

CHAPITRE 7 - ESPACES EUCLIDIENS

1 Isométrie d'un espace euclidien

1.1 Généralités

Définition : Isométrie d'un espace normé

Soit E un espace normé. On appelle isométrie de E toute application $u : E \rightarrow E$ qui préserve les distances, c'est-à-dire telle que :

$$\forall x, y \in E, \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|.$$

Définition : Isométrie vectorielle

Soit E un espace normé. On appelle isométrie vectorielle de E tout endomorphisme de E qui est également une isométrie de E .

Remarque : une isométrie peut *a priori* ne pas être vectorielle. Par exemple, les translations de $\mathbb{R}^2$ (muni de n'importe quelle norme) sont des isométries mais pas des endomorphismes.

Proposition

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est une isométrie ;
- u préserve la norme c'est-à-dire : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$;
- u préserve le produit scalaire c'est-à-dire : $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle xy \rangle$;
- u préserve les bases orthonormées (c'est-à-dire que si B est une base orthonormée alors $u(B)$ l'est aussi) ;
- u préserve au moins une base orthonormée.

Démonstration : *À faire en classe.* □

Exemple : Soit E un espace euclidien et soit s une symétrie de E (on a $s \circ s = \text{Id}$). s est une symétrie orthogonale ($\text{Ker}(s - \text{Id}) \perp \text{Ker}(s + \text{Id})$) si et seulement si s est une isométrie de E .

Remarque : Si $\text{Ker}(s - \text{Id}) = E_1(s)$ est un hyperplan, on parle de la **réflexion** orthogonale par rapport à $E_1(s)$.

1.2 Groupe orthogonal

Définition

Soit E un espace euclidien. On appelle groupe orthogonal de E et on note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E .

Proposition

Soit E un espace euclidien. Alors :

- $\text{Id} \in O(E)$;
- $O(E)$ est stable par composition ;
- Si $u \in O(E)$ alors u est un automorphisme ;
- $O(E)$ est stable par passage à la réciproque.

Démonstration : *À faire en classe.* □

Remarque : dans le cadre des espaces euclidiens, on emploie parfois le terme de *automorphismes orthogonaux* pour désigner les éléments de $O(E)$ (plutôt qu'isométries vectorielles).

Lemme

Soit u un automorphisme de E où E est un espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous espace stable de E par u . Alors F est stable par u^{-1} .

Démonstration : *À faire en classe. On peut montrer que $u|_F$ est injectif.* □

Proposition

Soit E un espace euclidien. Soit $u \in O(E)$. Soit F un sous-espace stable de E par u . Alors $F^\perp$ est stable par u .

Démonstration : *À faire en classe.* □

2 Matrices orthogonales

2.1 Généralités

Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonale lorsque $A^\top A = I_n$.

Proposition

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- A est orthogonale ;
- A est inversible et son inverse est sa transposée ;
- la famille des colonnes de A forme une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ (muni du produit scalaire usuel) ;
- la famille des lignes de A forme une base orthonormée de $M_{1,n}(\mathbb{R})$ (muni du produit scalaire usuel) ;
- A est la matrice de passage de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et une base orthonormée ;
- A est la matrice de passage entre deux bases orthonormées.

Démonstration : *Ne pas tout faire. Expliquer la proposition 3 et la proposition 4. Rapidement expliquer d'où vient la 5.* $\square$

Lemme : Rappel

Soit E un espace euclidien. Soit B une base orthonormée de E . Soient $x, y \in E$ et posons $X = \text{Mat}_B(x)$ et $Y = \text{Mat}_B(y)$.

On a :

$$\langle x, y \rangle = X^\top Y.$$

Proposition

Soit E un espace euclidien. Soit B une base orthonormée de E et soit u un endomorphisme de E . Notons $A = \text{Mat}_B(u)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $u \in O(E)$;
- $\forall X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top (A^\top A) Y = X^\top Y$;
- A est orthogonale.

Démonstration : *À faire en classe.* $\square$

Remarque : Cela justifie *a posteriori* l'utilisation du même nom pour les matrices et les automorphismes orthogonaux.

Définition : Groupe orthogonal matriciel

L'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ est appelé le groupe orthogonal en dimension n . On le note $O_n(\mathbb{R})$ ou encore $O(n)$.

Proposition

On a :

- $I_n \in O(n)$;
- $O(n)$ est stable par composition ;
- Si $A \in O(n)$ alors A est inversible ;
- $O(n)$ est stable par passage à l'inverse.

Démonstration : *À faire en exercice.* $\square$

2.2 Orientation

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\det A \in \{-1, +1\}.$$

Démonstration : *À faire en classe.* $\square$

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle groupe spécial orthogonal l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1. On le note $SO_n(\mathbb{R})$ ou encore $SO(n)$.

Proposition

On a :

- $I_n \in \text{SO}(n)$;
- $\text{SO}(n)$ est stable par composition ;
- Si $A \in \text{SO}(n)$ alors A est inversible ;
- $\text{SO}(n)$ est stable par passage à l'inverse.

Remarques :

- Puisqu'il y a correspondance entre les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, pour tout u isométrie vectoriel d'un espace E euclidien, on a : $\det u \in \{-1, +1\}$.
- En particulier, on peut considérer l'ensemble des isométries vectorielles de déterminant 1. On appelle cet ensemble le groupe spécial orthogonal de E et on le note $\text{SO}(E)$. Ses éléments sont appelés isométries vectorielles positives de E .

Exemple : Soit s une symétrie orthogonale. s est positive si et seulement si $E_{-1}(s) = \ker(s + \text{Id})$ est de dimension paire. En particulier les réflexions orthogonales sont toujours négatives.

Définition : Bases de même orientation

Soit E un espace vectoriel. Soient B et B' deux bases de E . On dit que B et B' sont de même orientation lorsque :

$$\det(P_{B,B'}) > 0.$$

Définition : Orientation d'un espace

Orienter un espace E , c'est choisir une base B que l'on décrète être d'orientation **directe** (ou positive).

Les bases de même orientation que B seront donc dites d'orientation directe et celles d'orientation contraire seront dites d'orientation indirecte.

Remarques :

- Si deux bases orthonormées sont de même orientation, alors la matrice de passage entre les deux est une matrice de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.
- Si on travaille avec le produit scalaire canonique, en général, on choisit la base canonique comme base d'orientation directe. Ainsi les bases orthonormées directes sont précisément celles obtenues par l'application d'une matrice de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.

3 Cas particulier du plan euclidien

3.1 Approche matricielle

Soit E un espace euclidien de dimension 2. D'après ce qui précède, classifier les isométries vectorielles de E revient à classifier les matrices de $\text{O}_2(\mathbb{R})$.

Proposition

Soit $A \in \text{O}_2(\mathbb{R})$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\epsilon \sin \theta \\ \sin \theta & \epsilon \cos \theta \end{pmatrix}.$$

De plus $\epsilon = 1$ si et seulement si $A \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$.

Proposition

Notons $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ les éléments de $\text{SO}_2(\mathbb{R})$.

On a pour tout θ, θ' :

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta').$$

En particulier $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Illusion : dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les images de la base canonique.

3.2 Approche géométrique

Soit E un plan euclidien (on a donc $\dim E = 2$).

Définition

On appelle rotation vectoriel de E toute isométrie vectorielle positive de E . Les rotations vectoriels de E sont donc les éléments de $\text{SO}(E)$.

Remarque : Soit B une base orthonormée de E . On a vu que $u \in \text{SO}(E)$ si et seulement si $\text{Mat}_B(u) \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire si et seulement si $\text{Mat}_B(u) = R(\theta)$ pour un certain θ , qui sont bien les matrices de rotation.

Proposition

Soient B et B' deux bases orthonormées de E . Soit u une rotation vectorielle de E . Il existe donc θ et θ' tels que :

$$\text{Mat}_B(u) = R(\theta) \text{ et } \text{Mat}_{B'}(u) = R(\theta').$$

Si B et B' sont de même orientation, alors $R(\theta) = R(\theta')$ et donc :

$$\theta \equiv \theta' [2\pi].$$

Mais si B et B' sont d'orientation contraire alors :

$$R(\theta') = R(-\theta)$$

et donc $\theta \equiv -\theta' [2\pi]$.

Remarques :

- Ainsi, lorsque l'orientation de la base est choisie, on peut définir l'angle de rotation à 2π -près. On appelle cela l'angle orienté de la rotation.
- Mais, ce n'est pas une propriété *intrinsèque* de l'endomorphisme.
- En revanche, la trace de l'endomorphisme en est une. Or $\text{tr}(u) = 2 \cos \theta$ et donc le *cosinus* de l'angle est une propriété intrinsèque de la rotation. On peut caractériser toute rotation par un angle (non-orienté) entre 0 et π .

Proposition

Soit E un plan euclidien. Soient x et y deux vecteurs unitaires de E . Il existe une unique rotation vectorielle u de E telle que $u(x) = y$.

Remarque : Si E est orienté, on peut définir l'angle orienté entre x et y comme l'angle orienté de l'unique rotation envoyant x sur y .

Définition

Si x et y sont non nuls et si E est orienté, on appelle angle orienté entre x et y , l'angle orienté de la rotation envoyant $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$.

3.3 Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien**Proposition**

L'ensemble des isométries vectorielles d'un plan euclidien E est constitué :

- des rotation vectorielles (éléments de $\text{SO}(E)$) de déterminant 1 ;
- des réflexions orthogonales (éléments de $\text{O}(E) \setminus \text{SO}(E)$) de déterminant -1 .

En conséquence, la composée de deux réflexions orthogonales est une rotation vectorielle.

Exercice : exprimer l'angle de la rotation image d'une telle composition.

4 Endomorphismes autoadjoints**4.1 Généralités****Définition**

Soit E un espace euclidien. On appelle endomorphisme autoadjoint de E tout endomorphisme u de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Remarques :

- On note $\text{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .
- Si E est un espace euclidien, alors $\text{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{L}(E)$.

Proposition

Les projecteurs autoadjoints de E sont exactement les projecteurs orthogonaux de E .

Démonstration : *À faire en classe.* □

Proposition : (HP)

Les isométries vectorielles autoadjointes de E sont exactement les symétries orthogonales de E .

Démonstration : *Exercice*

Proposition

Soit E un espace euclidien. Soit u un endomorphisme autoadjoint et soit F un sous-espace de E stable par u . Alors $F^\top$ est stable par u .

Démonstration : *À faire en classe.*

Proposition

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- u est autoadjoint ;
- il existe une base orthonormée B de E telle que la matrice $\text{Mat}_B(u)$ soit symétrique ;
- pour toute base orthonormée B de E , la matrice $\text{Mat}_B(u)$ est symétrique.

Démonstration : *À faire en classe.* □ **Remarque :** Ainsi, on appelle parfois les endomorphismes autoadjoints des endomorphismes symétriques.

4.2 Théorème spectral

Théorème

Tout endomorphisme autoadjoint de E admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Démonstration : *Hors-programme.*

Corollaire

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, avec une matrice de passage pouvant être choisie orthogonale.

□

Définition : Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E . On dit que u est positif si $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0$.

On dit qu'il est défini positif si de plus $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs est noté $\mathcal{S}^+(E)$ et celui des autoadjoints définis positifs $\mathcal{S}^{++}(E)$.

□

Remarques :

- Le vocabulaire est analogue à celui sur les produits scalaires.
- Ce n'est pas un hasard. En effet, un endomorphisme autoadjoint est défini positif si et seulement l'application $(x, y) \mapsto \langle u(x), y \rangle$ est encore un produit scalaire.

Définition : Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top A X \geq 0$.

On dit qu'elle est définie positive si de plus $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top A X = 0 \Rightarrow X = 0_E$.

L'ensemble des matrices symétriques positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et celui des symétriques définies positives $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition

Soit E un espace euclidien et soit B une base orthonormée. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E . Notons $A = \text{Mat}_B(u)$.

u est positif si et seulement si A est positive.

u est défini positif si et seulement si A est définie positive.

Proposition

Un endomorphisme est (défini) positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont (strictement) positives.

□

Démonstration : *À faire en cours.* □ **Remarque :** une caractérisation similaire existe aussi pour les matrices (définies) positives.