

CHAPITRE 6 - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

1 Fonctions continues par morceaux

1.1 Sur un segment

Définition

Soit $I = [a, b]$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est continue par morceaux sur I s'il existe une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de I (avec $a = x_0 < \dots < x_n = b$) telle que pour chaque indice $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ soit prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_k, x_{k+1}]$.

Remarques :

- Une telle subdivision, si elle existe, est dite adaptée à f .
- La valeur d'une fonction aux bornes de la subdivision n'a pas d'influence sur le fait que la fonction soit continue par morceaux ou non.
- En revanche, la définition implique que f admet une limite à gauche et à droite en tout point.

Exemples :

- Toute fonction continue sur un segment est continue par morceaux sur le segment.
- La fonction partie entière est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$.
- La fonction $\mathbb{1}_Q$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$.
- La fonction $f : t \mapsto \begin{cases} \tan(t) & \text{si } t \in]-\pi/2, \pi/2[\\ 0 & \text{si } t \in \{-\pi/2, \pi/2\} \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux.

Propriétés :

- La somme et le produit de fonctions continues par morceaux sont continus par morceaux.
- La restriction d'une fonction continue par morceaux à un segment est à son tour continue par morceaux.
- Une fonction complexe est continue par morceaux sur un segment si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont.
- La valeur absolue (ou le module) d'une fonction continue par morceaux sur un segment est encore continue par morceaux.

- **Attention !** L'inverse d'une fonction continue par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux y compris si elle ne s'annule pas.
- **Attention !** La composée de deux fonctions continues par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux. **Exemple :** $f(t) = t \sin(1/t)$ (prolongée en 0) et $g(t) = 1$ si $t > 0$ et 0 sinon. $g \circ f$ en 0^+ ?

1.2 Sur un intervalle quelconque

Définition

Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur tout segment de I .

Exemples :

- Toute fonction continue sur un intervalle est continue par morceaux sur cet intervalle.
- La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ même en posant $f(0) = 0$ n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Remarques :

- En pratique, on autorise l'absence de limite aux bords de l'intervalle.
- La définition fonctionne également lorsque I est un segment !
- Les propriétés du cas sur segment se transposent naturellement.

1.3 Intégrales sur un segment

Définition

Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On définit :

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{f}_k$$

où $(x_0, \dots, x_n)$ est une subdivision de I adaptée à f avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ et où $\tilde{f}_k$ désigne l'unique prolongement continu à $[x_k, x_{k+1}]$ de la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$.

Remarque :

- La valeur ainsi définie ne dépend pas de la subdivision choisie.
- Cette définition généralise celle des intégrales de fonctions continues sur un segment.
- Changer la valeur d'une fonction en un nombre fini de points ne modifie pas la valeur de son intégrale.

Propriétés :

- Linéarité
- Relation de Chasles
- Positivité (large) et croissance (large) pour les fonctions à valeurs réelles
- Inégalité triangulaire
- Sommes de Riemann

Remarque :

- Attention, la stricte positivité est fautive
- $t \mapsto \int_a^t f$ n'est pas nécessairement une primitive de f .

2 Intégrales généralisées sur un intervalle semi-ouvert

2.1 Généralités

Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue sur $[a, b[$. Sous réserve d'existence, on note :

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f.$$

Si cette limite existe et est finie, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f$ converge en sa borne b . Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f$ diverge.

Remarque : On peut définir de même les intégrales sur $]a, b]$.

Exemples :

- $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$;
- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$.

Remarque :

- Il ne suffit pas que $f \rightarrow 0$ pour que l'intégrale converge !
- Contrairement par exemple aux séries, ce n'est pas une condition nécessaire non plus.

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.

- La convergence de $\int_a^b f$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de b . Dit autrement pour tout $c \in [a, b[$, $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_c^b f$.
- Pour tout $c \in [a, b[$, on a $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

2.2 Exemples de référence

Proposition

- $\int_0^1 \ln$ converge en 0
- $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge en $+\infty$ si et seulement si $a > 0$.
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$
- $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge en 0 si et seulement si $\alpha < 1$

Contre-exemple : $\int_0^{\pi/2} \tan$ est divergente en $\pi/2$.

Exercice : Discuter la nature de $\int_0^1 t^\alpha \ln(t) dt$ en fonction de α .

2.3 Critères

Lemme

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Si

- $a < b$;
- f est à valeurs positives sur $[a, b[$

alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge en b si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée sur $[a, b[$.

Démonstration : *À faire en cours.* □

Remarque : on peut adapter au cas des fonctions négatives ou bien au cas $a > b$.

Théorème : Convergence par majoration

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$.
Si :

- $a < b$
- $0 \leq f \leq g$ sur $[a, b[$

alors la convergence en b de $\int_a^b g$ implique celle de $\int_a^b f$.

Démonstration : *À faire en cours.*

□

3 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

3.1 Généralités

Définition

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert non-vidé de $\mathbb{R}$ avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et soit f une fonction continue par morceaux sur I . Soit enfin $c \in I$. Sous réserve d'existence des deux termes, on note :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Proposition

La valeur définie ci-dessus ne dépend pas du choix de c .

Démonstration : *À faire rapidement.*

□

Remarque : Ce découpage est nécessaire car il permet de demander que l'intégrale converge *indépendamment* en a et en b .

Illustrons le problème avec $\int_{\mathbb{R}} t dt$. $\int_{-x}^x t dt = 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Mais $\int_{-\infty}^0$ et $\int_0^{+\infty}$ divergent.

Cela pose problème car suivant comme on prend la limite, le résultat de l'intégrale sera différent.

Par exemple : $\int_{-x+1}^{x+1} t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-x+1}^{x+1} = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(-x+1)^2}{2} = 2x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \infty$.

Exemples :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt$ converge

- $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge en $+\infty$ mais pas en 0
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge.

Propriétés :

- Linéarité
- Relation de Chasles
- Positivité (large)
- Croissance (large)
- $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_a^b \operatorname{Re}(f)$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f)$ convergent.
- Compatibilité avec la conjugaison complexe.

Remarque : Une intégrale peut être convergente mais somme de deux intégrales divergentes.

3.2 Techniques de calculs

Théorème : Intégration par parties

Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux entre a et b .

Si le produit fg admet une limite finie en a et en b alors :

- Les intégrales $\int_a^b fg'$ et $\int_a^b f'g$ ont même nature ;
- sous réserve d'existence, $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$.

Remarques :

- $[fg]_a^b$ désigne la différence des limites
- définition de $\mathcal{C}^1$ par morceaux
- Pas nécessaire de vérifier les hypothèses de régularité pour les applications pratiques.
- Si fg n'admet pas de limite, on peut essayer de se ramener au cas sur un segment.

Exemples :

- Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3t^2+t^4}{(1+t^2)^3} dt$ converge et vaut $\frac{3\pi}{4}$.
- Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(t+1)^2} dt$ converge et vaut $-\ln(2)$.

Théorème : Changement de variable

Soient a, b, α, β dans $\overline{\mathbb{R}}$, f continue par morceaux sur $]a, b[$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une bijection strictement monotone de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

- Les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature ;
- Si φ est strictement croissante et que les couples (α, β) et (a, b) sont dans le même ordre alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

- Si φ est strictement décroissante et que les couples (α, β) et (a, b) sont dans le même ordre alors :

$$\int_a^b f(t)dt = - \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Remarques :

- Comme pour l'IPP, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité
- la bijectivité permet d'avoir $f \circ \varphi$ continue par morceaux et d'étudier les limites
- On peut toujours changer les orientations avec $\int_a^b = - \int_b^a$.

Exemples :

- Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t}+1} dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.
- À l'aide du changement $u = \frac{1}{t}$, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2} dt$ converge et vaut $1 - e^{-1}$.
- À l'aide du changement $x = \cos(t)$, montrer que $\int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{1-x^2} dx$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Exercice : Soit $a \in]0, +\infty]$ et soit f une fonction continue $] -a, a[$, supposée paire ou impaire.

1. Montrer que $\int_{-a}^a f$ converge si et seulement si $\int_0^a f$ converge.
2. En cas de convergence, montrer que :
 - (a) si f est paire, alors $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$;
 - (b) si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f = 0$.
3. Que faut-il penser de $\int_{-1}^1 \frac{t}{1-t^2} dt$?

4 Convergence absolue**4.1 Généralités****Définition**

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I . On dit que $\int_I f$ converge absolument si $\int_I |f|$ converge. On dit aussi que f est intégrable sur I . Si I est de la forme $[a, b]$, avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit également que f est intégrable en b .

Exemples :

- Si f est positive, $\int_I f$ est convergente si et seulement si elle est absolument convergente.
 - $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente mais pas absolument.
- La divergence absolue est assez difficile à montrer. En revanche, montrer la convergence (non-absolue) est un classique. Faisons-le par IPP.

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dire qu'une fonction continue par morceaux f est intégrable en a équivaut à dire que la fonction $t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0.

Exemple : $t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$.

Théorème

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I . Si $\int_I f$ est absolument convergente, alors :

- elle est convergente et
- $|\int_I f| \leq \int_I |f|$.

Démonstration : *À faire rapidement* □

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables de I dans $\mathbb{K}$ est noté $L^1(I, \mathbb{K})$.

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

Proposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction intégrable sur I .

Si :

- I n'est pas réduit à un point
- f est continue sur I
- f est positive sur I
- $\int_I f = 0$

alors f est identiquement nulle sur I .

Remarque : l'hypothèse de continuité est indispensable.

Démonstration : *À faire en cours.* □

4.2 Critères de comparaison

Théorème

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

- Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} O(g(t))$ alors l'intégrabilité de g en b implique l'intégrabilité de f en b .
- Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$ alors l'intégrabilité de g en b est équivalente à l'intégrabilité de f en b .

Exemples :

- $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$ converge pour tout n
- $\int_0^{+\infty} te^{-2t} dt$ converge
- À quelle condition sur α , $t \mapsto \frac{1}{(t+\ln(t))^\alpha}$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt$ converge.

Remarques :

- le cas en petit o se déduit de O .

- Attention, il faut la convergence **absolue**.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$ converge mais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge.

- Méthode : calcul direct, équivalence, comparaison à $\frac{1}{t^2}$, puis $\frac{1}{t^\alpha}$, puis il faut de l'imagination !

5 Théorème de convergence dominée

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur un même intervalle I et soit f une fonction continue par morceaux sur I .

Si :

- (f_n) converge simplement vers f ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

(hypothèse de domination indépendamment de n)

alors :

- f et les f_n sont intégrables sur I et
- $\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f$.

Démonstration : *Complètement hors-programme !* □

Exemple : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Théorème : Cas des séries

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions sur un intervalle I et soit S une fonction continue par morceaux sur I .

Si :

- les fonctions f_n sont intégrables sur I ;
- $\sum f_n$ converge simplement vers S ;
- $\sum \int_I |f_n|$ converge

alors :

- S est intégrable sur I
- On peut intégrer terme à terme :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

Démonstration : *Hors-programme*

□

Exemples :

- $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$
- Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite sommable de nombres complexes. On note $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nt)$.
Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(mt) dt = a_m.$$

- $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+e^t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.
- On pose $f_0 = \sin \cdot \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}$ et pour tout $n \geq 1$, $f_n : t \mapsto f_0(t - n\pi)$. Que dire de $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t) dt$ et $\int_{t=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$?