

CHAPITRE 5 - RÉDUCTION

Introduction

Introduction en partant de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui représente un endomorphisme f dans la base canonique. Regarder la matrice de f dans la base $((1, 1), (1, -1))$.

Si temps : même chose avec $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ et regarder dans la base

$((1, 0, 1), (0, 1, 0), (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2))$.

Points à remarquer :

- Il faut trouver une base astucieuse.
- On peut remarquer que ces vecteurs astucieux sont particuliers : ils sont "presque" invariants.

Trouver une base astucieuse pour pouvoir représenter un endomorphisme, c'est le réduire (on parle de réduction d'endomorphisme). Comme la réduction vu en collège, il s'agit de simplifier l'écriture de l'endomorphisme.

1 Éléments propres

1.1 Cas des matrices

Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ **non-nul** tel que $AX = \lambda X$.
- Si c'est le cas, un tel vecteur X est appelé vecteur propre de A associé à λ .
- Le sous-espace propre de A associé à λ est :

$$E_\lambda(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X\}.$$

Remarques :

- $E_\lambda(A)$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à λ **plus** le vecteur nul.
- $AX = \lambda X$ est appelé l'équation aux éléments propres pour A de paramètre λ .

Proposition

Soit A une matrice carrée de taille n , et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- λ est valeur propre de A ;
- le système $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ n'est pas de Cramer ;
- la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible ;
- $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition : Spectre d'une matrice

Soit A une matrice carrée de taille n et on fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **spectre** de A l'ensemble des scalaires de $\mathbb{K}$ qui sont valeurs propres de A :

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \det(A - \lambda I_n) = 0\}.$$

Remarques :

- Le spectre dépend du corps choisi. On parle donc de spectre réel ou complexe.
- **Exemple :** Déterminer le spectre (suivant le corps $\mathbb{K}$) de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps choisi, on pourra simplement noter $\text{Sp}(A)$.

1.2 Cas des endomorphismes

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur $x \in E$ **non-nul** tel que $u(x) = \lambda x$.
- Si c'est le cas, un tel vecteur x est appelé vecteur propre de u associé à λ .
- Le sous-espace propre de u associé à λ est :

$$E_\lambda(u) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}.$$

Remarques :

- $E_\lambda(u)$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à λ **plus** le vecteur nul.
- $u(x) = \lambda x$ est appelé l'équation aux éléments propres pour u de paramètre λ .
- $x \neq 0$ est vecteur propre de u si et seulement si $\text{Vect}(x)$ est une droite stable par u .

Proposition

Soit u un endomorphisme, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- λ est valeur propre de u ;
- l'endomorphisme $u - \lambda \text{Id}$ n'est pas bijectif ;
- $\det(u - \lambda \text{Id}) = 0$.

Définition : Spectre d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme et on fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **spectre** de A l'ensemble des scalaires de $\mathbb{K}$ qui sont valeurs propres de A :

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \det(u - \lambda \text{Id}) = 0\}.$$

Remarques :

- Le spectre dépend du corps choisi. On parle donc de spectre réel ou complexe.
- S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps choisi, on pourra simplement noter $\text{Sp}(u)$.

1.3 Propriétés**Proposition**

Soient E un espace de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$E_{\lambda}(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}).$$

Corollaire

- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont des sous-espaces vectoriels de E .
- Si u et v commutent alors les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Démonstration : *À faire en cours.* □

Proposition

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme u , alors les sous-espaces $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

Démonstration : *À faire en cours.* □

Corollaire

Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstration : *À faire en cours.* □

Proposition

Les éléments propres d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ sont aussi ceux de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Corollaire

- Les sous-espaces propres de A sont des sous-espaces vectoriels de $M_{n,1}(\mathbb{K})$
- Si A et B commutent alors les sous-espaces propres de A sont stables par multiplication à gauche par B .
- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de A , alors les sous-espaces $E_{\lambda_1}(A), \dots, E_{\lambda_p}(A)$ sont en somme directe.
- Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

2 Polynôme caractéristique**2.1 Cas des matrices****Définition**

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est le polynôme $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{K}, \chi_A(t) = \det(t\text{Id} - A).$$

Proposition

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Proposition

Le spectre d'une matrice carrée A est exactement l'ensemble des racines de χ_A . Plus précisément :

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{x \in \mathbb{K}, \chi_A(x) = 0\}.$$

Corollaire

Deux matrices semblables ont le même spectre.

Proposition

Soit A une matrice carrée.

- Le polynôme χ_A est unitaire de degré n .
- Son coefficient de degré 0 est $(-1)^n \det A$.
- Son coefficient de degré $n - 1$ est $-\text{tr}(A)$.
- χ_A est de la forme :

$$\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} \pm \dots \pm (-1)^n \det(A).$$

Remarque : Cas particulier des matrices 2×2 .

2.2 Cas des endomorphismes**Définition**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de u est le polynôme $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$ défini par :

$$\forall t \in \mathbb{K}, \chi_u(t) = \det(t\text{Id} - u).$$

Proposition

Le polynôme caractéristique de u est le polynôme caractéristique de sa matrice dans n'importe quelle base.

Proposition

Le spectre d'un endomorphisme u est exactement l'ensemble des racines de χ_u . Plus précisément :

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{x \in \mathbb{K}, \chi_u(x) = 0\}.$$

2.3 Multiplicité des valeurs propres**Définition**

Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La multiplicité de λ en tant que valeur propre de u est sa multiplicité en tant que racine de χ_u .

Remarque : pas vraiment de notation. On peut utiliser $m_\lambda(u)$.

Proposition

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E . Alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u).$$

Démonstration : *Sans rentrer dans le détails.* On pose F un supplémentaire de $E_\lambda(u)$. Dans une base adaptée à $E_\lambda(u) \oplus F$, la matrice de $\lambda\text{Id} - u$ est triangulaire par blocs. On peut donc calculer le déterminant par blocs.

On montre alors que $(X - \lambda)^{\dim E_\lambda(u)}$ divise le polynôme caractéristique. $\square$

Remarques :

- les mêmes définitions se généralisent au cas des matrices.
- Comme $\sum m_\lambda(u) \leq n$, on a donc $\sum \dim E_\lambda(u) \leq n$. En particulier, il y a toujours au plus n valeurs propres.

3 Diagonalisabilité**3.1 Définition****Définition**

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Dit autrement, A est diagonalisable (sur $\mathbb{K}$) s'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D \in \text{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $A = PDP^{-1}$.

Définition

Un endomorphisme u de E est dit diagonalisable s'il existe une base B de E tel que la matrice de u dans la base B est diagonale.

Remarque : Une telle base est constituée de vecteurs propres de u .

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable ;
- il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonalisable ;
- dans toute base de E , la matrice de u est diagonalisable.

Exemples : Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.2 Conditions de diagonalisabilité

Théorème : CNS

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable ;
- la somme des sous-espaces propres de u est égale à E ;
- la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à n .

Remarque : cas matriciel

Démonstration : *À faire en cours*

Corollaire

Tout projecteur et toute symétrie sont des endomorphismes diagonalisables.

Démonstration : *À faire en cours*

Théorème : CNS

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$. u est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont simultanément remplies :

- χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$;
- $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim E_{\lambda}(u) = m_{\lambda}(u)$.

Remarque : cas matriciel

Démonstration : *À faire en cours*

Proposition : S

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable et ses sous-espaces propres non nuls sont de dimension 1 ;
- χ_u est scindé à racines simples ;
- u admet n valeurs propres distinctes.

Démonstration : *À faire en cours*

Corollaire : Condition suffisante

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$. Si u admet n valeurs propres distinctes, u est diagonalisable.

Remarques :

- Encore une fois : cas matriciel.
- Si A est triangulaire, le spectre de A se lit sur la diagonale. Si donc tous les éléments diagonaux de A sont distincts alors A est diagonalisable. Mais attention, il faut que A soit triangulaire pour cela !

3.3 Applications élémentaires

Proposition : Puissances itérées

Soit $A = PDP^{-1}$ alors $A^n = PD^nP^{-1}$.

De plus A est inversible si et seulement si D l'est et $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -6 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

Proposition : Récurrences linéaires couplées

Soient (u_n) et (v_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= au_n + bv_n \\ v_{n+1} &= cu_n + dv_n \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $X_{n+1} = AX_n$ et :

$$X_n = A^n X_0.$$

Exemple : $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ v_0 &= 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n \end{cases}$.

(Indication : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$)

Proposition : Récurrences linéaires d'ordre 2

Soit (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $X_{n+1} = AX_n$ et :

$$X_n = A^n X_0.$$

Exemple : Illustration avec la suite de Fibonacci.

4 Trigonalisation

4.1 Définitions

Définition

- Une matrice carrée est dite trigonalisable (sur $\mathbb{K}$) si elle est semblable à une matrice triangulaire (à coefficients dans $\mathbb{K}$).
- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Remarque : Les matrices diagonales sont triangulaires. Donc toute matrice diagonalisable est en particulier trigonalisable. La réciproque n'est pas nécessairement vraie (cf $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

Proposition

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est trigonalisable.
- il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est trigonalisable ;
- dans toute base de E , la matrice de u est trigonalisable.

4.2 Lien avec le polynôme caractéristique

Proposition

- Une matrice carrée est trigonalisable (sur $\mathbb{K}$) si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (sur $\mathbb{K}$).
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration : *Techniquement faisable avec le programme, mais délicat. On la passe pour le cours. Ça se fait par récurrence sur la dimension.* $\square$

Corollaire

Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Remarque : il existe des contre-exemples dans $M_n(\mathbb{R})$. Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3 Lien avec la trace et le déterminant

Proposition

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicités. Si A est trigonalisable alors :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

- De même pour un endomorphisme en dimension finie.