^p \times U = n^{p-1} U \times U = n^{p-1} U^2 = n^{p-1}.nU = n^{(p+1)-1} U,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$U^p = n^{p-1} U.$$

 • On peut calculer U^p à l'aide de la diagonalisation de U : si on note $D = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, n)$, le début de la question montre qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec

$$P^{-1} U P = D, \qquad \text{soit} \qquad U = P D P^{-1}.$$

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$U^p = P D^p P^{-1} = P\mathrm{diag}(0^p, \ldots, 0^p, n^p) P^{-1} = P\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, n^p) P^{-1} = n^{p-1} P\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, n) P^{-1} = n^{p-1} U.$$

On a utilisé $p \in \mathbb{N}^*$ pour affirmer $0^p = 0$ (ce qui est faux pour $p = 0$...).

Remarque. Le polynôme caractéristique se calcule : l'opération $L_n \leftarrow L_1 + \cdots + L_n$ donne, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\chi_U(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_n \leftarrow L_1+\cdots+L_n}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda-n & \dots & \dots & \dots & \lambda-n \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-n) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Puis, les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ donnent

$$\chi_U(\lambda) = (\lambda - n) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda - n).$$

Donc

$$\chi_U = X^{n-1}(X-n),$$

puis on retrouve

$$\mathrm{Sp}(U) = \{0, n\}.$$

2. ★ On essaye de faire intervenir la matrice U de la question d'avant :

$$A = bU + (a-b)I_n.$$

Puis, si on note $D = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, n)$, la question précédente montre qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec

$$P^{-1}UP = D.$$

Alors

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1}\big(bU + (a-b)I_n\big)P \\
&= bP^{-1}UP + (a-b)P^{-1}I_nP \\
&= bD + (a-b)I_n \\
&= \mathrm{diag}\big(a-b, \dots, a-b, nb + a - b\big)
\end{aligned}$$

Donc A est semblable à une matrice diagonale, donc A est diagonalisable.

Remarque. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on peut alors dire directement que A est symétrique réelle donc diagonalisable.

★ Calcul de puissance : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = \big(bU + (a-b)I_n\big)^p$, comme I_n commute avec U, par la formule du binôme de Newton (appliquée deux fois : une fois pour la première égalité, une fois pour la dernière égalité), on a (à l'aide de la question précédente) :

$$\begin{aligned} A^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (bU)^k \big((a-b)I_n\big)^{p-k} \\ &= (a-b)^p I_n + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{k-1} b^k (a-b)^{p-k} U \\ &= \boxed{(a-b)^p I_n + \frac{\big(nb + (a-b)\big)^p - (a-b)^p}{n} U} \end{aligned}$$

Exercice 13. 1) A est diagonalisable, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ avec $D = P^{-1}AP$ diagonale. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D^k = P^{-1}A^kP,$$

et donc

$$P^{-1}BP = P^{-1}\big(\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_p A^p\big) = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p} \alpha_k A^k\right)P = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k P^{-1}A^kP = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k D^k$$

est diagonale (un produit de matrices diagonales l'est encore, et une combinaison linéaire de matrices diagonales l'est encore), donc B est diagonalisable, puisque semblable à une matrice diagonale.
Si on note λ_i le i-ième coefficient de la diagonale de D (rappelons que les λ_i forment alors le spectre de A), alors

$$x_i := \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \lambda_i^k = Q(\lambda_i)$$

est le i-ième coefficient de la diagonale de $P^{-1}BP$, et donc la i-ième colonne de P est un vecteur propre de B pour la valeur propre x_i.
De plus, l'ensemble des x_i forment les valeurs propres de $P^{-1}BP$ (car le spectre d'une matrice diagonale est l'ensemble de ses coefficients diagonaux), donc de B (car B est semblable à $P^{-1}BP$). Donc

$$\mathrm{Sp}(B) = \big\{Q(\lambda_i) \text{ pour } \lambda_i \text{ sur la diagonale de } D\big\}.$$

Comme les éléments de la diagonale de D sont les éléments du spectre de A (répétés éventuellement plusieurs fois), on a

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \big\{Q(\lambda) \text{ pour } \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\big\}}.$$

2) ★ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $Q(\lambda) = \mu$, et $X \in E_\lambda(A)$. alors

$$AX = \lambda X.$$

Montrons alors par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que

$$A^kX = \lambda^kX.$$

Initialisation : pour $k = 0$,

$$A^0X = I_nX = X$$

et $\lambda^0 = 1$, donc $\lambda^0X = X$, on a bien l'égalité voulue.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $A^kX = \lambda^kX$. Alors

$$A^{k+1}X = A \times A^kX = A \times (\lambda^kX) = \lambda^kAX = \lambda^k.\lambda X = \lambda^{k+1}X,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$A^kX = \lambda^kX.$$

Donc
$$BX = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k A^k X = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k \lambda^k X = Q(\lambda)X = \mu X,$$
et donc $X \in E_\mu(B)$. Donc
$$E_\lambda(A) \subset E_\mu(B).$$
Cela est vrai pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $Q(\lambda) = \mu$, donc
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda)=\mu} E_\lambda(A) \subset E_\mu(B)$$
(car $E_\mu(B)$ est un espace vectoriel).
On sait ensuite que la somme de plusieurs espaces propres de A associés à des valeurs propres deux à deux différentes est directe. Donc
$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda)=\mu} E_\lambda(A) \subset E_\mu(B).$$
★ Comme la somme est directe et qu'on a l'inclusion remarquée juste avant, pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$ on a
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda)=\mu} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda)=\mu} E_\lambda(A)\right) \leq \dim\big(E_\mu(B)\big),$$
soit :
$$\dim\big(E_\mu(B)\big) - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda)=\mu} \dim\big(E_\lambda(A)\big) \geq 0.$$
Comme A est diagonalisable, on a
$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big)$$
Puis, $\mathrm{Sp}(B) = \big\{Q(\lambda) \text{ pour } \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\big\}$, donc
$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(B)} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda)=\mu} \dim\big(E_\lambda(A)\big) \leq \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(B)} \dim\big(E_\mu(B)\big) \leq n$$
(et cette dernière inégalité est en fait une égalité, puisque B est diagonalisable).
Cela donne en particulier
$$\sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(B)} \left(\dim\big(E_\mu(B)\big) - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda)=\mu} \dim\big(E_\lambda(A)\big)\right) \leq n - n = 0,$$
et comme c'est une somme de réels tous positifs, elle doit être positive. Elle est donc nulle, et c'est donc une somme nulle de réels positifs, donc tous ces réels sont nuls, ce qui donne
$$\dim\big(E_\mu(B)\big) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda)=\mu} \dim\big(E_\lambda(A)\big)$$
pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$.
On a une inclusion et l'égalité des dimensions, on conclut donc :
$$\boxed{E_\mu(B) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) : Q(\lambda)=\mu} E_\lambda(A)}$$
pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$.

Exercice 14. On a $P = \begin{pmatrix} C_1 \mid \dots \mid C_n \end{pmatrix}$, donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ donne

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{soit} \qquad A\begin{pmatrix} C_1 \mid \dots \mid C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \mid \dots \mid C_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

puis par calcul matriciel par blocs,

$$\begin{pmatrix} AC_1 \mid \dots \mid AC_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 C_1 \mid \dots \mid \lambda_n C_n \end{pmatrix},$$

et donc on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$AC_i = \lambda_i C_i, \qquad \text{soit} \qquad C_i \in E_{\lambda_i}(A).$$

Donc la famille $(C_i)_{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda}$ est une famille de vecteurs de $E_\lambda(A)$, libre car extraite de la famille des colonnes de P, elle-même libre puisque P est inversible. Donc

$$\dim\big(E_\lambda(A)\big) \geq \mathrm{Card}\big\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\big\},$$

soit

$$\dim\big(E_\lambda(A)\big) - \mathrm{Card}\big\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\big\} \geq 0.$$

Puis, par union disjointe, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) \geq \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Card}\big\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\big\} &= \mathrm{Card}\left(\bigcup_{\lambda \in \mathrm{Sp(A)}} \{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\}\right) \\ &= \mathrm{Card}\big\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)\big\} \\ &= n \end{aligned}$$

(puisque chaque coefficient de la diagonale de $P^{-1}AP$ est dans le spectre de A).
Comme d'autre part, on sait

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) \leq n$$

puisque A est de taille n (cela provient de ce que des espaces propres de A associés à des valeurs propres deux à deux différentes sont toujours en somme directe), on en déduit

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Card}\big\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\big\}$$

soit

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \underbrace{\Big(\dim\big(E_\lambda(A)\big) - \mathrm{Card}\big\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\big\}\Big)}_{\geq 0} = 0$$

Or, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul, donc pour tout $\lambda \in$ Sp(A),

$$\dim\big(E_\lambda(A)\big) - \mathrm{Card}\big\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\big\} = 0$$

soit

$$\dim\big(E_\lambda(A)\big) = \mathrm{Card}\big\{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda\big\} = \mathrm{Card}\left((C_i)_{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda}\right).$$

La famille libre $(C_i)_{i \in [\![1,n]\!] : \lambda_i = \lambda}$ d'éléments de $E_\lambda(A)$ a donc autant d'éléments que la dimension de $E_\lambda(A)$, c'est donc bien une base de $E_\lambda(A)$.

Exercice 15.

1. Si M est une matrice de rang 1 alors 0 est valeur propre et

$$\dim(E_0) = n - 1$$

par le théorème du rang (si $n \geq 2$), donc 0 est de multiplicité au moins égale à $(n-1)$.
Comme la somme des multiplicités des différentes valeurs propres fait n,

- soit 0 est de multiplicité $n-1$ et il reste alors une valeur propre α (non nulle) de multiplicité 1,
- soit 0 est de multiplicité n, et il n'y a pas d'autre valeur propre.

Dans les deux cas, la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité fait $\operatorname{tr}(M)$, et donc dans le premier cas on a

$$\operatorname{tr}(M) = (n-1) \times 0 + 1 \times \alpha = \alpha \neq 0,$$

et pour le deuxième cas on a

$$\operatorname{tr}(M) = n \times 0 = 0.$$

Donc :

- Si $\operatorname{tr}(M) \neq 0$, alors 0 est de multiplicité

$$n - 1 = \dim\big(E_0\big),$$

et $\operatorname{tr}(M)$ est une valeur propre de multiplicité 1, donc

$$\dim\big(E_{\operatorname{tr}(M)}\big) = 1,$$

et donc la somme des dimensions des espaces propres fait la taille de la matrice n, donc M est diagonalisable.

- Si $\operatorname{tr}(M) = 0$, alors M n'a qu'une seule valeur propre, 0, qui est de multiplicité

$$n \neq \dim(E_0) = n - 1,$$

donc M n'est pas diagonalisable.

Donc M est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(M) \neq 0$.

2. • Soit M une matrice de rang 1. Notons $(C_1, \ldots, C_n)$ les colonnes de M. Comme $\operatorname{rg}(M) = 1$, il existe i_0 tel que C_{i_0} soit non nul (car la matrice nulle n'est pas de rang 1). Puis,

$$1 = \operatorname{rg}(M) = \dim\big(\operatorname{Im}(M)\big),$$

et $C_{i_0} \in \operatorname{Im}(M)$ avec C_{i_0} non nul, permet de conclure que (C_{i_0}) est une base de $\operatorname{Im}(M)$. Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$C_i \in \operatorname{Im}(M) = \operatorname{Vect}(C_{i_0}),$$

donc il existe λ_i avec

$$C_i = \lambda_i C_{i_0}.$$

Donc si on note

$$X = C_{i_0} \qquad \text{et} \qquad Y^\top = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

on a bien :

$$M = XY^\top.$$

Puis, $X = C_{i_0}$ est non nul par définition de i_0, et Y est non nul car $y_{i_0} = 1$ (ou sinon, si $Y = 0_{n,1}$, alors $M = X \times 0_{n,1}^\top = 0_n$ ne serait pas de rang 1).

• Réciproquement, soit X et $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nuls. Alors il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $X_{i,1} \neq 0$ et $Y_{j,1} \neq 0$. Alors la formule du produit matriciel donne

$$(XY^\top)_{i,j} = X_{i,1}(Y^\top)_{1,j} = X_{i,1}Y_{j,1} \neq 0$$

donc $M = XY^\top$ est non nul, donc $\operatorname{rg}(M) \geq 1$.
Puis, si on note C_i la i-ème colonne de M, alors $M = XY^\top$ donne $C_i = Y_{i,1}X$, donc $\operatorname{Im}(M) \subset \operatorname{Vect}(X)$. Donc

$$\operatorname{rg}(M) \leq \dim\big(\operatorname{Vect}(X)\big) \leq 1.$$

Donc
$$\operatorname{rg}(M) = 1.$$

- On a donc bien l'équivalence voulue.
- Remarquons que
$$Y^\top X = \sum_{i=1}^{n} X_{i,1} Y_{i,1},$$
or le coefficient sur la i-ième ligne de C_i est celui de $Y_{i,1}X$, soit $Y_{i,1}X_{i,1}$, et donc
$$Y^\top X = \operatorname{tr}(M).$$
On a alors :
$$M^2 = X(Y^\top X)Y^\top = X\big(\operatorname{tr}(M)\big)Y^\top = \operatorname{tr}(M)XY^\top = \operatorname{tr}(M)M.$$

Exercice 16. Comme A est de rang 2, 0 est valeur propre et
$$\dim(E_0) = n - 2$$
par le théorème du rang (car $n \geq 3$), donc 0 est de multiplicité au moins $n-2$.
Puis, A est trigonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec
$$T = P^{-1}AP$$
triangulaire, et sur la diagonale de T, il y a au moins $n-2$ fois la valeur 0, puisque 0 est valeur propre de A, donc de T, avec une multiplicité d'au moins $n-2$.
Notons λ et μ les deux dernières valeurs sur la diagonale de T. Ce sont alors des valeurs propres de T, donc de A. Donc
$$\dim\big(E_\lambda(A)\big) \geq 1 \qquad \text{et} \qquad \dim\big(E_{-\lambda}(A)\big) \geq 1$$
(mais on peut avoir $\lambda = \mu$...).
Puis, comme deux matrices semblables ont même trace,
$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(T) = (n-2)\cdot 0 + \lambda + \mu,$$
on a donc (puisqu'on suppose $\operatorname{tr}(A) = 0$) :
$$\lambda = -\mu.$$

★ Si $\lambda \neq 0$ alors $\mu \neq 0$ et on a A diagonalisable. En effet,
$$\dim\big(E_0(A)\big) = n-2 \qquad \text{et} \qquad \dim\big(E_\lambda(A)\big) \geq 1 \qquad \text{et} \qquad \dim\big(E_{-\lambda}(A)\big) \geq 1,$$
donc
$$\dim\big(E_0(A)\big) + \dim\big(E_\lambda(A)\big) + \dim\big(E_{-\lambda}(A)\big) \geq n = \text{taille de } A$$
et 0, λ, $-\lambda$ sont deux à deux différents. Ceci suffit pour affirmer que A est diagonalisable.

★ Si $\lambda = 0 = \mu$ alors T a une diagonale nulle. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$.

D'où
$$A^n = P\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P0_nP^{-1} = 0_n,$$
contradiction. Donc ce cas ne se réalise pas.
(voir l'exercice 26 du TD Algèbre Linéaire ou l'exercice 23 du TD Complément d'algèbre linéaire pour le calcul de la puissance n-ème de cette matrice).
Autre rédaction pour 5/2 : si $\lambda = 0 = \mu$ alors $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$, donc
$$\chi_A = X^n,$$
et le théorème de Cayley-Hamilton donne alors
$$A^n = 0_n,$$
contradiction. Donc ce cas ne se réalise pas.
Donc A est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(A)$ possède trois valeurs propres.

Remarque. Si on préfère, on distingue suivant la valeur de n_0, multiplicité de 0 :

- Si $n_0 = n-2$, alors soit il existe $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres non nulles de multiplicité 1 chacune, soit il existe $\lambda \neq 0$ valeur propre de multiplicité 2, car la somme des multiplicités des valeurs propres doit faire n, or 0 étant de multiplicité $n-2$, il ne reste que 2 ou $1+1$ comme multiplicités possible. Mais si λ est de multiplicité 2, alors
$$0 = \mathrm{tr}(A) = (n-2)\times 0 + 2\lambda$$
donne $\lambda = 0$, impossible. Donc si $n_0 = n-2$, nécessairement A a deux autres valeurs propres de multiplicités 1, donc la dimension de l'espace propre associé fait 1 aussi, et donc la somme des dimensions des espaces propres fait n, donc A est diagonalisable.
- Si $n_0 = n-1$, comme la somme des multiplicités des valeurs propres doit faire n, il reste $\lambda \neq 0$ valeur propre de multiplicité 1, et alors
$$0 = \mathrm{tr}(A) = (n-1)\times 0 + 1\times\lambda$$
donne $\lambda = 0$, absurde. Donc $n_0 \neq n-1$.
- Si $n_0 = n$, alors 0 est la seule valeur propre de A. Donc $\chi_A = X^n$, et le théorème de Cayley-Hamilton donne alors $A^n = 0_n$, contradiction. Donc $n_0 = n$ est impossible aussi.

Il ne reste donc que le cas diagonalisable.

Exercice 17.

1. • Pour montrer que $U = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ est vecteur propre, puisque U est **non nul**, il suffit de vérifier (par le calcul) que
$$AU = A\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ est proportionnel à } U = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$
Ici on trouve
$$AU = A\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = 3U,$$
donc U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

   Remarque. On sait que 3 est valeur propre de A, donc racine de χ_A, donc on sait que l'on va pouvoir factoriser χ_A par $X-3$, et le quotient étant de degré 2, on saura le factoriser...

   • Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda+6 & -1 & 8 \\ -8 & \lambda-1 & -8 \\ -9 & 1 & \lambda-11 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{par rapport à } L_1}{=} (\lambda+6)\big((\lambda-1)(\lambda-11)+8\big) + (88-8\lambda-72) + 8(-8-9+9\lambda) \\
&= (\lambda+6)(\lambda^2-12\lambda+19) - 8\lambda + 16 + 8(-17+9\lambda) \\
&= \lambda^3 - 12\lambda^2 + 19\lambda + 6\lambda^2 - 72\lambda + 114 - 8\lambda + 16 + 72\lambda - 136 \\
&= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \\
&= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)
\end{aligned}$$
Donc
$$\chi_A = (X-1)(X-2)(X-3) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{1,2,3\}.$$

Remarque. Puisque l'on sait que $U = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A, on peut utiliser ce fait pour simplifier le calcul de χ_A (on aura une forme partiellement factorisée) : on fait l'opération $C_1 \leftarrow 4C_1 - 4C_2 - 5C_3$ (qui correspond au produit matriciel AU). **Attention :** comme on remplace C_1 par $4C_1 + ...$, il faut diviser par 4, sinon on modifie le déterminant. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) \underset{C_1 \leftarrow 4C_1 - 4C_2 - 5C_3}{=} & \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 4\lambda - 12 & -1 & 8 \\ -4\lambda + 12 & \lambda - 1 & -8 \\ -5\lambda + 15 & 1 & \lambda - 11 \end{vmatrix} \\
= & \frac{1}{4}(\lambda - 3) \begin{vmatrix} 4 & -1 & 8 \\ -4 & \lambda - 1 & -8 \\ -5 & 1 & \lambda - 11 \end{vmatrix} \\
\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} & \frac{1}{4}(\lambda - 3) \begin{vmatrix} 4 & -1 & -8 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -5 & 1 & \lambda - 11 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En développant suivant la deuxième ligne, on a alors

$$\chi_A(\lambda) = \frac{1}{4}(\lambda - 3)(\lambda - 2) \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -5 & \lambda - 11 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1}{=} \frac{1}{4}(\lambda - 3)(\lambda - 2) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -5 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \text{ car } A \text{ a trois valeurs propres réelles différentes et car } A \text{ est de taille } 3}$.
De plus, les espaces propres sont tous de dimension 1 (puisque les racines sont toutes simples).
★ La recherche des espaces propres qui suit est basé sur l'idée suivante : si on sait que

$$\dim\big(E_\lambda(A)\big) = 1$$

et que l'on trouve un vecteur $X \in E_\lambda(A)$ **non nul**, alors c'est une base de $E_\lambda(A)$ (tout vecteur non nul d'une droite vectorielle en est une base).

★ Espace propre associé à 1 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -7 & 1 & -8 \\ 8 & 0 & 8 \\ 9 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $C_1 - C_2 - C_3 = 0_{3,1}$ (donc $(A - I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$) et que $\dim\big(E_1(A)\big) = 1$, on a

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

(on a noté C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de la dernière matrice écrite).

★ Espace propre associé à 2 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_2(A) \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 1 & -8 \\ 8 & -1 & 8 \\ 9 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $C_1 - C_3 = 0_{3,1}$ (donc $(A - 2I_3)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 0_{3,1}$) et que $\dim\big(E_2(A)\big) = 1$, on a

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

(on a noté C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de la dernière matrice écrite).
★ Espace propre associé à 3 : on sait $\dim\big(E_3(A)\big) = 1$, $U \in E_3(A)$ et U non nul. On a donc

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}(U) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}4\\-4\\-5\end{pmatrix}\right)$$

• Par conséquent, comme A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{1,2,3\}$ et qu'on a trouvé une base de chaque espace propre, alors la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\-1 & 0 & -4\\-1 & -1 & -5\end{pmatrix}$ est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix} = D.$$

2. Résolvons $Y^2 = D$.
Analyse : si Y est solution de $Y^2 = D$ alors D et Y commutent. En effet

$$YD = YY^2 = Y^3 = Y^2Y = DY.$$

Or les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales (on pose $Y = \begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix}$, on écrit le système $YD - DY = 0_3$, on trouve directement $b = c = d = f = g = h = 0$, soit Y diagonale). Donc Y est diagonale.
On pose donc $Y = \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{pmatrix}$. L'équation $Y^2 = D$ devient alors :

$$\begin{pmatrix}a^2 & 0 & 0\\0 & b^2 & 0\\0 & 0 & c^2\end{pmatrix} = D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

c'est à dire $a = \pm 1$, $b = \pm\sqrt{2}$ et $c = \pm\sqrt{3}$.
Synthèse : soit $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3) \in \{-1,1\}^3$ et $Y = \begin{pmatrix}\mathrm{e}_1 & 0 & 0\\0 & \mathrm{e}_2\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & \mathrm{e}_3\sqrt{3}\end{pmatrix}$. Alors

$$Y^2 = \begin{pmatrix}\mathrm{e}_1^2 & 0 & 0\\0 & 2\mathrm{e}_2^2 & 0\\0 & 0 & 3\mathrm{e}_3^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix} = D$$

car $(\pm 1)^2 = 1$. Donc Y est solution de $Y^2 = D$.
Conclusion : donc l'ensemble des solutions de l'équation $Y^2 = D$ (d'inconnue $Y \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$) est

$$\mathcal{S}' = \left\{\begin{pmatrix}\mathrm{e}_1 & 0 & 0\\0 & \mathrm{e}_2\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & \mathrm{e}_3\sqrt{3}\end{pmatrix} : (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3) \in \{-1,1\}^3\right\}$$

et donc l'équation $Y^2 = D$ a 8 solutions.

3. • L'étude faite à la question 1 a montré que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ est inversible et

$$P^{-1}AP = D, \qquad \text{soit} \qquad A = PDP^{-1}.$$

Soit $X \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, notons alors $Y = P^{-1}XP$, ce qui donne $X = PYP^{-1}$. On a alors :

$$A = X^2 \quad \Leftrightarrow \quad PDP^{-1} = PYP^{-1}PYP^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad PDP^{-1} = PY^2P^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad D = Y^2$$

(en multipliant par P^{-1} à gauche et P à droite). Donc X est une racine carrée de A si et seulement si Y est une racine carrée de D.
Donc l'étude faite à la question précédente, donne alors

$$\begin{aligned} A = X^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3) \in \{-1, 1\}^3, \quad Y = \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}_2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}_3\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3) \in \{-1, 1\}^3, \quad X = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}_2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}_3\sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

(car $X = PYP^{-1}$).
Donc l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 = A$ (d'inconnue $X \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$) est

$$\mathcal{S} = \left\{ PYP^{-1},\ Y \in \mathcal{S}' \right\} = \left\{ P \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}_2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}_3\sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1} : (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3) \in \{-1, 1\}^3 \right\}.$$

• Puis, l'application

$$\phi : M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \mapsto PMP^{-1} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$$

est injective (elle est même bijective, de bijection réciproque

$$M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}MP \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),$$

ce que l'on vérifie par calcul direct), donc

$$\mathcal{S} = \phi(\mathcal{S}')$$

a le même cardinal que $\mathcal{S}'$, donc est formé de 8 éléments.
Donc A a 8 racines carrées différentes.

4. De façon générale, pour une matrice de taille n qui possède n valeurs propres deux à deux différentes et non nulles, on a 2^n solutions (dans $\mathbb{C}$). En effet, seul 0 n'a qu'une seule racine carrée dans $\mathbb{C}$, tous les autres en ont deux, donc la même démarche s'appliquera.
Si les valeurs propres de A sont toutes strictement positives, on aura même les 2^n solutions dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18. 1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 3 & -2 \\ 1 & \lambda - 5 & 2 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{par rapport à } C_1}{=} (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ \lambda - 5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3)\big(\lambda(\lambda - 5) + 6\big) - (3\lambda - 6) + (6 - 10 + 2\lambda) \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda - 2) - (\lambda - 2) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 1) \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - 4) \end{aligned}$$

donc
$$\chi_A = (X-2)^2(X-4) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{2,4\},$$
4 est valeur propre simple, donc
$$\dim\big(E_4(A)\big) = 1,$$
et 2 est valeur propre double, donc
$$1 \leq \dim\big(E_2(A)\big) \leq 2.$$

Remarque. Le calcul de $\chi_A(\lambda)$ se simplifie si l'on remarque que la somme de chaque ligne de A fait 2 : on fait alors l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, et cela permet d'avoir une forme en partie factorisée.

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 & -2 \\ \lambda-2 & \lambda-5 & 2 \\ \lambda-2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & \lambda-5 & 2 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & \lambda-8 & 4 \\ 0 & -6 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-8 & 4 \\ -6 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\big((\lambda-8)(\lambda+2)+24\big) = (\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8) \\
&= (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-2)
\end{aligned}$$

Puis,
$$A \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X] : \text{OK} \\ \dim\big(E_4(A)\big) = 1 \ \text{ OK} \\ \dim\big(E_2(A)\big) = 2 \end{cases} \qquad (\text{car } \mathrm{Sp}(A) = \{2,4\}).$$

Or,
$$\mathrm{rg}(A-2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 1,$$
donc par le théorème du rang
$$\dim\big(E_2(A)\big) = 3-1 = 2,$$
donc A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Autre façon de le justifier :

$A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$,
$$\dim\big(E_2(A)\big) + \dim\big(E_4(A)\big) = 2+1 = 3 = \text{taille de } A$$
(et 2 et 4 sont deux éléments différents de $\mathbb{R}$), donc A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

★ Espace propre associé à 2 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_2(A) \quad \Leftrightarrow \quad (A-2I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+2z &= 0 \\ -x+3y-2z &= 0 \\ -x+3y-2z &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-3y+2z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Donc

$$E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 3y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix},\ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Notons $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors (U,V) est une famille génératrice de $E_2(A)$, formée de deux vecteurs, et $\dim\big(E_2(A)\big) = 2$, donc (U,V) est une base de $E_2(A)$.

★ Espace propre associé à 4 : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ quelconque, alors

$$X \in E_4(A) \quad\Leftrightarrow\quad (A-4I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-3y+2z &= 0 \\ -x+y-2z &= 0 \\ -x+3y-4z &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x-3y+2z &= 0 \\ 4y-4z &= 0 \\ 6y-6z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

Donc

$$E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Notons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors (W) est une famille génératrice de $E_4(A)$, formée de un seul vecteur, et $\dim\big(E_4(A)\big) = 1$, donc (W) est une base de $E_4(A)$.

Puis, comme A est diagonalisable et qu'on a trouvé une base de chaque espace propre, on en déduit que $\boxed{P = \left(U \mid V \mid W \right)}$ est inversible et

$$\boxed{D := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}.$$

2) La relation précédente se réécrit

$$A = PDP^{-1},$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

(c'est du cours, mais il faut savoir le remontrer : cela se fait par une récurrence). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme D est diagonale,

$$\boxed{A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}}.$$

Puis, A est inversible car $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$, et

$$B = P \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}$$

vérifie

$$AB = PDP^{-1}P\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3,$$

donc

$$B = A^{-1}.$$

Puis, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, de la même manière qu'avant,

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = P\begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-1} \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} (2^{-1})^n & 0 & 0 \\ 0 & (2^{-1})^n & 0 \\ 0 & 0 & (4^{-1})^n \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-n} \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Donc la formule reste vraie pour n négatif.

Remarque. Plus simplement, en utilisant que, si P, Q et R sont inversibles, $(PQR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1}P^{-1}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} = \left(PD^nP^{-1}\right)^{-1} = (P^{-1})^{-1}(D^n)^{-1}P^{-1} = P(D^n)^{-1}P^{-1},$$

et donc tout revient à vérifier que, pour $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$, on a $(D^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{-n} \end{pmatrix}$, ce qui est direct.

3) Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, posons $N = P^{-1}MP$, alors $M = PNP^{-1}$, et donc

$$MA = AM \quad \Leftrightarrow \quad PNP^{-1}PDP^{-1} = PDP^{-1}PNP^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad PNDP^{-1} = PDNP^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad ND = DN.$$

Or, si $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$, alors

$$ND = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 4c \\ 2d & 2e & 4f \\ 2g & 2h & 4j \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad DN = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 4g & 4h & 4j \end{pmatrix},$$

donc

$$ND = DN \Leftrightarrow c = f = g = h = 0.$$

Donc

$$AM = MA \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a, b, d, e, j) \in \mathbb{R}^5 \text{ avec } M = P\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}P^{-1}$$

(On peut ensuite faire le calcul matriciel...).

Remarque. On peut aller plus loin : Notons

$$M_1 = PE_{1,1}P^{-1}, \qquad M_2 = PE_{1,2}P^{-1}, \qquad M_3 = PE_{2,1}P^{-1}, \qquad M_4 = PE_{2,2}P^{-1} \qquad \text{et enfin} \qquad M_5 = PE_{3,3}P^{-1}$$

(où $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,3]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$), alors

$$P\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}P^{-1} = P \times \left(aE_{1,1} + bE_{1,2} + dE_{2,1} + eE_{2,2} + jE_{3,3}\right) \times P^{-1} = aM_1 + bM_2 + dM_3 + eM_4 + jM_5$$

en développant le produit matriciel. Donc pour tout $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$,

$$AM = MA \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{il existe } (a, b, d, e, j) \in \mathbb{R}^5 \text{ avec } M = aM_1 + bM_2 + dM_3 + eM_4 + jM_5.$$

Par conséquent, le commutant de A est

$$\mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5).$$

Puis, pour tout $(a, b, d, e, j) \in \mathbb{R}^5$, si $aM_1 + bM_2 + dM_3 + eM_4 + jM_5 = 0_3$, alors

$$0_3 = aM_1 + bM_2 + dM_3 + eM_4 + jM_5 = P \times \left(aE_{1,1} + bE_{1,2} + dE_{2,1} + eE_{2,2} + jE_{3,3}\right) \times P^{-1},$$

donc en multipliant par P à droite et P^{-1} à gauche,

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{1,2} + dE_{2,1} + eE_{2,2} + jE_{3,3} = P^{-1} \times 0_3 \times P = 0_3,$$

donc

$$a = b = d = e = j = 0.$$

Donc la famille $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ est libre.
Donc la famille $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$ est une base du commutant de A, qui est donc un espace vectoriel de dimension 5.

Exercice 19. 1) La matrice

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}}$$

convient. Remarquons (on en aura besoin à la fin de l'exercice) que, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n X_0$:
Initialisation : pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$, donc

$$A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $X_n = A^n X_0$, alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n X_0$.
2) ★ Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \underset{\text{par rapport à } C_1}{=} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} - 1 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3.$$

Donc

$$\chi_A = (X - 1)^3 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{1\},$$

1 est racine triple de A.

Remarque. On peut remarquer que la somme de chaque ligne de A fait 1, donc l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ pour le calcul de $\chi_A(\lambda)$ permettra d'avoir une forme partiellement factorisée. Ici, ce n'est pas spécialement plus rapide.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors

$$X \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z,$$

donc

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(U)$$

avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\dim(E_1) = 1 \neq 3$$

(multiplicité de 1 comme racine de χ_A), donc A n'est pas diagonalisable.

Autre façon de le justifier :

$A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, χ_A n'a qu'une seule racine (complexe), 1. Donc la somme des dimensions des espaces propres fait

$$\dim\big(E_1(A)\big) = 1 \neq 3 = \text{taille de } A,$$

donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ ou dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.

Remarque. Je rappelle qu'on a fait un exercice en cours qui montre qu'une matrice A avec une seule valeur propre complexe λ est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$...

Cependant,

$$\boxed{\chi_A \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X], \text{ donc } A \text{ est trigonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{R})}.$$

★ Montrons que A est semblable à $T = I_3 + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On cherche donc $(U, V, W) \in \big(\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)^3$ tel que la matrice par blocs $P = \left(\begin{array}{c|c|c} U & V & W \end{array} \right)$ soit inversible et vérifie

$$P^{-1}AP = T.$$

Or, avec P sous cette forme,

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP = T \quad &\Leftrightarrow \quad AP = PT \text{ et } P \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c|c} AU & AV & AW \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} U & U+V & V+W \end{array} \right) \text{ (par calcul matriciel par blocs) et } P \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} AU = U \\ AV = U + V \\ AW = V + W \end{cases} \quad \text{et } P \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (A - I_3)U = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ (A - I_3)V = U \\ (A - I_3)W = V \end{cases} \quad \text{et } P \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (A - I_3)^3 W = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ U = (A - I_3)^2 W \\ V = (A - I_3)W \end{cases} \quad \text{et } P \text{ est inversible}
\end{aligned}$$

On veut donc $W \in \mathrm{Ker}\big((A - I_3)^3\big)$, et on posera

$$U = (A - I_3)^2 W, \qquad V = (A - I_3)W$$

On fera attention : comme on veut $P = \left(\begin{array}{c|c|c} U & V & W \end{array} \right)$ inversible, il faut $U \neq 0_{3,1}$, donc $W \notin \mathrm{Ker}\big(A - I_3)^2\big)$. Il restera à vérifier que P est bien inversible.

Puis,

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (A - I_3)^3 = 0_3,$$

on prend par exemple $W = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, et on a donc :

$$V = (A - I_3)W = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U = (A - I_3)^2 W = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Alors la matrice

$$\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}}$$

vérifie $AP = PT$, et comme $\det(P) = 1 \neq 0$, P est bien inversible. Donc ce qui précède permet d'affirmer

$$\boxed{P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

Autre façon de présenter la recherche de (U, V, W) :
Soit

$$f_A : X \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mapsto AX \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, alors la matrice de f dans la base canonique de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est A, donc dire que T est semblable à A, c'est dire qu'il existe une base (U, V, W) de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{(U,V,W)}(f_A) = T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Or, par définition de ce qu'est la matrice de f_A dans une base, cela revient à trouver une base (U, V, W) de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} AU = f_A(U) = 1.U + 0.V + 0.W = U \\ AV = f_A(V) = 1.U + 1.V + 0.W = U + V \\ AW = f_A(W) = 0.U + 1.V + 1.W = V + W \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (A - I_3)^3 W = (A - I_3)U = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ U = (A - I_3)V = (A - I_3)^2 W \\ V = (A - I_3)W \end{cases}$$

et on retrouve le même système, et on conclut de même (la matrice $P = \begin{pmatrix} U \mid V \mid W \end{pmatrix}$ est alors la matrice de la famille (U, V, W) dans la base canonique, et donc P est inversible si et seulement si (U, V, W) est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

★ On calcule P^{-1} (on en aura besoin dans la suite) :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\\1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

★ Puis,

$$N^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^3 = 0_3$$

donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$,

$$N^k = N^{k-3} \times N^3 = N^{k-3} \times 0_3 = 0_3.$$

Comme I_3 et N commutent, la formule du binôme de Newton s'applique, et donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$:

$$T^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=0_3} = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n-1)}{2}\\0 & 1 & n\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(et cette dernière formule reste vraie pour $n = 1$ et $n = 2$).

★ Puis, on a $P^{-1}AP = T$, donc $A = PTP^{-1}$ (en multipliant par P à gauche, par P^{-1} à droite). Alors, on sait, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

Grâce à la récurrence faite à la question 1 (qui n'était pas demandé, mais qui sert ici), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^nX_0 = PT^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_n \end{pmatrix}.$$

On effectue le produit matriciel, et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2-3n+n^2)u_0 + (4n-2n^2)u_1 + n(n-1)u_2 \\ n(n-1)u_0 + (2-2n^2)u_1 + n(n+1)u_2 \\ n(n+1)u_0 + (-4n-2n^2)u_1 + (n+1)(n+2)u_2 \end{pmatrix},$$

donc

$$u_n = \frac{1}{2}\big((2-3n+n^2)u_0 + (4n-2n^2)u_1 + n(n-1)u_2\big) = \boxed{\frac{(n-1)(n-2)}{2}u_0 - n(n-2)u_1 + \frac{n(n-1)}{2}u_2}.$$

Remarque. On peut éviter le produit matriciel : en effet, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(I_3 + N)^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2,$$

donc

$$\begin{aligned} A^n &= P(I_3+N)^nP^{-1} \\ &= P\left(I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2\right)P^{-1} \\ &= I_3 + nPNP^{-1} + \frac{n(n-1)}{2}PN^2P^{-1} \\ &= I_3 + nPNP^{-1} + \frac{n(n-1)}{2}\big(PNP^{-1}\big)^2 \end{aligned}$$

Or, $A = P(I_3+N)P^{-1} = I_3 + PNP^{-1}$, donc $PNP^{-1} = A - I_3$, et donc

$$A^n = I_3 + n(A-I_3) + \frac{n(n-1)}{2}\big(A-I_3\big)^2.$$

De plus, pour obtenir u_n, on a juste besoin de la première coordonnée de X_n, donc on a juste besoin de la première ligne de A^n (donc de $\big(A-I_3\big)^2$)...

Exercice 20. On cherche donc $(U,V,W) \in \big(\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)^3$ tel que la matrice par blocs $P = \begin{pmatrix} U \mid V \mid W \end{pmatrix}$ soit inversible et vérifie

$$P^{-1}AP = B.$$

Or, avec P sous cette forme,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = B \ &\Leftrightarrow\ AP = PB \text{ et } P \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} AU \mid AV \mid AW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \mid 0 \mid U \end{pmatrix} \text{ (par calcul matriciel par blocs) et } P \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow\ \begin{cases} AU = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ AV = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ AW = U \end{cases} \text{ et } P \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow\ \begin{cases} A^2W = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ AV = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ U = AW \end{cases} \text{ et } P \text{ est inversible} \end{aligned}$$

Or, un calcul direct donne $A^2 = 0_3$, alors la condition $A^2W = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ est automatiquement vérifiée. Le problème est de choisir alors V de sorte que $U = AW$ soit libre avec V. Il faudra bien sûr prendre $W \notin \mathrm{Ker}(A)$ (sinon $U = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$...), et en fait on va voir que ça suffit.

On pose alors $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $U = AW = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Puis, si $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

$$AV = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y - 3z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ 5x - 5y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y + z,$$

donc $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient (et ce V est bien libre avec U). *Il est bien important de comprendre que l'on a besoin que d'<u>une seule</u> solution V, donc on choisit une solution « au hasard », mais il faut que le V que l'on prenne soit libre avec U, car ce seront des colonnes d'une matrice P inversible. Donc, si le « hasard » a mal fait les choses, et que le V pris est colinéaire à U, on recommence : on prend un autre V « au hasard »:..*

Il reste à vérifier que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} U \mid V \mid W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi formé soit inversible. Or,

$$\det(P) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

donc c'est bon.

Donc, pour ce P, on a

$$P^{-1}AP = B,$$

ce qui donne bien que A est semblable à B, dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ puisque $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 21. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in E_\lambda(u)$, donc

$$u(x) = \lambda x.$$

Alors, comme $u \circ v = v \circ u$,

$$u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(\lambda x) = \lambda v(x),$$

donc

$$v(x) \in E_\lambda(u).$$

Donc $E_\lambda(u)$ est stable par v.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que u a r valeurs propres λ_1, ..., λ_r, deux à deux différentes (donc $1 \leq r \leq \dim(E)$). Soit E_1, ..., E_r les r sous-espaces propres associés. Notons B_1, ..., B_r une base de chacun des sous-espaces propres. Alors $B = (B_1, \ldots, B_r)$ est une base de E car u est diagonalisable.

Pour $i \in [\![1, r]\!]$, soit $x \in B_i \subset E_i$. Alors $u(x) = \lambda_i x$ et

$$v(x) \in E_i$$

car E_i est stable par v, d'où

$$u\big(v(x)\big) = \lambda_i v(x).$$

Or,

$$v\big(u(x)\big) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x).$$

D'où

$$u \circ v(x) = v \circ u(x)$$

pour chaque vecteur de la base B.
Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales, donc

$$u \circ v = v \circ u,$$

autrement dit, u et v commutent.

Exercice 22. ★ Si u est nilpotent alors il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^r = 0$. Soit λ une valeur propre de u, x un vecteur propre (donc non nul) associé à λ. Alors

$$u(x) = \lambda x.$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$u^n(x) = \lambda^n x.$$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $\lambda^0 = 1$ et $u^0 = \mathrm{Id}_E$, donc

$$u^0(x) = \mathrm{Id}_E(x) = x = 1.x = \lambda^0 x.$$

Mais, pour $n = 0$, tout ceci marche par convention. Si vous n'êtes pas convaincu, on peut remarquer que, pour $n = 1$, $u^1(x) = \lambda^1 x$ est la même égalité que $u(x) = \lambda x$, et cette égalité est vraie par hypothèse.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u^n(x) = \lambda^n x$. Alors

$$u^{n+1}(x) = u\big(u^n(x)\big) = u(\lambda^n x) = \lambda^n u(x) = \lambda^n.\lambda x = \lambda^{n+1} x,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u^n(x) = \lambda^n x$.
En particulier, pour $n = r$, comme $u^r = 0$, alors $\lambda^r x = \vec{0}$. Et comme $x \neq \vec{0}$ (car c'est un vecteur propre), alors $\lambda^r = 0$, soit $\lambda = 0$. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(u) \subset \{0\}.$$

Reste à voir l'inclusion réciproque.
Première méthode : u admet au moins une valeur propre car u est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, donc on a exactement

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\}.$$

Deuxième méthode : on a $u^r = 0$ (l'endomorphisme nul), donc

$$0 = \det(u^r) = \det(u)^r,$$

et donc $\det(u) = 0$, ce qui donne 0 valeur propre de u, soit $\{0\} \subset \mathrm{Sp}(u)$.
Par double inclusion, on a bien

$$\mathrm{Sp}(u) = \{0\}.$$

★ Supposons $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.
Méthode 1 : comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que χ_u est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (théorème de D'Alembert-Gauss), alors on a u trigonalisable. Il existe donc une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire, et les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de u, donc nuls par hypothèse. Ainsi, $A = \mathrm{Mat}_B(u)$ s'écrit sous la forme :

$$A := \mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Or, pour une telle matrice A de taille n (donc avec $n = \dim(E)$), $A^n = 0_n$ (voir l'exercice 26 du TD Algèbre Linéaire ou l'exercice 23 du TD Complément d'algèbre linéaire pour le calcul de la puissance n-ème de cette matrice). Donc u est nilpotent.
Méthode 2 (pour 5/2) : 0 est la seule racine de χ_u, et $\deg(\chi_u) = n$, et χ_u est unitaire, donc

$$\chi_u = X^n.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton donne alors

$$u^n = 0,$$

donc u est nilpotent.

Exercice 23. Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de A associé à λ. Alors $X \neq 0_{n,1}$ et

$$AX = \lambda X.$$

Donc

$$A^2X = A\lambda X = \lambda AX = \lambda^2 X$$

et

$$A^3X = AA^2X = A\lambda^2X = \lambda^2AX = \lambda^3X.$$

Donc

$$\begin{aligned} 0_{n,1} &= 0_nX \\ &= (A^3 - 2A^2 - 5A + 6I_n)X = A^3X - 2A^2X - 5AX + 6X \\ &= \lambda^3X - 2\lambda^2X - 5\lambda X + 6X = (\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6)X \end{aligned}$$

Comme $X \neq 0_{n,1}$, on a alors

$$0 = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3).$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, -2, 3\}}.$$

On ne peut rien dire de plus sans connaître A !

Exercice 24. M est une matrice triangulaire par blocs, donc χ_M se calcule facilement, et on a

$$\chi_M(X) = X^{2n},$$

donc 0 est la seule valeur propre de M.
Si M est diagonalisable dans $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{K})$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ avec $P^{-1}MP$ diagonale, et les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de M, donc sont nuls.
Donc

$$P^{-1}MP = 0_{2n}, \qquad \text{et donc} \qquad M = P0_{2n}P^{-1} = 0_{2n},$$

ce qui donne $A = 0_n$, contradiction.
Donc M n'est pas diagonalisable.

Exercice 25. Si $A \in \mathrm{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ alors $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ est de degré $n + 1$ et unitaire, donc s'écrit

$$\chi_A = X^{2n+1} + \underbrace{\ldots\ldots}_{\deg \leq 2n}.$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} \chi_A(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \chi_A(x) = -\infty,$$

et comme χ_A est un polynôme, il est continue sur $\mathbb{R}$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, χ_A admet (au moins) une racine réelle, donc A admet (au moins) une valeur propre réelle.

Exercice 26. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^r = 0_n$ (r existe car N est nilpotente).
I_n et N commutent, donc par la formule du binôme de Newton : pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq r$,

$$A^p = (\lambda I_n + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} N^k = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} N^k + \sum_{k=r}^{n} 0_n = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} N^k.$$

Or, à $k \in [\![0, r-1]\!]$ fixé,

$$\binom{p}{k} \lambda^{p-k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!} \lambda^{p-k} \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} \lambda^{p-k} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (car $|\lambda| < 1$).
Donc, par combinaison linéaire (ce qui est important, et c'est là que joue le rôle de r, c'est que la somme a toujours le même nombre de termes, et plus précisément que c'est toujours une combinaison linéaire des mêmes vecteurs, seuls les coefficients dépendent de p), on en déduit bien

$$A^p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 27. Première méthode : on suppose $n \geq 2$, sinon la matrice considérée n'a pas de sens.
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$AX = \lambda X \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_2 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases}.$$

• **Premier cas :** si $\lambda \neq 0$, alors

$$AX = \lambda X \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \cdots = x_n.$$

Si on note $\alpha = x_2$, alors

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} (n-1)\alpha = \lambda x_1 \\ \lambda \alpha = x_1 \\ x_2 = \cdots = x_n = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-1)\dfrac{x_1}{\lambda} = \lambda x_1 \\ \lambda \alpha = x_1 \\ x_2 = \cdots = x_n = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-1-\lambda^2)x_1 = 0 \\ \alpha = \dfrac{x_1}{\lambda} \\ x_2 = \cdots = x_n = \alpha \end{cases}$$

• Si $\lambda^2 \neq n-1$, alors $x_1 = 0$, puis $\alpha = 0$, puis $X = 0_{n,1}$, donc $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.
• Si $\lambda^2 = n-1$ (et dans ce cas, on a bien $\lambda \neq 0$ si on suppose $n \geq 2$), alors

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{\lambda} x_1,$$

donc $\sqrt{n-1}$ et $-\sqrt{n-1}$ sont valeurs propres de A (car il y a des solutions non nulles au système précédent), et on a

$$E_{\sqrt{n-1}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad , \qquad E_{-\sqrt{n-1}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

• **Deuxième cas :** si $\lambda = 0$, alors

$$AX = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Donc $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, et

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On a donc trouvé toutes les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
Remarquons qu'alors

$$\dim\big(E_0(A)\big) = n-2, \qquad \dim\big(E_{\sqrt{n-1}}\big) = \dim\big(E_{-\sqrt{n-1}}\big) = 1,$$

donc la somme des dimensions des espaces propres de A fait n qui est la taille de A, donc A est diagonalisable.
Deuxième méthode : on peut remarquer (on ne s'en servira pas dans la suite) que A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Puis, $\mathrm{rg}(A) = 2$, donc par le théorème du rang, $\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = n-2$, donc

$$\dim(E_0) = n-2.$$

Donc, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T (dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, puisque toute matrice dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable) qui a (au moins) $n-2$ zéros sur la diagonale (en fait, on peut même supposer T diagonale, puisque A est diagonalisable, mais on ne s'en servira pas) : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \star \end{pmatrix}$$

(et il y a $n-2$ $\star$ qui valent 0 sur la diagonale). En notant alors x et y les deux autres valeurs sur cette diagonale, on a

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(T) = (n-2) \times 0 + x + y = x + y$$

(A et T étant semblables, on a bien $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(T)$). Comme $\mathrm{tr}(A) = 0$, cela donne

$$y = -x.$$

De plus, puisque T est triangulaire, la diagonale de T^2 sera formée de $n-2$ zéros (obtenus en élevant 0 au carré), de x^2 et de y^2, donc on aura

$$\mathrm{tr}(T^2) = (n-2) \times 0 + x^2 + y^2 = 2x^2$$

(puisque $y = -x$).
Or, $T = P^{-1}AP$, donc

$$T^2 = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I_n}AP = P^{-1}A^2P,$$

et donc T^2 et A^2 sont semblables, ce qui donne

$$\mathrm{tr}(T^2) = \mathrm{tr}(A^2).$$

Or,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \star \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \star & & & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$2x^2 = \mathrm{tr}(T^2) = \mathrm{tr}(A^2) = n-1.$$

Donc les coefficients de la diagonale de T sont : 0 (qui apparait $n-2$ fois), $\sqrt{n-1}$ et $-\sqrt{n-1}$. On en déduit

$$\mathrm{Sp}(T) = \left\{0, \sqrt{n-1}, -\sqrt{n-1}\right\},$$

et comme A est semblable à T,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \left\{0, \sqrt{n-1}, -\sqrt{n-1}\right\}}.$$

Il ne reste plus alors qu'à résoudre $AX = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, puis $AX = \sqrt{n-1}X$, puis $AX = -\sqrt{n-1}X$ pour avoir les espaces propres : si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$AX = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

d'où

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Puis,

$$AX = \sqrt{n-1}X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 + \cdots + x_n = \sqrt{n-1}x_1 \\ x_1 = \sqrt{n-1}x_2 \\ \vdots \\ x_1 = \sqrt{n-1}x_n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}x_1,$$

donc

$$E_{\sqrt{n-1}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

et enfin

$$AX = -\sqrt{n-1}X \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 + \cdots + x_n = -\sqrt{n-1}x_1 \\ x_1 = -\sqrt{n-1}x_2 \\ \vdots \\ x_1 = -\sqrt{n-1}x_n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \cdots = x_n = -\frac{1}{\sqrt{n-1}}x_1,$$

donc

$$E_{\sqrt{n-1}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Exercice 28. 1) Notons

$$T : M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top.$$

T est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est du cours), et

$$f = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} + T,$$

donc f est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par addition d'endomorphismes (vous pouvez sinon le montrer comme d'habitude...).

2) Si M est une matrice symétrique,

$$f(M) = 2M,$$

donc l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques est inclus dans $E_2(f)$.
Si M est une matrice antisymétrique,

$$f(M) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} = 0 \cdot M,$$

donc l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques est inclus dans $E_0(f)$.
Comme

$$n^2 = \dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) + \dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) \leq \dim\big(E_2(f)\big) + \dim\big(E_0(f)\big) \leq \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim\big(E_\lambda(f)\big) \leq \dim\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\big) = n^2,$$

on en déduit que f est diagonalisable, que

$$\mathrm{Sp}(f) = \{0, 2\}, \qquad E_2(f) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad E_0(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Autre façon :
Si l'on n'a pas l'idée de regarder les matrices symétriques ou antisymétriques, on prend $\lambda \in \mathbb{R}$, et on étudie l'équation

$$f(M) = \lambda M,$$

pour voir à quelles conditions on aura des solutions $M \neq 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$ (pour avoir λ valeur propre). Or,

$$f(M) = \lambda M \quad \Leftrightarrow \quad M + M^\top = \lambda M \quad \Leftrightarrow \quad M^\top = (\lambda - 1)M.$$

Remarquons que $\lambda = 1$ est impossible, car sinon on a

$$f(M) = M \quad \Leftrightarrow \quad M^\top = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \quad \Leftrightarrow \quad M = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})},$$

et ce n'est pas ce que l'on veut.
Supposons donc $\lambda \neq 1$, que λ soit valeur propre et que M soit un vecteur propre associé, alors on a $M^\top = (\lambda - 1)M$, soit

$$M = \frac{1}{\lambda - 1} M^\top,$$

et en passant à la transposition (et car $({}^\top M^\top) = M$), on a $M^\top = \frac{1}{\lambda - 1} M$, ce qui donne en reportant dans l'égalité précédente,

$$\frac{1}{\lambda - 1} M = (\lambda - 1)M.$$

Comme M est un vecteur propre de f, $M \neq 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$, donc

$$\frac{1}{\lambda - 1} = (\lambda - 1),$$

autrement dit $(\lambda - 1)^2 = 1$, soit $\lambda^2 - 2\lambda = 0$, soit $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2$. Donc on a montré

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, 2\}.$$

Puis,

$$f(M) = 0.M \quad \Leftrightarrow \quad M^\top = -M \quad \Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),$$

donc $E_0(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (et comme c'est un espace non réduit à $\{0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}\}$ si $n \geq 2$, on a bien $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ pour $n \geq 2$).
Et

$$f(M) = 2M \quad \Leftrightarrow \quad M^\top = M \quad \Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),$$

donc $E_2(f) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (et comme c'est un espace non réduit à $\{0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}\}$, on a bien $2 \in \mathrm{Sp}(f)$).
Enfin,

$$\dim\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\big) = n^2 = \dim\big(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) + \dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) = \dim\big(E_2(f)\big) + \dim\big(E_0(f)\big),$$

donc f est bien diagonalisable.

Exercice 29. 1) On a

$$\chi_A = X^3 - 4X^2 + 6X - 4 = (X - 2)(X - 1 - i)(X - 1 + i).$$

Les valeurs propres sont donc

$$\boxed{2}, \qquad \boxed{1 + i} \qquad \text{et} \qquad \boxed{1 - i}.$$

Remarque. Pas d'astuce particulière, ici, pour le calcul de $\chi_A(\lambda)$. Il faut remarquer que 2 est une « racine évidente », pour pouvoir factoriser par $X - 2$, puis continuer la factorisation du quotient qui est de degré 2...

2) Si A était diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, A aurait toutes ses valeurs propres réelles (autrement dit, χ_A serait scindé dans $\mathbb{R}[X]$), ce qui n'est pas le cas, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
Puis,

$$\boxed{A \text{ est de taille 3, a trois valeurs propres deux à deux différentes dans } \mathbb{C}, \text{ donc } A \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{C})}.$$

De plus, toutes les valeurs propres sont simples, donc les espaces propres sont tous de dimension 1.
3) Le théorème de Cayley-Hamilton donne

$$0_3 = \chi_A(A) = A^3 - 4A^2 + 6A - 4I_3,$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en multipliant par A^n,

$$A^{n+3} - 4A^{n+2} + 6A^{n+1} - 4A^n = 0_3,$$

puis en prenant la trace, et par linéarité de la trace, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{t_{n+3} - 4t_{n+2} + 6t_{n+1} - 4t_n = 0}.$$

4) On a

$$|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}, \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{1 \pm i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et donc $\left(\dfrac{1 \pm i}{2}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, autrement dit,

$$(1 \pm i)^n = \underset{n \to +\infty}{o}(2^n).$$

Donc

$$t_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2^n.$$

Par conséquent, la série entière $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} t_n x^n$ a même rayon de convergence que la série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n x^n = \sum_{n \geq 0} (2x)^n,$$

or à x fixé, cette série est une série géométrique de raison $2x$, donc qui converge si et seulement si $|2x| < 1$. Donc la série entière $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} 2^n x^n$ a pour rayon de convergence

$$\boxed{\frac{1}{2}}.$$

Remarque. On peut aussi utiliser le critère de D'Alembert...

Notons alors, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n x^n.$$

Pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, on a alors (toutes les séries convergeant bien car $|x| < \frac{1}{2}$) :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \cdot x^{n+3} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \big(t_{n+3} - 4t_{n+2} + 6t_{n+1} - 4t_n\big) x^{n+3} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} t_{n+3} x^{n+3} - 4x \sum_{n=0}^{+\infty} t_{n+2} x^{n+2} + 6x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} t_{n+1} x^{n+1} - 4x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} t_n x^n \\
&= \big(S(x) - t_0 - t_1 x - t_2 x^2\big) - 4x\big(S(x) - t_0 - t_1 x\big) + 6x^2\big(S(x) - t_0\big) - 4x^3 S(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$(1 - 4x + 6x^2 - 4x^3) S(x) = t_0 + (t_1 - 4t_0)x + (t_2 - 4t_1 + 6t_0)x^2,$$

et comme

$$t_0 = \mathrm{tr}(I_3) = 3, \qquad t_1 = \mathrm{tr}(A) = 4 \qquad \text{et} \qquad t_2 = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 2 \\ -8 & 2 & 8 \end{pmatrix}\right) = 4,$$

on a

$$\boxed{S(x) = \frac{3 - 8x + 6x^2}{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3}}.$$

Exercice 30. **1)** Écrivons :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
A est symétrique réelle, donc diagonalisable.

2) En notant, pour $i \in [\![1, n]\!]$, C_i la i-ème colonne de A, on a $C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-1}$ (toutes les colonnes de A sauf la dernière sont identiques), donc
$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathrm{Vect}(C_1, C_n).$$
Puis, comme $n \geq 2$, on a (C_1, C_n) libre. En effet, en notant $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $C_1 = E_n$ et $C_n = \sum_{k=1}^{n} E_k$. Donc, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $aC_1 + bC_n = 0_{n,1}$ alors (*et là, on utilise* $n \geq 2$)
$$bE_1 + \cdots + bE_{n-1} + (a + b)E_n = 0_{n,1},$$
et comme la famille $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre,
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b = 0 \end{cases}, \qquad \text{soit} \qquad a = b = 0.$$
Donc
$$\boxed{(C_1, C_n) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(A)}, \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{rg}(A) = 2}.$$
3) On a $\mathrm{rg}(A) = 2$, donc le théorème du rang appliqué à A donne (puisque A a n colonnes) :
$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 2 \geq 1$$
(si l'on suppose $n \geq 3$). Dans ce cas, $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0_{n,1}\}$, et donc
$$\boxed{0 \in \mathrm{Sp}(A)}, \qquad \text{et} \qquad \boxed{\dim(E_0) = n - 2}.$$
Puis, si on note $n(0)$ la multiplicité de 0 comme valeur propre de A, alors
$$\boxed{n(0) \geq \dim(E_0) = n - 2}.$$
De plus, comme on sait A diagonalisable, on a même
$$\boxed{n(0) = \dim(E_0) = n - 2}.$$
4a) • Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors (*en utilisant sans le rappeler que* $\lambda \neq 0$, *à plusieurs endroits*) :
$$X \in \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \Leftrightarrow AX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \cdots = x_{n-1} = \dfrac{x_n}{\lambda} \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} + (1 - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \cdots = x_{n-1} = \dfrac{x_n}{\lambda} \\ (n - 1)\dfrac{x_n}{\lambda} + (1 - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Donc

$$X \in \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) \Leftrightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \cdots = x_{n-1} = \dfrac{x_n}{\lambda} \\ \big((n-1) + \lambda - \lambda^2\big)x_n = 0 \end{cases}$$

• Il faut distinguer deux cas :
Premier cas : si $(n-1) + \lambda - \lambda^2 \neq 0$, alors

$$X \in \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) \Leftrightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \cdots = x_{n-1} = \dfrac{x_n}{\lambda} \\ x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \Leftrightarrow X = 0_{n,1},$$

donc on a montré $\operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) = \{0_{n,1}\}$, donc

$$\lambda \notin \operatorname{Sp}(A).$$

Deuxième cas : si $(n-1) + \lambda - \lambda^2 = 0$, alors

$$X \in \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) \Leftrightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_{n-1} = \frac{x_n}{\lambda},$$

donc on a

$$\operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}(X_\lambda) \qquad \text{en notant} \qquad X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Comme $X_\lambda \neq 0_{n,1}$, on a alors $\operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) \neq \{0_{n,1}\}$, donc

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \qquad \text{et} \qquad \boxed{E_\lambda = \operatorname{Vect}(X_\lambda)}.$$

Enfin, le polynôme $(n-1) + X - X^2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 4(n-1) = 4n - 3 \geq 5 > 0$ (car $n \geq 2$), donc les racines de ce polynômes sont

$$\frac{-1 + \sqrt{4n-3}}{-2} = \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{-1 - \sqrt{4n-3}}{-2} = \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}.$$

• Donc, pour $n \geq 3$,

$$\operatorname{Sp}(A) = \left\{ 0, \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2} \right\}.$$

Pour $n = 2$,

$$\operatorname{Sp}(A) = \left\{ \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2} \right\} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$

4b) • Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $X \in \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A)$, alors $AX = \lambda X$, et comme $\lambda \neq 0$,

$$X = \frac{1}{\lambda} AX = A \times \left(\frac{1}{\lambda} X \right) \in \operatorname{Im}(A).$$

Donc $\operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) \subset \operatorname{Im}(A)$. En particulier, pour $\lambda \neq 0$,

$$\operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) = \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) \cap \operatorname{Im}(A).$$

• Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la famille (C_1, C_n) est une base de $\operatorname{Im}(A)$, alors

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A) \cap \operatorname{Im}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } X = aC_1 + bC_n \text{ et } AX = \lambda X \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } X = aC_1 + bC_n \text{ et } A(aC_1 + bC_n) = \lambda(aC_1 + bC_n) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } X = aC_1 + bC_n \text{ et } aAC_1 + bAC_n = \lambda aC_1 + \lambda bC_n \end{aligned}$$

Puis,

$$AC_1 = AE_n = C_n \qquad \text{et} \qquad AC_n = A\sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} AE_k = \sum_{k=1}^{n-1} E_n + C_n = (n-1)C_1 + C_n.$$

Donc

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \cap \mathrm{Im}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } X = aC_1 + bC_n \text{ et } aC_n + b\big((n-1)C_1 + C_n\big) = \lambda a C_1 + \lambda b C_n \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } X = aC_1 + bC_n \text{ et } (a + b - \lambda b)C_n + \big((n-1)b - \lambda a\big)C_1 = 0_n \end{aligned}$$

Comme la famille (C_1, C_n) est libre (car $n \geq 2$), on a alors

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \cap \mathrm{Im}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } X = aC_1 + bC_n \text{ et } \begin{cases} a + b - \lambda b = 0 \\ (n-1)b - \lambda a = 0 \end{cases} \\ &\underset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{\Leftrightarrow} \quad \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } X = aC_1 + bC_n \text{ et } \begin{cases} a + b - \lambda b = 0 \\ \big((n-1) + \lambda - \lambda^2\big)b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Premier cas : si $(n-1) + \lambda - \lambda^2 \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \cap \mathrm{Im}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } X = aC_1 + bC_n \text{ et } \begin{cases} a + b - \lambda b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } X = aC_1 + bC_n \text{ et } a = b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X = 0_{n,1} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \cap \mathrm{Im}(A) = \{0_{n,1}\}$, et comme $\lambda \neq 0$, le début de la question permet d'affirmer que

$$\lambda \notin \mathrm{Sp}(A).$$

Deuxième cas : si $(n-1) + \lambda - \lambda^2 \neq 0$, autrement dit si $\lambda \in \left\{\dfrac{1+\sqrt{4n-3}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{4n-3}}{2}\right\}$ (cf. étude faite en 4a), alors

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \cap \mathrm{Im}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } X = aC_1 + bC_n \text{ et } \begin{cases} a + b - \lambda b = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } X = aC_1 + bC_n \text{ et } a = (\lambda - 1)b \\ &\Leftrightarrow \quad \text{il existe } b \in \mathbb{R} \text{ avec } X = (\lambda - 1)bC_1 + bC_n \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \cap \mathrm{Im}(A) = \big\{(\lambda - 1b)C_1 + bC_n,\ b \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((\lambda - 1)C_1 + C_n\big).$$

En particulier, comme (C_1, C_n) libre (car $n \geq 2$), on a $(\lambda - 1)C_1 + C_n \neq 0_{n,1}$, donc $\mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \neq \{0_{n,1}\}$, donc

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A),$$

et le début de la question donne

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) = \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \cap \mathrm{Im}(A) = \boxed{\mathrm{Vect}\big((\lambda - 1)C_1 + C_n\big)}.$$

- On retrouve donc $\mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\} = \left\{\dfrac{1+\sqrt{4n-3}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{4n-3}}{2}\right\}$, comme à la question 4a.

Remarque. On a bien $\dfrac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

4c) Supposons $n \geq 3$ (pour que 0 soit valeur propre).
On sait que A est diagonalisable et que 0 est valeur propre de multiplicité $n-2$, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ avec

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \alpha, \beta),$$

(en notant α et β les deux valeurs propres manquantes de A, éventuellement égales), ce qui donne

$$P^{-1}A^2P = \big(P^{-1}AP\big)^2 = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \alpha, \beta)^2 = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \alpha^2, \beta^2).$$

Puis, deux matrices semblables ont même trace, donc

$$\alpha + \beta = \mathrm{tr}\big(\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \alpha, \beta)\big) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A) = 1,$$

et

$$\alpha^2 + \beta^2 = \mathrm{tr}\big(\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \alpha^2, \beta^2)\big) = \mathrm{tr}(P^{-1}A^2P) = \mathrm{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n} (A^2)_{k,k}.$$

Puis, la formule du produit matriciel donne, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$(A^2)_{k,k} = \sum_{j=1}^{n} A_{k,j}A_{j,k}.$$

Premier cas : si $k \in [\![1, n-1]\!]$, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $A_{k,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq n-1 \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}$, donc

$$(A^2)_{k,k} = \sum_{j=1}^{n-1} \underbrace{A_{k,j}}_{=0} A_{j,k} + \underbrace{A_{k,n}}_{=1} A_{n,k} = A_{n,k} = 1.$$

Deuxième cas : si $k = n$, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $A_{k,j} = A_{n,j} = 1$ et $A_{j,k} = A_{j,n} = 1$, et donc

$$(A^2)_{n,n} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{A_{n,j}}_{=1} \underbrace{A_{j,n}}_{=1} = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

Donc

$$\alpha^2 + \beta^2 = \mathrm{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n-1} (A^2)_{k,k} + (A^2)_{n,n} = \sum_{k=1}^{n-1} 1 + n = (n-1) + n = 2n - 1.$$

Donc on a

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 2n-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \alpha^2 + (1-\alpha)^2 = 2n-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 2n-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ 0 = n - 1 + \alpha - \alpha^2 \end{cases}.$$

Donc (par l'étude faite en 4a), on a $\alpha \in \left\{ \dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}, \dfrac{1 - \sqrt{4n-3}}{2} \right\}$ et $\beta = 1 - \alpha$. Remarquons que

$$1 - \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2} \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2},$$

donc on peut supposer $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$, et on a donc montré que A est semblable à une matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont 0, α et β, ce qui donne bien

$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{ 0, \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2} \right\}.$$

4d) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 4$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Développons suivant la première ligne :

$$P_n(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1}(-1) \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \\ -1 & \dots & \dots & \dots & -1 \end{vmatrix}_{[n-1]}.$$

Pour le premier déterminant, on reconnaît $P_{n-1}(\lambda)$. Pour le deuxième, développons suivant la première colonne :

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= \lambda P_{n-1}(\lambda) + (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1+1}(-1) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix}_{[n-2]} \\ &= \lambda P_{n-1}(\lambda) + (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1+1}(-1)\lambda^{n-2} \\ &= \lambda P_{n-1}(\lambda) - \lambda^{n-2} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$P_n = XP_{n-1} - X^{n-2}.$$

A partir de là, deux idées possibles :
Première idée : on se rappelle que 0 est racine de multiplicité $n-2$ de P_n, et comme $\deg(P_n) = n$, il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ avec

$$P_n = X^{n-2}(a_n X^2 + b_n X + c_n)$$

et en changeant d'indice,

$$P_{n-1} = X^{n-3}(a_{n-1}X^2 + b_{n-1}X + c_{n-1}).$$

En reportant, on a alors

$$X^{n-2}(a_n X^2 + b_n X + c_n) = X \times X^{n-3}(a_{n-1}X^2 + b_{n-1}X + c_{n-1}) - X^{n-2},$$

soit

$$a_n X^2 + b_n X + c_n = a_{n-1}X^2 + b_{n-1}X + c_{n-1} - 1.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 4$,

$$a_n = a_{n-1} \qquad \text{et} \qquad b_n = b_{n-1} \qquad \text{et} \qquad c_n = c_{n-1} - 1,$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$,

$$a_n = a_3 \qquad \text{et} \qquad b_n = b_3 \qquad \text{et} \qquad c_n = c_3 - n + 3.$$

Enfin, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, en développant suivant la première colonne,

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - 0 + (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2)$$

ce qui donne $a_3 = 1$, $b_3 = -1$ et $c_3 = -2$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$,

$$\boxed{P_n = X^{n-2}\big(X^2 - X - n + 1\big)}.$$

On retrouve bien les mêmes racines que celles vues en 4a.

Remarque. On vérifie directement que la formule donnant P_n reste valable pour $n=2$.

Deuxième idée : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, en divisant par λ^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 4$, on a

$$\frac{P_n(\lambda)}{\lambda^n} = \frac{P_{n-1}(\lambda)}{\lambda^{n-1}} - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Donc la suite $\left(\dfrac{P_n(\lambda)}{\lambda^n}\right)_{n\geq 3}$ est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{\lambda^2}$, ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$,

$$\frac{P_n(\lambda)}{\lambda^n} = \frac{P_3(\lambda)}{\lambda^3} - \frac{n-3}{\lambda^2},$$

puis

$$P_n(\lambda) = \lambda^{n-3}P_3(\lambda) - (n-3)\lambda^{n-2}.$$

L'égalité étant valable sur $\mathbb{R}^*$, et $\mathbb{R}^*$ étant infini, on peut affirmer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$,

$$P_n = X^{n-3}P_3 - (n-3)X^{n-2}.$$

Or, $P_3 = X(X^2 - X - 2)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$,

$$P_n = X^{n-2}(X^2 - X - 2) - (n-3)X^{n-2} = \boxed{X^{n-2}\big(X^2 - X - n + 1\big)}.$$

On retrouve bien les mêmes racines que celles vues en 4a.

Remarque. On vérifie directement que la formule donnant P_n reste valable pour $n=2$.

Exercice 31. **1)** 1 est valeur propre de A, donc $\det(I_p - A) = 0$. Or, une matrice et sa transposée ont même déterminant, donc

$$0 = \det(I_p - A) = \det\big(({}^\top I_p - A)\big) = \det(I_p^\top - A^\top) = \det(I_p - A^\top).$$

Donc 1 est valeur propre de $A^\top$.

2) • La matrice A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ avec

$$P^{-1}AP = D$$

matrice diagonale. De plus, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A, et (puisque 1 est valeur propre, il apparait sur la diagonale de D), quitte à permuter deux colonnes de P (ce qui ne change pas le fait d'être inversible, puisque le déterminant est juste changé en son opposé), on peut supposer

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Comme A est diagonalisable, la multiplicité de 1 comme valeur propre de A vaut

$$n(1) = \dim\big(E_1(A)\big) = 1,$$

et comme D est semblable à A, on en déduit que 1 est valeur propre simple de D, donc qu'il apparait une seule fois sur la diagonale de D, puisque D est diagonale. Donc, pour $j \in [\![2, p]\!]$, $\lambda_j \neq 1$, et donc

$$|\lambda_j| < 1$$

(par l'hypothèse de l'énoncé).

• Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & (\lambda_2)^n & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & (\lambda_p)^n \end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

car pour tout $j \in [\![2, p]\!]$,

$$|\lambda_j| < 1, \qquad \text{donc} \qquad (\lambda_j)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(ainsi, toutes les suites coordonnées (dans la base canonique) de la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, ce qui assure la convergence de la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$).

• Puis, le produit matriciel $\mathrm{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_p(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ est bilinéaire, défini sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})^2$ qui est de dimension finie, donc est continu. Donc

$$A^n = PD^nP^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q := P \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

• Enfin,

$$\begin{aligned} Q^2 &= P \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}^2 P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= Q \end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi dire :

$$A^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q$$

car la suite de matrices $(A^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{2n} = A^n \times A^n,$$

donc par continuité du produit matriciel,

$$A^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q \times Q = Q^2.$$

L'unicité de la limite conclut :

$$Q^2 = Q.$$

3) • Multiplier par une matrice inversible (à gauche ou à droite) ne change pas le rang, donc

$$\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{rg}\left(P \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right) = \mathrm{rg}\left(P \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \right) = \boxed{1}.$$

• Par définition, on a

$$AX = X.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$A^nX = X.$$

Initialisation : l'hypothèse $AX = X$ donne le cas $n = 1$ (car $A^1 = A$). Remarquons que le cas $n = 0$ est vrai aussi, par convention, car $A^0 = I_p$, et donc
$$A^0X = I_pX = X.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $A^nX = X$. Alors
$$A^{n+1}X = A \times A^nX = A \times X = AX = X,$$
d'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^nX = X.$$

• Puis, le produit matriciel $\mathrm{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est bilinéaire, défini sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie, donc est continu. Donc
$$X = A^nX \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} QX.$$
Donc
$$QX = X, \qquad \text{et donc} \qquad X \in \mathrm{Im}(Q).$$

• Enfin, $X \neq 0_{p,1}$ (car c'est un vecteur propre), $X \in \mathrm{Im}(Q)$ et
$$\dim\big(\mathrm{Im}(Q)\big) = \mathrm{rg}(Q) = 1,$$
donc (X) est une base de $\mathrm{Im}(Q)$.
4) • Par définition, on a
$$A^\top Y = Y,$$
donc en transposant :
$$Y^\top = ({}^\top A^\top Y) = Y^\top({}^\top A^\top) = Y^\top A.$$
Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que
$$Y^\top A^n = Y^\top.$$
Initialisation : l'hypothèse $Y^\top A = Y^\top$ donne le cas $n = 1$ (car $A^1 = A$). Remarquons que le cas $n = 0$ est vrai aussi, par convention, car $A^0 = I_p$, et donc
$$Y^\top A^0 = Y^\top I_p = Y^\top.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $Y^\top A^n = Y^\top$. Alors
$$Y^\top A^{n+1} = Y^\top A^n \times A = Y^\top \times A = Y^\top A = Y^\top,$$
d'où l'hérédité.
Conclusion : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$Y^\top A^n = Y^\top.$$

• Puis, le produit matriciel $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_p(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est bilinéaire, défini sur $\mathrm{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie, donc est continu. Donc
$$Y^\top = Y^\top A^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Y^\top Q.$$
Donc
$$Y^\top Q = Y^\top.$$

• Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de Q. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on a
$$C_j \in \mathrm{Im}(Q) = \mathrm{Vect}(X),$$
donc il existe $\alpha_j \in \mathbb{K}$ avec
$$C_j = \alpha_j X.$$
Donc
$$Q = \big(\ \alpha_1 X \,\big|\, \ldots \,\big|\, \alpha_p X\ \big) = X \times \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

puis par produit matriciel par blocs,

$$Y^\top = Y^\top Q = Y^\top \left(\alpha_1 X \mid \dots \mid \alpha_p X \right) = \left(\alpha_1 Y^\top X \mid \dots \mid \alpha_p Y^\top X \right).$$

Enfin, $Y^\top X$ est une matrice de $\mathrm{M}_1(\mathbb{R})$, donc son unique coefficient est $\mathrm{tr}(Y^\top X)$, donc

$$Y^\top = \left(\alpha_1 Y^\top X \mid \dots \mid \alpha_p Y^\top X \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathrm{tr}(Y^\top X) & \dots & \alpha_p \mathrm{tr}(Y^\top X) \end{pmatrix}$$

(la dernière égalité n'utilise pas de matrices par blocs), et donc

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{tr}(Y^\top X)} Y^\top, \qquad \text{puis} \qquad Q = \frac{1}{\mathrm{tr}(Y^\top X)} XY^\top.$$

Remarque.

1. On peut présenter aussi ainsi : comme $Y^\top X \in \mathrm{M}_1(\mathbb{K})$,

$$Y^\top = \left(\alpha_1 Y^\top X \mid \dots \mid \alpha_p Y^\top X \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix} \times Y^\top X = \mathrm{tr}(Y^\top X). \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}$$

(car $Y^\top X$ est la matrice dont l'unique coefficient est $\mathrm{tr}(Y^\top X)$), et donc $Q = \frac{1}{\mathrm{tr}(Y^\top X)} XY^\top$.

2. Cela n'est pas surprenant, car Q étant la matrice d'un projecteur, on a

$$\mathrm{tr}(Q) = \mathrm{rg}(Q) = 1,$$

et comme

$$\mathrm{tr}(XY^\top) = \mathrm{tr}(Y^\top X),$$

si Q est multiple de $XY^\top$, la seule possibilité est que

$$Q = \frac{1}{\mathrm{tr}(Y^\top X)} XY^\top.$$

3. Enfin, on a bien $Y^\top X \neq 0_1$, car sinon, on aurait

$$Y^\top = \left(\alpha_1 Y^\top X \mid \dots \mid \alpha_p Y^\top X \right) = 0_{1,p},$$

donc $Y = 0_{p,1}$, ce qui est faux, car Y est un vecteur propre.

Autre démonstration de l'exercice, plus basé sur du produit matriciel par blocs :
Pour avoir le 1 comme premier coefficient de la diagonale de D, on prend X comme première colonne de P (comme X est non nul, et que

$$\dim \left(E_1(A)\right) = 1,$$

c'est une base de $E_1(A)$).
Comme $Y \in E_1(A^\top)$ et Y non nul avec

$$\dim \left(E_1(A^\top)\right) = 1,$$

on a (Y) base de $E_1(A^\top)$.
Puis, en transposant l'égalité

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_p),$$

on a

$$\begin{aligned}
\left((P^\top)^{-1}\right)^{-1} A^\top (P^\top)^{-1} &= P^\top A^\top (P^\top)^{-1} \\
&= P^\top A^\top ({}^\top P^{-1}) \\
&= ({}^\top P^{-1} AP) \\
&= {}^t\mathrm{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \\
&= \mathrm{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)
\end{aligned}$$

Donc la première colonne de $(P^\top)^{-1} = ({}^\top P^{-1})$ est un vecteur propre de $A^\top$ associé à 1, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la première colonne de $({}^\top P^{-1})$ est αY, soit la première ligne de P^{-1} est $\alpha Y^\top$.

Par conséquent, on a $P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X & C_2 & \dots & C_p \end{array} \right)$ et $P^{-1} = \left(\begin{array}{c} \alpha Y^\top \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_p \end{array} \right)$.

Puis,

$$Q = P \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X & C_2 & \dots & C_p \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \alpha Y^\top \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_p \end{array} \right) = \alpha X Y^\top.$$

Enfin, comme $Q^2 = Q$, Q est la matrice d'un projecteur, donc $\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{tr}(Q)$. Et comme $\mathrm{rg}(Q) = 1$, on a alors

$$1 = \mathrm{rg}(Q) = \mathrm{tr}(Q) = \alpha \mathrm{tr}(XY^\top) = \alpha \mathrm{tr}(YX^\top),$$

et donc

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{tr}(YX^\top)}, \qquad \text{puis} \qquad Q = \frac{1}{\mathrm{tr}(YX^\top)} XY^\top.$$