

TD6 - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

1 Intégrales généralisées

Exercice 1. Préciser la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$
2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)} dt$
3. $\int_0^1 \frac{\sinh(\sqrt{t}) \ln(t)}{\sqrt{t} - \sin(t)} dt$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2 - t)}{(1+t)^2} dt$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)} dt$
6. $\int_0^1 \frac{\sinh(t) - \sin(t)}{t^{7/2}} dt$
7. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t} dt$
8. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$
9. $\int_0^{+\infty} (t+2 - \sqrt{t^2+4t+1}) dt$
10. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(z+t)(1+\sqrt{t})}$, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

Exercice 2. Étudier suivant les valeurs de $\alpha \geq 0$, l'existence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\ln(x)|^\alpha}{x^2+1} dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha} dt$$

Exercice 3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que l'intégrale suivante existe :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} dt$$

Exercice 4. Existence et calcul de :

1. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ (poser $u = \frac{1}{t}$)
2. $J = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$
3. $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \ln(\sin(t)) dt$ (poser $u = \cos(t)$)
4. $L = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt$ (poser $t = \sin(u)$)
5. $M = \int_1^{+\infty} \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$ (indication : $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$)

Exercice 5.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = x^\alpha e^{ix}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Montrer que pour $-1 < \alpha < 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.

Exercice 6. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge (on pourra intégrer par parties) mais pas absolument (on pourra utiliser que $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$ puis une identité trigonométrique pour se ramener à une intégrale semblable à $I \dots$).

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer : $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

Exercice 8. On définit la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ de terme général $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$.

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \geq 1$. Calculer I_1 .

2. Trouver un lien entre I_{n+1} et I_n .
3. En déduire la valeur de I_n .

Exercice 9. Étudier la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \ln^n(t) dt$ (On pourra chercher une relation entre I_{n+1} et I_n).

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0, et que $f(0) = 0$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est convergente.
2. On suppose de plus que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$ est divergente.

Exercice 11. Déterminer a pour que l'intégrale suivante existe :

$$\int_1^{+\infty} \left(x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{a}{x} \right) dx$$

Exercice 12. Convergence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt$. Indication : On intègre par parties en dérivant $\ln$, puis dans l'intégrale qui reste, on pose $u = \sqrt{1-x}$.

Exercice 13. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, E l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n . Notons $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ sa base standard : pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, P_k est la fonction polynôme $t \mapsto t^k$.

1. (a) Démontrer que, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 P_k(t) e^t dt$ est convergente.
- (b) En déduire que si $f \in E$, l'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt \in \mathbb{R}$ est bien définie.
On pose $g = L(f)$.
- (c) Calculer $L(P_0)$, $L(P_1)$, $L(P_2)$.
- (d) Démontrer que, si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $L(P_{k+1}) = P_{k+1} - (k+1)L(P_k)$, et en déduire que

$$L(P_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} P_j.$$

2. (a) Vérifier que si f appartient à E alors $L(f)$ appartient à E et en déduire que l'application L est un endomorphisme de E . Donner la matrice M de l'endomorphisme L dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$.
- (b) A l'aide de 1d, démontrer que M est inversible et préciser M^{-1} .

Exercice 14. Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f .
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
3. Donner un équivalent de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

Exercice 15 (CCP 2009 Officiel de la Taupe - exo 2). Existence de $\int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{1-x^2} dx$.

Exercice 16 (CCP PC 2019 (RMS 130 exo 1353) - exo 2). Montrer que $f : t \mapsto \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Exercice 17 (CCP PC 2019 (RMS 130 exo 1355) - exo 2). Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$. Calculer I .

Exercice 18 (CCP PC 2018 - BEOS 4575). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} dx$ et $v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x} dx$.

1. Montrer par intégration par parties que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ converge.
2. Montrer que les intégrales u_n et v_n convergent.
3. (a) Montrer que

$$v_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{n\pi} \frac{1 - \cos(u)}{u} du.$$

- (b) Montrer que $v_n \sim \frac{\ln(n)}{2\pi}$.

4. On définit la fonction f par $f : x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\mapsto \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
5. Donner un équivalent de u_n .

Exercice 19 (CCP PC 2018 ODLT 193). Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$. Pour $P \in E$, on note $I(P) = \int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

1. $I(1)$ est-elle convergente ? Quelle est sa valeur ?
2. Pour $0 \leq k \leq 5$, $I(X^k)$ est-elle absolument convergente ? $I(P)$ converge-t-elle ?
3. Dans cette question, on admet qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $P \in E$,

$$I(P) = a P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b P(0) + c P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

- (a) Calculer $I(X)$ et en déduire une relation entre a , b et c .
- (b) On donne $I(X^2) = \frac{\pi}{2}$; Donner les valeurs de a , b et c .
4. Donner une relation entre $I(X^{k+1})$ et $I(X^{k-1})$, puis montrer le résultat admis à la question précédente.

Solutions

Exercice 1. 1) • La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

• On a

$$\sqrt{t}f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{t} \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

par croissance comparée (car $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$), donc

$$f(t) = \underset{t \rightarrow 0^+}{o} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right).$$

• On a

$$t^{\frac{3}{2}}f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

par croissance comparée (car $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$), donc

$$f(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \right).$$

• **Rédaction 1** : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0, 1]$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).

Donc par critère de domination, la fonction f est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$, autrement dit l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Rédaction 2 : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable en 0 (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est continue (par morceaux) et intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).

Donc par critère de domination, la fonction f est intégrable en 0 et en $+\infty$, donc sur $]0, +\infty[$, autrement dit l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Remarque. En 0, on peut aussi dire : $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(t)$ et $\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$, donc par critère d'équivalence, f aussi.

2) • La fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}$$

est continue sur $]0, 1[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, 1[$.

• On a

$$f(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{1-t}.$$

- La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{1-t}$$

est continue sur $]0, 1[$, la fonction

$$t \mapsto g(1-t) = \frac{1}{t}$$

n'est pas intégrable en 0 (Riemann), donc la fonction g n'est pas intégrable en 1 (*application d'un résultat du cours*). Comme la fonction g est positive sur $]0, 1[$, on en déduit que l'intégrale de g diverge en 1.

Enfin, toujours car g est positive, on en déduit que l'intégrale de f diverge en 1 par critère d'équivalence. Donc l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ diverge aussi.

Remarque. Cette dernière intégrale converge en 0, mais cela n'a pas d'intérêt.

- 3) • Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(t)| \leq |t|$. Donc si $t \in]0, 1[$,

$$|\sin(t)| \leq |t| < \sqrt{t},$$

inégalité stricte qui reste vraie en 1 (c'est-à-dire $|\sin(1)| < \sqrt{1}$), donc la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\sinh(\sqrt{t}) \ln(t)}{\sqrt{t} - \sin(t)}$$

est définie et continue sur $]0, 1[$ (composée, produit puis quotient de fonctions qui le sont, avec le dénominateur qui ne s'annule pas sur $]0, 1[$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, 1[$.

- On a

$$\sin(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t = \underset{t \rightarrow 0^+}{o}(\sqrt{t}), \quad \text{donc} \quad \sqrt{t} - \sin(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{t}.$$

Puis, $\sinh(u) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} u$, et comme $\sqrt{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$, par composition, on a l'équivalent

$$\sinh(\sqrt{t}) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{t}.$$

Donc

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(t).$$

- **Rédaction 1 :** la fonction

$$g : t \mapsto \ln(t)$$

est intégrable sur $]0, 1[$.

Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable sur $]0, 1[$. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

- **Rédaction 2 :** la fonction

$$g : t \mapsto \ln(t)$$

est intégrable en 0.

Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable en 0, donc sur $]0, 1[$. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

- 4) • Pour tout $t \in]1, +\infty[$, on a $t > 1$ donc $t^2 > t$, puis

$$t^2 - t > 0.$$

Et $(1+t)^2 \geq 4 > 0$ si $t \in]1, +\infty[$. Donc la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t^2 - t)}{(1+t)^2}$$

est continue sur $]1, +\infty[$ par composition puis quotient de fonctions qui le sont (avec le dénominateur qui ne s'annule pas), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]1, +\infty[$.

- On a

$$f(t) = \frac{\ln(t) + \ln(t-1)}{(1+t)^2} \underset{t \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{4} \ln(t-1)$$

(car $\ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^+]{} 0$ et $\ln(t-1) \xrightarrow[t \rightarrow 1^+]{} -\infty$, donc $\ln(t)$ est négligeable devant $\ln(t-1)$ en 1^+).

• On a

$$t^{\frac{3}{2}} f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t^2 - t)}{\sqrt{t}} = \frac{\ln(t^2) + \ln(1 - \frac{1}{t})}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

(par croissance comparée, car $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$), donc

$$f(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

• **Rédaction 1** : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est intégrable sur $[2, +\infty[$ (Riemann, $2 > 1$), la fonction

$$t \mapsto \ln(t-1)$$

est intégrable sur $]1, 2]$ car la fonction $\ln$ est intégrale sur $]0, 1]$.

Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable sur $]1, 2]$, et par critère de domination, la fonction f est intégrable sur $[2, +\infty[$. Donc la fonction f est intégrable sur $]1, +\infty[$, donc l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Rédaction 2 : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $2 > 1$), la fonction

$$t \mapsto \ln(t-1)$$

est intégrable en 1^+ car la fonction $\ln$ est intégrale en 0^+ .

Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable en 1^+ , et par critère de domination, la fonction f est intégrable en $+\infty$. Donc la fonction f est intégrable sur $]1, +\infty[$, donc l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

5) • La fonction

$$t \mapsto \tan(t)$$

est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc la fonction

$$f : t \mapsto \sqrt{\tan(t)}$$

est continue (et positive) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par composition avec la racine carrée, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

• Si $t = \frac{\pi}{2} - h$,

$$\tan(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)} = \frac{\cos(h)}{\sin(h)} \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{h}.$$

Donc

$$f(t) \underset{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - t}}.$$

• La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - t}}$$

est intégrable en $\frac{\pi}{2}$, car la fonction

$$t \mapsto g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

l'est en 0^+ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).

Donc par critère d'équivalence, f est intégrable en $\frac{\pi}{2}$, autrement dit l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Autre méthode : la fonction

$$t \mapsto \tan(t)$$

est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc la fonction

$$f : t \mapsto \sqrt{\tan(t)}$$

est continue (et positive) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par composition avec la racine carrée, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Faisons le changement de variable $u = \tan(t)$. La fonction

$$t \mapsto \tan(t)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc induit une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur

$$\left[\lim_{t \rightarrow 0^+} \tan(t), \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(t)\right[=]0, +\infty[,$$

on peut donc bien faire ce changement de variable.

De plus, on a « $du = (1 + \tan^2(t))dt$ », soit « $dt = \frac{du}{1 + u^2}$ ». Le théorème de changement de variable donne alors que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)} dt$$

est de même nature que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1 + u^2} du$$

(et a même valeur si convergence).

Rédaction 1 : Or, la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1 + u^2}$$

est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[0, +\infty[$, en particulier sur $[0, 1]$.

De plus,

$$\frac{\sqrt{u}}{1 + u^2} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, la fonction

$$u \mapsto \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann), et donc par critère d'équivalence, la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1 + u^2}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1 + u^2} du$ converge absolument, et donc que l'intégrale

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)} dt$ converge absolument aussi.

Rédaction 2 : Or, la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1 + u^2}$$

est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment de $[0, +\infty[$.

De plus,

$$\frac{\sqrt{u}}{1+u^2} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}.$$

Comme $\frac{3}{2} > 1$, la fonction

$$u \mapsto \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable en $+\infty$ (Riemann), et donc par critère d'équivalence, la fonction

$$u \mapsto \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}$$

est intégrable en $+\infty$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2} du$ converge absolument, et donc que l'intégrale

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)} dt$ converge absolument aussi.

6) • La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\sinh(t) - \sin(t)}{t^{7/2}}$$

est continue sur $]0, 1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, 1]$.

• Un DL donne

$$f(t) = \frac{t + \frac{1}{6}t^3 + O(t^5) - t + \frac{1}{6}t^3 + O(t^5)}{t^{\frac{7}{2}}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3\sqrt{t}}.$$

• **Rédaction 1** : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{3\sqrt{t}} = \frac{1}{3t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable sur $]0, 1]$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).

Donc par critère d'équivalence, la fonction f aussi. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Rédaction 2 : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{3\sqrt{t}} = \frac{1}{3t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable en 0 (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).

Donc par critère d'équivalence, la fonction f aussi. En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

7) • La fonction

$$f : t \mapsto \frac{e^{\sin(t)}}{t}$$

est continue sur $[1, +\infty[$ (par composition puis quotient, avec le dénominateur qui ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $[1, +\infty[$.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) \geq -1$ donc par croissance de l'exponentielle,

$$e^{\sin(t)} \geq e^{-1},$$

puis pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(t) \geq \frac{e^{-1}}{t} \geq 0.$$

• La fonction

$$t \mapsto \frac{e^{-1}}{t}$$

est continue **positive** sur $[1, +\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{t} dt$ diverge (intégrale de Riemann).

Donc par critère de comparaison, l'intégrale considérée diverge.

8) • La fonction

$$f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

est continue sur $[0, 1[$ car $t \mapsto 1 - t^2$ est continue et strictement positive sur $[0, 1[$ (on peut alors composer avec $t \mapsto t^{-\frac{1}{2}}$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0, 1[$.

• On a

$$f(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$$

(car $1 - t^2 = (1 - t)(1 + t)$).

• La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

est intégrable en 1^- car la fonction

$$t \mapsto g(1-t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable en 0^+ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).

Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable en 1^- . En particulier, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Remarque. Ici, on sait primitiver ! La fonction arcsin est une primitive de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

sur $] -1, 1[$, donc pour tout $x \in] -1, 1[$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arcsin(t)]_0^x = \arcsin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

car on sait que la fonction arcsin, bien que seulement dérivable sur $] -1, 1[$, est continue sur $[-1, 1]$. Donc on retrouve que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge, et on a en plus

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

9) • Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t^2 + 4t + 1 = (t+1)^2 + 2t \geq 0,$$

donc on peut composer par la fonction racine carrée, puis par composition puis soustraction, la fonction

$$f : t \mapsto t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1}$$

est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$.

• En utilisant la quantité conjuguée, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1} = \frac{3}{t + 2 + \sqrt{t^2 + 4t + 1}} = \frac{3}{t \left(1 + \frac{2}{t} + \sqrt{1 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}}\right)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2t}.$$

• La fonction

$$t \mapsto \frac{3}{2t}$$

est continue positive sur $[1, +\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{3}{2t} dt$ diverge (Riemann).

Donc par critère d'équivalence, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \left(t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1} \right) dt$$

diverge, ce qui entraîne que l'intégrale considérée diverge.

10) • Soit

$$f : t \mapsto \frac{1}{(z+t)(1+\sqrt{t})},$$

la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ car $(z+t)(1+\sqrt{t})$ ne s'annule que pour $t = -z \notin \mathbb{R}_+$ (car $z \notin \mathbb{R}_-$). Donc la fonction f est intégrable sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$, en particulier sur $[0, 1]$.

• On a

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

• **Rédaction 1** : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).

Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Rédaction 1 : la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).

Donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable en $+\infty$.

• Donc la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$. Autrement dit, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge.

Exercice 2. ★

• La fonction

$$f : x \mapsto \frac{|\ln(x)|^\alpha}{x^2 + 1}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ (la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est continue sur $[0, +\infty[$ si $\alpha \geq 0$) par composition puis quotient de fonctions continues, dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc la fonction f est intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

• On a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} |\ln(x)|^\alpha = \underset{x \rightarrow 0^+}{o} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

car $\sqrt{x} |\ln(x)|^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ par croissance comparée (car $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ avec $\frac{1}{2} > 0$).

• On a

$$x^{\frac{3}{2}} f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|\ln(x)|^\alpha}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

par croissance comparée. Donc

$$f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right).$$

• **Rédaction 1** : la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

est intégrale sur $]0, 1]$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrale sur $[1, +\infty[$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).

Donc par critère de domination, la fonction f est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$. Autrement dit, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge, pour tout $\alpha \geq 0$.

Rédaction 2 : la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

est intégrale en 0 (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

est intégrale en $+\infty$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).

Donc par critère de domination, la fonction f est intégrable en 0 et en $+\infty$, donc sur $]0, +\infty[$. Autrement dit, l'intégrale considérée converge absolument, donc converge, pour tout $\alpha \geq 0$.

★

• La fonction

$$g : t \mapsto \frac{t - \sin(t)}{t^\alpha}$$

est continue positive sur $]0, +\infty[$ (positive car $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout réel t , donc $\sin(t) \leq |\sin(t)| \leq t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

• On a

$$g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}.$$

• La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

est continue positive sur $[1, +\infty[$, et intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ (Riemann), soit si et seulement si $\alpha > 2$. Donc la fonction g est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ si et seulement si $\alpha > 2$ (et comme $g \geq 0$, cela revient bien à dire que l'intégrale converge en l'infini si et seulement si $\alpha > 2$).

• On a

$$g(t) = \frac{\frac{1}{6}t^3 + \underset{t \rightarrow 0}{o}(t^3)}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{6t^{\alpha-3}}.$$

• La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{6t^{\alpha-3}}$$

est continue positive sur $]0, 1]$, et intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ si et seulement si $\alpha - 3 < 1$ (Riemann), soit si et seulement si $\alpha < 4$. Donc la fonction g est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ si et seulement si $\alpha < 4$ (et comme $g \geq 0$, cela revient bien à dire que l'intégrale converge en 0 si et seulement si $\alpha < 4$).

Conclusion : l'intégrale converge si et seulement si $2 < \alpha < 4$, et alors elle converge absolument.

Exercice 3. La fonction

$$f : t \mapsto \frac{t^a}{1 + t^b}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ ($t^b > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$. De plus, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc l'intégrale considérée converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Cas 1 : Si $b > 0$,

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^a,$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{-a}}$ est positive continue sur $]0, 1]$, et intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ si et seulement si $-a < 1$ (Riemann).

Puis,

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{b-a}},$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{b-a}}$ est positive continue sur $[1, +\infty[$, et intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ si et seulement si $b - a > 1$ (Riemann). Donc (par critère d'équivalence), l'intégrale n'existe que si

$$b > 1 + a > 0.$$

Cas 2 : si $b = 0$, l'intégrale est $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} t^a dt$ qui diverge toujours (Riemann).

Cas 3 : si $b < 0$,

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{b-a}},$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{b-a}}$ est positive continue sur $]0, 1]$, et intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ si et seulement si $b - a < 1$ (Riemann).

Puis,

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^a,$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{-a}}$ est positive continue sur $[1, +\infty[$, et intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ si et seulement si $-a > 1$ (Riemann). Donc (par critère d'équivalence), l'intégrale n'existe que si $b < 1 + a < 0$.

Conclusion : donc l'intégrale existe si et seulement si $b > 1 + a > 0$ ou $b < 1 + a < 0$.

Remarque. Si $b < 0$, on peut écrire $b = -b'$ avec $b' > 0$, et alors

$$\frac{t^a}{1+t^b} = \frac{t^a}{1+\frac{1}{t^{b'}}} = \frac{t^{a+b'}}{1+t^{b'}},$$

et donc le premier cas donne la convergence si et seulement si $b' > a + b' + 1 > 0$, soit $b < b - a - 1 < 0$, qui redonne bien $b < 1 + a < 0$.

Exercice 4. 1) La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$$

est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

On a

$$f(t) = \underset{t \rightarrow 0^+}{o} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \quad \text{et} \quad f(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \right)$$

par croissances comparées.

De plus,

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$),
- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$),

donc par critère de domination, la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ et $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, donc sur $]0, +\infty[$, ce qui assure l'absolue convergence de l'intégrale I , donc la convergence.

Faisons le changement de variable $u = \frac{1}{t}$: la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, $du = -\frac{1}{t^2} dt$ donc $dt = -\frac{du}{u^2}$, puis (**comme on sait que l'intégrale I converge**) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+u^2} (-du) = -I$$

donc

$$\boxed{I = 0}.$$

2) La fonction

$$g : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

est continue sur $]0, +\infty[$ (par composition), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

On a

$$g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad g(t) = \ln(t^2 + 1) - 2 \ln(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -2 \ln(t),$$

or

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $2 > 1$)
- et la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$,

donc par critère d'équivalence, la fonction g est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ et $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, donc sur $]0, +\infty[$.

En particulier, l'intégrale J converge absolument, donc converge.

Les fonctions

$$u : t \mapsto t \quad \text{et} \quad v : t \mapsto \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, de dérivées respectives

$$u' : t \mapsto 1 \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto -\frac{2}{t(1+t^2)}.$$

De plus,

$$u(t)v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad u(t)v(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -2 \ln(t)t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

(donc uv a bien une limite **finie** en 0^+ et en $+\infty$).

Donc, le théorème d'intégration par parties s'applique : comme l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$$

converge, on a l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$$

qui converge aussi, et

$$J = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = 0 - 0 - \int_0^{+\infty} -\frac{2}{1+t^2}dt = 2 [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \boxed{\pi}$$

3) La fonction

$$f : t \mapsto \sin(t) \ln(\sin(t))$$

est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (car sur cet intervalle, $\sin > 0$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$f(t) = \sin(t) \ln(\sqrt{1 - \cos^2(t)}) = \frac{1}{2} \sin(t) \ln(1 - \cos^2(t)),$$

car $\sin > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (donc $\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)}$).

Faisons le changement de variable $u = \cos(t)$.

La fonction

$$t \mapsto \cos(t)$$

est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0, 1[$, $du = -\sin(t)dt$, donc le théorème de changement de variable donne que l'intégrale K **a la même nature que** l'intégrale

$$\int_1^0 -\frac{1}{2} \ln(1 - u^2)du = \frac{1}{2} \int_0^1 (\ln(1 - u) + \ln(1 + u))du,$$

et a même valeur si convergence. Or,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\ln(1-u) + \ln(1+u))du &= \lim_{e \rightarrow 0^-} [-(1-u)\ln(1-u) + (1-u) + (1+u)\ln(1+u) - (1+u)]_0^{1-e} \\ &= \lim_{e \rightarrow 0^-} (-e\ln(e) + e + (2-e)\ln(2+e) - (2+e)) = 2\ln(2) - 2\end{aligned}$$

Comme la limite existe et est finie, l'intégrale précédente converge, donc l'intégrale K converge, et

$$\boxed{K = \ln(2) - 1}.$$

4) La fonction

$$t \mapsto \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}$$

est continue sur $[0, 1[$ (car pour $t \in [0, 1[$, on a $0 \leq t < 1$ donc $1 - t^2 > 0$, donc on peut composer avec la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0, 1[$.

Faisons le changement de variable $t = \sin(u)$: la fonction

$$u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \sin(u)$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0, 1[$. Alors $dt = \cos(u)du = \sqrt{1-\sin^2(u)}du$ car sur cet intervalle, $\cos > 0$. Donc

$$du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Donc le théorème de changement de variable donne que l'intégrale L a la même nature que l'intégrale

$$L' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(u)du,$$

et même valeur si convergence. Or, cette nouvelle intégrale n'est pas impropre : la fonction

$$u \mapsto \sin^3(u)$$

est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc est intégrable sur ce segment. Donc l'intégrale L' converge, donc l'intégrale L converge aussi, et

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)(1 - \cos^2(u))du = \left[-\cos(u) + \frac{1}{3}\cos^3(u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

5) La fonction

$$f : t \mapsto \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[1, +\infty[$.

On a

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^3} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

par croissance comparée, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $2 > 1$), donc par critère de domination, la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ et l'intégrale M existe donc (l'intégrale M converge absolument, donc converge).

Intégrons par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto -\frac{1}{2(1+t^2)} \quad \text{et} \quad v : t \mapsto \ln(t)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivée

$$u' : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto \frac{1}{t},$$

de plus on a

$$u(t)v(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\ln(t)}{2t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée (donc uv a bien une limite **finie** en $+\infty$). Comme on sait que l'intégrale

$$M = \int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt$$

converge, le théorème d'intégration par parties s'applique et donne que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \int_1^{+\infty} -\frac{1}{2t(1+t^2)}dt$$

converge, et de plus, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} M &= \underbrace{\left[-\frac{\ln(t)}{2(1+t^2)} \right]_1^{+\infty}}_{=0-0} - \int_1^{+\infty} -\frac{1}{2t(1+t^2)}dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_1^{+\infty} \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(A) - \ln(1+A^2)}{4} + \frac{\ln(2)}{4} \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \ln \left(\frac{A^2}{1+A^2} \right) + \frac{\ln(2)}{4} = \boxed{\frac{\ln(2)}{4}} \end{aligned}$$

Exercice 5. 1) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

La fonction f est continue en 0 si $\alpha \geq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|f(x)| = x^\alpha,$$

et l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha dx$$

est une intégrale de Riemann toujours divergente (quelque soit α : en 0 si $\alpha \leq -1$, en $+\infty$ si $\alpha \geq -1$). Donc la fonction f n'est jamais intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) L'intégrale demandée n'est pas absolument convergente, mais on va regarder sa convergence.

• Pour $\alpha > -1$, la fonction

$$x \mapsto |f(x)| = x^\alpha$$

est intégrable en 0 (Riemann), donc pas de problème en 0 : l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

• Puis, les fonctions

$$u : x \mapsto -ie^{ix} \quad \text{et} \quad v : x \mapsto x^\alpha$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivées

$$u' : x \mapsto e^{ix} \quad \text{et} \quad v' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}.$$

Puis, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$|u(x)v(x)| = x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

si $\alpha < 0$. Donc le théorème d'intégration par parties s'applique, et donne que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

est de même nature que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(x)v'(x)dx = \int_1^{+\infty} -i\alpha e^{ix} x^{\alpha-1} dx$$

(et si convergence, on a une égalité qui les relie, mais on ne s'en sert pas ici).

Or, la fonction

$$g : x \mapsto -i\alpha x^{\alpha-1} e^{ix}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, la fonction

$$|g| : x \mapsto |\alpha| x^{\alpha-1}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ si $\alpha < 0$ (Riemann), donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(x)v'(x)dx$$

converge, donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

converge.

Conclusion : l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

converge si $\alpha < 0$, l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)dx$$

converge si $-1 < \alpha$, et donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

converge si $-1 < \alpha < 0$.

Exercice 6. • La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$$

est continue sur $]0, +\infty[$, et se prolonge par continuité en 0 (en posant $f(0) = 1$), donc est intégrable sur tout intervalle du type $]0, A]$ avec $A > 0$. En particulier, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$$

converge.

• Les fonctions

$$u : t \mapsto -\cos(t) \quad \text{et} \quad v : t \mapsto \frac{1}{t}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivée

$$u' : t \mapsto \sin(t) \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto -\frac{1}{t^2}.$$

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a

$$0 \leq |u(t)v(t)| \leq \frac{1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$$

(donc uv a bien une limite **finie** en $+\infty$)

Donc le théorème d'intégration par parties s'applique et donne que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \int_1^{+\infty} f(t)dt$$

est de même nature que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

(et si convergence, on a une égalité qui les relient, mais on ne s'en servira pas ici).

Puis, la fonction

$$g : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, et la fonction $\cos$ étant borné sur $\mathbb{R}$ (donc au voisinage de $+\infty$), on a

$$g(t) = {}_{t \rightarrow +\infty} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, donc par critère de domination, la fonction g aussi. Donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

converge, et donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \int_1^{+\infty} f(t)dt$$

converge.

Conclusion : les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$$

convergent, donc par la relation de Chasles, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$$

converge.

Remarque. En choisissant $t \mapsto 1 - \cos(t)$ comme primitive de $\sin$, on peut même faire l'intégration par parties sur $]0, +\infty[$, et obtenir

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}dt.$$

• Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin(t) \in [-1, 1],$$

on a, pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$|\sin(t)| \geq \sin^2(t), \quad \text{donc} \quad \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \geq \frac{\sin^2(t)}{t} \geq 0.$$

Or, la formule trigonométrique de duplication donne, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad \text{donc} \quad \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \geq \frac{1 - \cos(2t)}{2t} \geq 0.$$

Puis, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$$

converge (comme ci-dessus, en intégrant par parties...), mais l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

diverge. Donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{2t} dt$$

diverge (addition d'une intégrale convergente avec une intégrale divergente). L'inégalité des fonctions (positives) et la divergence de cette intégrale donnent, grâce au critère de comparaison, que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$$

diverge, autrement dit que l'intégrale I ne converge pas absolument.

Exercice 7. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f : t \mapsto t^n e^{-t}$$

est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$.

On a

$$f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

car $t^{n+2} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissance comparée (car $n+2 > 0$). Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, donc par critère de domination, la fonction f aussi.

Donc l'intégrale I_n converge (absolument) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto t^n \quad \text{et} \quad v : t \mapsto -e^{-t}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, de dérivées respectives

$$u' : t \mapsto nt^{n-1} \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{-t},$$

et

$$u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

par croissance comparée (donc uv a bien une limite **finie** en $+\infty$), donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme on sait que l'intégrale I_n converge, le théorème d'intégration par parties donne :

$$I_n = \underbrace{[-t^n e^{-t}]_0^{+\infty}}_{=0-0} - \int_0^{+\infty} -nt^{n-1} e^{-t} dt = nI_{n-1}$$

Comme

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1,$$

on en déduit par récurrence directe que

$$\boxed{I_n = n!}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. 1) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$$

est continue sur $[0, +\infty[$ comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$, en particulier sur $[0, 1]$.

• On a

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}},$$

or $n \geq 1$ donc $2n \geq 2 > 1$, donc la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{2n}}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann), et donc par critère d'équivalence, la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$.

Donc la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis l'intégrale I_n existe (et même converge absolument).

Enfin,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre par parties : les fonctions

$$u : x \mapsto x \quad \text{et} \quad v : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, de dérivée

$$u' : x \mapsto 1 \quad \text{et} \quad v' : x \mapsto \frac{-2nx}{(x^2 + 1)^{n+1}},$$

on a

$$u(x)v(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n-1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

car $2n - 1 \geq 1 > 0$ (puisque $n \geq 1$). Enfin, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x) dx$$

converge, alors le théorème d'intégration par parties s'applique et donne que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(x)v'(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{-2nx}{(x^2 + 1)^{n+1}} x dx$$

converge, et

$$I_n = \underbrace{\left[\frac{x}{(x^2 + 1)^n} \right]_0^{+\infty}}_{=0-0} - \int_0^{+\infty} -\frac{2nx}{(x^2 + 1)^{n+1}} x dx = 2n \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^{n+1}} dx = 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

Donc

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) On a alors en itérant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} I_1 = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

(en multipliant/divisant par les pairs), donc

$$I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} \pi = \boxed{\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{n}{2n-1} \pi}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

Initialisation : si $n = 1$,

$$\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{n}{2n-1} \pi = \frac{2!}{4 \cdot 1^2} \frac{1}{2-1} \pi = \frac{\pi}{2} = I_1.$$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $I_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{n}{2n-1} \pi$. Alors

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n = \frac{2n-1}{2n} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{n}{2n-1} \pi = \frac{1}{2} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \pi$$

alors que

$$\frac{(2(n+1))!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \frac{n+1}{2(n+1)-1} \pi = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)n!)^2} \frac{n+1}{2n+1} \pi = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{4(n+1)^2 4^n(n!)^2} \frac{n+1}{2n+1} \pi = \frac{1}{2} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \pi$$

Il y a donc bien égalité :

$$I_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \frac{n+1}{2(n+1)-1} \pi.$$

D'où l'hérédité.

Conclusion : on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{n}{2n-1} \pi$.

Exercice 9. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f : t \mapsto \ln^n(t)$$

est continue sur $]0, 1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(t) = {}_{t \rightarrow 0} o \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

car

$$\sqrt{t} \ln^n(t) = t^{\frac{1}{2}} \ln^n(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$$

par croissance comparée (car $\frac{1}{2} > 0$). Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$), donc la fonction f aussi par critère de domination.

Donc l'intégrale I_n est absolument convergente (donc convergente) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, les fonctions

$$u : t \mapsto t \quad \text{et} \quad v : t \mapsto \ln^{n+1}(t)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$, de dérivée

$$u' : t \mapsto 1 \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto (n+1) \frac{\ln^n(t)}{t},$$

on a

$$u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$$

par croissance comparée (donc uv a bien une limite **finie** en 0^+), donc par le théorème d'intégration par parties, comme on sait que l'intégrale

$$I_{n+1} = \int_0^1 u'(t)v(t)dt$$

converge, on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^1 u(t)v'(t)dt = \int_0^1 (n+1)t \frac{\ln^n(t)}{t} dt$$

converge, et que :

$$I_{n+1} = \underbrace{[t \ln^{n+1}(t)]_0^1}_{=0-0} - \int_0^1 (n+1) \ln^n(t) dt = -(n+1)I_n$$

Comme $I_0 = 1$, on a par récurrence directe

$$I_n = (-1)^n n!$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. Le changement de variable $u = -\ln(t)$ donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = (-1)^n n!$$

d'après l'un des exercices précédents.

Exercice 10. 1) • La fonction f est continue sur $[0, 1]$, donc par quotient, la fonction

$$g : t \mapsto \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}$$

est continue sur $]0, 1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, 1]$.

• Puis, $f(0) = 0$ et la fonction f est dérivable en 0, donc

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} f'(0),$$

donc la fonction

$$t \mapsto \frac{f(t)}{t}$$

est bornée au voisinage de 0 (puisqu'elle a une limite en 0), et donc

$$g(t) = O_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right).$$

• Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en 0} \end{array} \right\}$ (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$).

Donc, par critère de domination, la fonction g est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en 0} \end{array} \right\}$. En particulier, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt$$

est (absolument) convergente.

2) La fonction f est continue sur $[0, 1]$, donc par quotient, la fonction

$$g : t \mapsto \frac{f(t)}{t^2}$$

est continue sur $]0, 1]$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, 1]$.

Comme $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, on peut dire

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t f'(0),$$

et donc

$$\frac{f(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{f'(0)}{t},$$

or la fonction

$$t \mapsto \frac{f'(0)}{t}$$

est continue **de signe constant** sur $]0, 1]$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{f'(0)}{t} dt$ diverge (Riemann, **et car** $f'(0) \neq 0$), donc par critère d'équivalence, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$$

est divergente.

Exercice 11. • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0,$$

donc par composition, la fonction

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction

$$f : x \mapsto x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{a}{x}$$

est continue sur $[1, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $[1, +\infty[$.

• En utilisant la quantité conjuguée : pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ (on veut $x \geq 0$ pour que $\sqrt{x^2} = x$, et $x \neq 0$ pour pouvoir diviser par x),

$$x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \frac{-1}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{-1}{x} \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}}.$$

On utilise alors le développement limité :

$$\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{1}{2}u + O_{u \rightarrow 0}(u^2),$$

donc en posant $u = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$, on a $u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc

$$\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x} + O_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par conséquent,

$$x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \frac{-1}{x} \frac{1}{2 + \frac{2}{x} + O_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-1}{2x} \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + O_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

Or, on a le DL

$$\frac{1}{1 + u} = 1 - u + O_{u \rightarrow 0}(u^2),$$

donc en posant $u = \frac{1}{x} + O_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, on a $u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc

$$x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \frac{-1}{2x} \left(1 - \frac{1}{x} + O_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{1}{2x} + O_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par conséquent,

$$f(x) = \frac{-2a - 1}{2x} + O_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

• Si $-2a - 1 \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-2a - 1}{2x},$$

or la fonction

$$x \mapsto \frac{-2a - 1}{2x}$$

est de signe constant et continue sur $[1, +\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{-2a-1}{2x} dx$ diverge (Riemann, **et car** $-2a-1 \neq 0$), donc, par critère d'équivalence, l'intégrale considérée diverge.

- Si $-2a-1 = 0$, alors

$$f(x) = O_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

Or la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, donc par critère de domination, la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$.

- Donc l'intégrale existe si et seulement si

$$\boxed{a = -\frac{1}{2}}.$$

Exercice 12. • La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}$$

est continue sur $]0, 1[$ par composition et quotient de fonctions qui le sont (car $1-t > 0$ pour $t \in]0, 1[$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, 1[$.

- On a

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(t),$$

or la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, \frac{1}{2}] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$.

- On a

$$f(t) \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{t-1}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t} \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} 0,$$

donc la fonction f se prolonge par continuité en 1 (en posant $f(1) = 0$), donc la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \\ \text{en } 1 \end{array} \right\}$.

Donc la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, \frac{1}{2}] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ et $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \\ \text{en } 1 \end{array} \right\}$, donc sur $]0, 1[$. L'intégrale considérée converge donc absolument, en particulier elle converge.

On intègre alors par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto \ln(t) \quad \text{et} \quad v : t \mapsto -2\sqrt{1-t}$$

sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, de dérivée

$$u' : t \mapsto \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}},$$

de plus

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} u(t)v(t) = 0$$

existe et est finie, mais la fonction uv n'a pas de limite finie en 0. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'intégration par parties sur $]0, 1[$, mais on peut l'appliquer sur $[e, 1[$, pour tout $e \in]0, 1[$.

Comme on sait que la fonction f est intégrable sur $]0, 1[$ (donc sur $[e, 1[$), on a alors :

$$\int_e^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt = [-2\sqrt{1-t} \ln(t)]_e^1 - \int_e^1 -2\sqrt{1-t} \frac{1}{t} dt = 2\sqrt{1-e} \ln(e) + 2 \int_e^1 \sqrt{1-t} \frac{1}{t} dt$$

Posons alors $u = \sqrt{1-t}$ dans l'intégrale qui reste : la fonction

$$t \mapsto \sqrt{1-t}$$

est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $[e, 1[$ sur $]0, \sqrt{1-e}]$, et « $du = -\frac{1}{2\sqrt{1-t}}dt$ », donc « $dt = -2udu$ ». Donc

$$\begin{aligned} \int_e^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} &= 2\sqrt{1-e} \ln(e) + 2 \int_{\sqrt{1-e}}^0 -u^2 \frac{1}{1-u^2} 2du \\ &= 2\sqrt{1-e} \ln(e) + 4 \int_0^{\sqrt{1-e}} \left(-1 + \frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)} \right) du \\ &= 2\sqrt{1-e} \ln(e) - 4\sqrt{1-e} - 2 \ln(1 - \sqrt{1-e}) + 2 \ln(1 + \sqrt{1-e}) \end{aligned}$$

En utilisant la quantité conjuguée, on a

$$\ln(1 - \sqrt{1-e}) = \ln\left(\frac{e}{1 + \sqrt{1-e}}\right) = \ln(e) - \ln(1 + \sqrt{1-e}),$$

par conséquent

$$\int_e^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} = \underbrace{2(\sqrt{1-e} - 1) \ln(e) - 4\sqrt{1-e} + 4 \ln(1 + \sqrt{1-e})}_{\underset{e \rightarrow 0^+}{\sim -e}} \xrightarrow{e \rightarrow 0^+} -4 + 4 \ln(2)$$

car $\lim_{e \rightarrow 0^+} e \ln(e) = 0$ (par croissance comparée). Donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}} dt = \boxed{-4 + 4 \ln(2)}.$$

Exercice 13. 1a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La fonction

$$f : t \mapsto P_k(t)e^t = t^k e^t$$

est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$.

- On a

$$\frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = t^{k+2} e^t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$$

par croissances comparées. Donc

$$f(t) = \underset{t \rightarrow -\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

- La fonction

$$g : t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur }]-\infty, -1] \\ \text{en } -\infty \end{array} \right\}$ car la fonction

$$t \mapsto g(-t) = \frac{1}{t^2}$$

l'est $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $2 > 1$).

Donc par critère de domination, la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur }]-\infty, -1] \\ \text{en } -\infty \end{array} \right\}$. Autrement dit, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^0 P_k(t)e^t dt$$

est absolument convergente, donc convergente.

1b) Si $f \in E$, alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$f = \sum_{k=0}^n a_k P_k.$$

Donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^0 f(t)e^t dt = \int_{-\infty}^0 \sum_{k=0}^n a_k P_k(t)e^t dt$$

converge par linéarité de l'intégrale convergente (d'après la question précédente, chaque intégrale $\int_{-\infty}^0 P_k(t)e^t dt$ est convergente).

Enfin, la fonction $t \mapsto f(t)e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_0^x f(t)e^t dt$$

converge (une fonction continue sur un segment, ici $[0, x]$, est intégrable sur ce segment). Par la relation de Chasles, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^x f(t)e^t dt$$

est donc convergente, donc la fonction g est bien définie en x . C'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc g est définie sur $\mathbb{R}$.

1c) On a

$$L(P_0) : x \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^x e^t dt = e^{-x} [e^t]_{-\infty}^x = 1,$$

donc

$$\boxed{L(P_0) = P_0}.$$

Pour les intégrations par parties qui suivent, la justification est la même que celle de la question suivante (qui traite le cas général)...

Intégrons par parties :

$$L(P_1) : x \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^x te^t dt = e^{-x} [te^t]_{-\infty}^x - e^{-x} \int_{-\infty}^x e^t dt = x - 1,$$

donc

$$\boxed{L(P_1) = P_1 - P_0}.$$

Intégrons par parties :

$$L(P_2) : x \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^x t^2 e^t dt = e^{-x} [t^2 e^t]_{-\infty}^x - e^{-x} \int_{-\infty}^x 2te^t dt = x^2 - 2(x - 1),$$

donc

$$\boxed{L(P_2) = P_2 - 2P_1 + 2P_0}.$$

1d) • Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Intégrons par parties. Les fonctions

$$u : t \mapsto e^t \quad \text{et} \quad v : t \mapsto t^{k+1}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $] -\infty, x]$. On a

$$u' : t \mapsto e^t \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto (k+1)t^k.$$

De plus,

$$u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$$

par croissance comparée (donc uv a bien une limite **finie** en $-\infty$). Le théorème d'intégration par parties s'applique alors, et comme l'intégrale

$$L(P_{k+1})(x) = \int_{-\infty}^x u'(t)v(t) dt$$

est une intégrale convergente, on sait que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^x u(t)v'(t)dt = \int_{-\infty}^x (k+1)t^k e^t dt$$

converge, et :

$$L(P_{k+1}) : x \mapsto e^{-x} \int_{-\infty}^x t^{k+1} e^t dt = e^{-x} \left[t^{k+1} e^t \right]_{-\infty}^x - e^{-x} \int_{-\infty}^x (k+1)t^k e^t dt = x^{k+1} - 0 - (k+1)e^{-x} \int_{-\infty}^x t^k e^t dt = P_{k+1}(x) - (k+1)L(P_k)(x)$$

Cela est vrai pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, donc

$$L(P_{k+1}) = P_{k+1} - (k+1)L(P_k).$$

• La formule proposée se déduit alors par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Initialisation : si $k = 0$,

$$L(P_0) = P_0 = (-1)^0 0! \sum_{j=0}^0 \frac{(-1)^j}{j!} P_j$$

(car $0! = 1$ et $(-1)^0 = 1$), d'où l'initialisation.

Hérédité : soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, supposons la formule vraie au rang k , alors d'après le début de la question,

$$\begin{aligned} L(P_{k+1}) &= P_{k+1} - (k+1)L(P_k) \\ &= P_{k+1} - (k+1)(-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} P_j \\ &= P_{k+1} + (-1)^{k+1} (k+1)! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} P_j \\ &= (-1)^{k+1} (k+1)! \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-1)^j}{j!} P_j \end{aligned}$$

D'où l'hérédité.

Conclusion : on a bien, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$L(P_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} P_j.$$

2a) • Montrons que L est linéaire : pour tout $(f, g) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L(f+g)(x) &= e^{-x} \int_{-\infty}^x (f+g)(t) e^t dt \\ &= e^{-x} \int_{-\infty}^x (f(t) + g(t)) e^t dt \\ &= e^{-x} \int_{-\infty}^x (f(t) e^t + g(t) e^t) dt \\ &= e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt + e^{-x} \int_{-\infty}^x g(t) e^t dt \\ &= L(f)(x) + L(g)(x) \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale convergente (chaque intégrale converge, vu à la question 1b).

L'égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit bien

$$L(f + g) = L(f) + L(g).$$

Donc L est linéaire.

- La formule de la question précédente donne directement que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L(P_k) \in \mathbb{R}[X]$ et que

$$\deg(P(L_k)) = k,$$

et même $L(P_k)$ est unitaire (son coefficient dominant, c'est-à-dire le coefficient de P_k , vaut 1). Alors, comme L est linéaire, on en déduit bien que si $f \in E$ alors $L(f)$, qui est combinaison linéaire de $L(P_0), \dots, L(P_n)$ (car $(P_0, \dots, P_n)$ base de E) qui sont tous dans $\mathbb{R}_n[X]$, est aussi dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Donc L va de E dans E .

- Donc L est un endomorphisme de E .
- De la question précédente, on a

$$M = \text{Mat}_{(P_0, \dots, P_n)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & (-1)^n n! \\ & 1 & (-1)^{i+j} \frac{j!}{i!} & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$M_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \frac{j!}{i!} & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}$$

(en supposant qu'on numérote les lignes et colonnes de M à partir de 0).

M est donc une matrice triangulaire supérieure, tous les coefficients diagonaux valent 1.

2b) De 1d, on a par linéarité de L :

$$L(P_{k+1} + (k+1)P_k) = P_{k+1}$$

(pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$) et $L(P_0) = P_0$, donc $P_0, \dots, P_n$ sont dans l'image de L , donc L est surjective (contient une base de l'espace d'arrivée), donc L est bijective (car surjective, linéaire et les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension **finie**). Puis, $P_0 = L^{-1}(P_0)$ et

$$L^{-1}(P_{k+1}) = P_{k+1} + (k+1)P_k$$

(pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$). Donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

(matrice de L^{-1} dans la base $(P_0, \dots, P_n)$).

Exercice 14. 1) • La fonction

$$g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$$

est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$, en particulier sur $[x, 1]$ pour tout $x > 0$.

- On a

$$g(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right),$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $2 > 1$), donc la fonction g est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ par critère de domination.

La fonction g est donc intégrable sur $[x, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc sur $[x, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc l'expression $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathbb{R}_+^* \subset \mathcal{D}.$$

• On a

$$g(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t},$$

or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue positive sur $]0, 1]$, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{t}$$

diverge (intégrale de Riemann), donc par critère d'équivalence, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$$

diverge et donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

diverge aussi. Donc la fonction f n'est pas défini en 0.

• Si la fonction f était défini en $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

serait convergente, et comme $x < 0 < +\infty$, on devrait avoir l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

convergente aussi, ce qui n'est pas. Donc l'expression $f(x)$ n'existe pas pour $x \in \mathbb{R}_-^*$.

• Donc

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*}.$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par la relation de Chasles, on peut écrire

$$f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = - \int_1^x g(t) dt + f(1).$$

La fonction g est continue sur **l'intervalle** $]0, +\infty[$, donc il existe une primitive G de g sur cet intervalle (théorème fondamental de l'analyse), alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\int_1^x g(t) dt = G(x) - G(1).$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = -G(x) + G(1) + f(1),$$

et comme la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée g , on en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$f' = -g$$

sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction f aussi.

3) • Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + f(1) = \int_1^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + f(1) - \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + f(1) - \ln(x).$$

Or, la fonction

$$\phi : t \mapsto \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

est continue sur $]0, +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 (en posant $\phi(0) = 1$), donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \int_1^0 \phi(t) dt \in \mathbb{R}$$

(car l'intégrale converge, puisque faussement impropre en 0), par conséquent la fonction

$$x \mapsto \int_1^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + f(1)$$

est négligeable devant $\ln(x)$ en 0^+ (car tend vers une limite finie alors que $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$), donc

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)}.$$

• Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Intégrons par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto -e^{-t} \quad \text{et} \quad v : t \mapsto \frac{1}{t}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées

$$u' : t \mapsto e^{-t} \quad \text{et} \quad v' : t \mapsto -\frac{1}{t^2},$$

de plus

$$u(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

(donc uv a bien une limite **finie** en $+\infty$), donc le théorème d'intégration par parties s'applique, et donne (puisque l'on sait que l'intégrale $f(x) = \int_x^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ est convergente) :

$$f(x) = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} -\frac{e^{-t}}{t^2} dt = -0 + \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$$

Or, par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens »), en utilisant que, pour $t \in [x, +\infty[$ on a $t \geq x > 0$, donc $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$, donc

$$\frac{e^{-t}}{t^2} \leq \frac{e^{-t}}{xt},$$

puis

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{f(x)}{x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(f(x)),$$

donc $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(f(x))$, soit

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}}.$$

Remarque. On peut aussi majorer ainsi :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^2},$$

donc

$$0 \leq \frac{e^{-x}}{x} - f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x^2} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right),$$

donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^n \ln(x)}{1 - x^2}$$

est continue sur $]0, 1[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0, 1[$.

Puis,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1^n(x-1)}{1-x^2} = -\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{1}{2},$$

donc la fonction f se prolonge par continuité en 1 (en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$), donc la fonction f est intégrable en 1.

Si $n \geq 1$,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

(par croissance comparée), et donc la fonction f se prolonge par continuité en 0 (en posant $f(0) = 0$), donc la fonction f est intégrable en 0. Et dans ce cas, l'intégrale considérée converge.

Si $n = 0$, alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x),$$

or la fonction $\ln$ est intégrable en 0, donc par le critère d'équivalence, f aussi. Donc l'intégrale considérée converge.

Si $n = -1$, alors

$$-f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$$

et la fonction

$$x \mapsto -\frac{\ln(x)}{x}$$

est continue et positive sur $]0, 1[$ (et avec $-f$ continue sur $]0, 1[$ après son prolongement en 1), donc le critère d'équivalence donne que l'intégrale

$$\int_0^1 -f(x) dx$$

est de même nature que l'intégrale

$$I = \int_0^1 -\frac{\ln(x)}{x} dx.$$

Or, pour tout $e \in]0, 1[$,

$$\int_e^1 -\frac{\ln(x)}{x} dx = \left[-\frac{1}{2} \ln^2(x) \right]_e^1 = \frac{1}{2} \ln^2(e) \xrightarrow{e \rightarrow 0^+} +\infty,$$

donc l'intégrale I est divergente. Donc l'intégrale

$$\int_0^1 -f(x) dx$$

diverge, donc l'intégrale

$$\int_0^1 f(x) dx$$

diverge aussi.

Si $n \leq -1$,

$$\frac{\ln(x)}{x} = O_{x \rightarrow 0^+}(f(x)),$$

et la fonction f est de signe constant sur $]0, 1[$, donc si l'intégrale de f convergeait en 0, ce serait le cas de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x} dx,$$

ce qui est faux d'après le calcul précédent. Donc l'intégrale diverge.

Exercice 16. La fonction $t \mapsto 1 - t$ est continue et strictement positive sur $]0, 1[$. La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, la fonction

$$t \mapsto \ln(1 - t)$$

est continue sur $]0, 1[$.

Par produit, la fonction

$$t \mapsto \ln(t)(\ln(1 - t))$$

aussi. Puis, la fonction $t \mapsto t$ est continue et ne s'annule pas sur $]0, 1[$, donc par quotient, la fonction f est continue sur $]0, 1[$.

Si $t \rightarrow 0$,

$$\ln(1 - t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t, \quad \text{et donc} \quad f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln(t).$$

Or la fonction $\ln$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, \frac{1}{2}] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$, donc par critère d'équivalence, la fonction f aussi.

Puis,

$$\ln(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} t - 1, \quad \text{donc} \quad f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} (t - 1) \ln(1 - t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} 0$$

(par croissance comparée), donc la fonction f se prolonge par continuité en 1 (en posant $f(1) = 0$). Donc la fonction f est intégrable en 1.

Donc la fonction f est intégrable sur $]0, 1[$.

Exercice 17. • La fonction

$$f : x \mapsto \frac{x \ln(x)}{(1 + x^2)^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations usuelles.

On a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$$

par croissance comparée, donc la fonction f se prolonge par continuité en 0 (en posant $f(0) = 0$), et donc la fonction f est intégrable en 0.

On a

$$x^2 f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^3 \ln(x)}{x^4} = \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$

par croissance comparée, donc

$$f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

Or, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $2 > 1$), donc par critère de domination, la fonction f aussi.

Donc l'intégrale I converge absolument, donc converge.

• Pour le calcul de I :

Méthode 1 : par intégration par parties. Les fonctions

$$u : x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{2(1 + x^2)}$$

(on a rajouté $\frac{1}{2}$ à la « primitive naturelle », pour que la limite de uv en 0 soit finie) et

$$v : x \mapsto \ln(x)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées respectives

$$u'(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^2} \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

De plus,

$$u(x)v(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, donc la fonction uv a une limite **finie** en 0. On peut donc intégrer par parties sur $]0, A]$ pour tout $A > 0$.

Remarque. On ne peut pas appliquer le théorème sur $]0, +\infty[$, car la fonction uv n'a pas de limite finie en $+\infty$.

Et donc

$$\begin{aligned} \int_0^A f(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2(1+x^2)} \ln(x) \right]_0^A - \int_0^A \frac{x^2}{2(1+x^2)} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{A^2}{2(1+A^2)} \ln(A) - \frac{1}{4} [\ln(1+x^2)]_0^A \\ &= \frac{A^2}{2(1+A^2)} \ln(A) - \frac{1}{4} \ln(1+A^2) \\ &= \frac{A^2}{2(1+A^2)} \ln(A) - \frac{1}{2} \ln(A) - \frac{1}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{A^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1+A^2} \ln(A) - \frac{1}{4} \ln\left(1 + \frac{1}{A^2}\right) \underset{A \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

(car $\frac{1}{1+A^2} \ln(A) \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(A)}{A^2} \underset{A \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée). Donc

$$\boxed{I = 0}.$$

Remarque. Cette méthode donne aussi la convergence de I , puisque la limite trouvée est finie.

Méthode 2 : appliquons le changement de variable $u = \frac{1}{x}$. La fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc induit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. De plus, « $dx = -\frac{1}{u^2} du$ ». Comme on sait que l'intégrale I converge, le théorème de changement de variable s'applique et donne

$$I = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{u} \ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)^2} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{-u \ln(u)}{(u^2 + 1)^2} du = -I.$$

Donc

$$\boxed{I = 0}.$$

Remarque. Pour cette méthode, il était indispensable de montrer avant que l'intégrale I convergeait.

Exercice 18.

1. • Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Les fonctions

$$u : x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v : x \mapsto \cos(x)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\pi, A]$, de dérivées

$$u' : x \mapsto -\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad v' : x \mapsto -\sin(x).$$

On peut donc intégrer par parties (théorème de PCSI), et on a :

$$\int_{\pi}^A \frac{\cos(x)}{x} dx = \left[-\frac{\sin(x)}{x} \right]_{\pi}^A - \int_{\pi}^A \frac{\sin(x)}{x^2} dx = -\frac{\sin(A)}{A} - \int_{\pi}^A \frac{\sin(x)}{x^2} dx.$$

- Or, pour tout $x \in [\pi, +\infty[$,

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\sin(A)}{A} = 0$$

par le théorème des gendarmes. Puis, la fonction

$$g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2}$$

est continue sur $[\pi, +\infty[$, pour tout $x \in [\pi, +\infty[$,

$$\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2},$$

et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } [\pi, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, donc par critère de comparaison, la fonction g est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur } [\pi, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$.

Donc l'intégrale

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

converge, et

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^A \frac{\sin(x)}{x^2} dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx.$$

- Par suite,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^A \frac{\cos(x)}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\sin(A)}{A} - \int_{\pi}^A \frac{\sin(x)}{x^2} dx \right) = 0 - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx,$$

existe et est finie, donc l'intégrale

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$$

converge.

2. • Pour $n = 0$, il est évident que les intégrales u_0 et v_0 convergent (et valent 0), comme intégrale de la fonction nulle.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x}$$

est continue sur $\left] 0, \frac{1}{2} \right]$ et

$$\frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{(n\pi x)^2}{\pi x} = n^2 \pi x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

(limite **finie**), donc la fonction f_n est intégrable en 0, donc sur $\left] 0, \frac{1}{2} \right]$. Donc l'intégrale

$$v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x} dx$$

converge (absolument).

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction

$$h_n : x \mapsto \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)}$$

est continue sur $\left] 0, \frac{1}{2} \right[$ et

$$\frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{(n\pi x)^2}{\pi x} = n^2 \pi x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

(limite **finie**), donc la fonction h_n est intégrable en 0, et

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} = 0$$

(limite **finie**), donc la fonction h_n est intégrable en $\frac{1}{2}$.

Donc la fonction h_n est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Donc l'intégrale

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} h_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\tan(\pi x)} dx$$

converge.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons le changement de variable affine $t = n\pi x$, soit $x = \frac{t}{n\pi}$. La fonction

$$x \mapsto n\pi x$$

est $\mathcal{C}^1$ strictement croissant, donc induit une bijection de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur $\left]0, \frac{n\pi}{2}\right[$, et « $dx = \frac{1}{n\pi} dt$ », de plus l'intégrale v_n converge, donc le théorème de changement de variable donne

$$v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2(n\pi x)}{\pi x} dx = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{\frac{t}{n}} \frac{1}{n\pi} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{t} dt.$$

Comme de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$, on a aussi

$$v_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{n\pi} \frac{1 - \cos(u)}{u} du$$

en posant cette fois le changement de variable affine $u = 2t$.

Remarque. Pour $n = 0$, les égalités restent vraies de manière directe.

- (b) Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{n\pi} \frac{1 - \cos(u)}{u} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(u)}{u} du + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{1 - \cos(u)}{u} du \\ &= v_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{1}{u} du - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\cos(u)}{u} du \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= v_1 + \frac{\ln(n\pi) - \ln(\pi)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\cos(u)}{u} du \\ &= v_1 + \frac{\ln(n)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\cos(u)}{u} du \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{2\pi} = +\infty$ et, comme l'intégrale

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$$

converge, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{-\cos(u)}{u} du \in \mathbb{R},$$

donc

$$v_n = \underbrace{\frac{\ln(n)}{2\pi}}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{v_1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{-\cos(u)}{u} du}_{\text{limite finie}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2\pi}.$$

4. On a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \underbrace{\left(\frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} \right)}_{\rightarrow 0} = -\frac{2}{\pi}.$$

Puis, un DL en 0 donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} &= \frac{1}{\pi x - \frac{(\pi x)^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} - \frac{1}{\pi x} \\ &= \frac{1}{\pi x} \left(\frac{1}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\pi x} \left(\frac{\pi^2 x^2}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\ &= \frac{\pi x}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Par suite, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et $\frac{1}{2}$, en posant

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale,

$$u_n - v_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2(n\pi x) f(x) dx.$$

Or, pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$,

$$|\sin^2(n\pi x) f(x)| \leq |f(x)|,$$

et l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx$$

converge (car la fonction $|f|$ est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et prolongeable par continuité en 0 et en $\frac{1}{2}$), donc (car « les bornes sont dans le bon sens »), par inégalité triangulaire généralisée, puis croissance de l'intégrale,

$$|u_n - v_n| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2(n\pi x) f(x) dx \right| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |\sin^2(n\pi x) f(x)| dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx,$$

donc la suite numérique $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty,$$

et la suite numérique $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on a

$$u_n - v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n),$$

donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2\pi}.$$

Exercice 19. 1) On a

$$I(1) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Or, la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est continue sur $] -1, 1[$ (car $1 - x^2 > 0$ pour tout $x \in] -1, 1[$, et que l'on compose des fonctions usuelles), admet arcsin comme primitive, et arcsin a une limite finie en 1^- et -1^+ (car arcsin est en fait continue sur $[-1, 1]$), donc l'intégrale $I(1)$ converge.

De plus, comme $f \geq 0$, on en déduit que la fonction f est intégrable sur $] -1, 1[$.

Enfin, on a alors

$$I(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin(x) - \lim_{x \rightarrow -1^+} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\pi}.$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors la fonction

$$f_k : x \in] -1, 1[\mapsto \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} = x^k f(x)$$

est continue sur $] -1, 1[$ par produit de fonctions continues, et la fonction $x \mapsto x^k$ a une limite finie si $x \rightarrow 1^-$ ou $x \rightarrow -1^+$, donc

$$f_k(x) = O_{x \rightarrow 1^-}(f(x)) \quad \text{et} \quad f_k(x) = O_{x \rightarrow -1^+}(f(x)).$$

Comme la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur }] -1, 1[\\ \text{en } -1 \text{ et en } 1 \end{array} \right\}$, le critère de domination (appliqué en 1 et en -1) donne que

la fonction f_k est intégrable $\left\{ \begin{array}{l} \text{sur }] -1, 1[\\ \text{en } -1 \text{ et en } 1 \end{array} \right\}$, donc que l'intégrale $I(X^k)$ converge absolument, donc converge.

Puis, soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I(X^k) = \int_{-1}^1 \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

converge. Donc par linéarité de l'intégrale convergente, l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

converge (et on a aussi

$$\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=0}^n a_k I(X^k),$$

mais on ne va pas s'en servir ici).

3a) La fonction

$$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$

est dérivable sur $] -1, 1[$, et admet pour dérivée la fonction

$$x \mapsto -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(cette dérivée est de la forme « $u'u^\alpha$ » à constante près, c'est ainsi que j'ai trouvé sa primitive). Donc

$$I(X) = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[-\sqrt{1-x^2} \right]_{-1}^1 = \boxed{0}$$

On en déduit

$$0 = I(X) = a \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + c \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{a = c}$$

3b) Avec le résultat admis, on a alors

$$\frac{\pi}{2} = I(X^2) = a \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + c \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \quad \text{soit} \quad a + c = \frac{2\pi}{3}$$

Donc

$$a = c = \frac{\pi}{3}.$$

Enfin, on a $\pi = I(1) = a + b + c$, donc

$$b = \frac{\pi}{3}.$$

4) • Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$I(X^{k+1}) = \int_{-1}^1 x^k \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Intégrons par parties : les fonctions

$$u : x \mapsto -\sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad v : x \mapsto x^k$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$, la fonction uv a une limite finie (nulle) en 1 et en -1 , et l'intégrale $I(X^{k+1})$ converge, donc on peut appliquer le théorème d'intégration par parties, et on a :

$$I(X^{k+1}) = \left[-\sqrt{1-x^2} x^k \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -\sqrt{1-x^2} k x^{k-1} dx = 0 - 0 + k \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} x^{k-1} dx = kI(k-1) - kI(k+1).$$

Donc

$$I(k+1) = \frac{k}{k+1} I(k-1).$$

• Comme $I(X) = 0$, on en déduit

$$I(X^3) = \frac{2}{3} I(X) = 0 \quad \text{et} \quad I(X^5) = \frac{4}{5} I(X^3) = 0.$$

On en déduit aussi

$$I(X^4) = \frac{3}{4} I(X^2).$$

• Notons

$$J(P) = \frac{\pi}{3} \left(P \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + P(0) + P \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

pour $P \in E$, alors on a

$$I(X^k) = J(X^k)$$

pour $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ d'après les calculs fait à la question précédente.

Puis,

$$J(X^3) = \frac{\pi}{3} \left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 + 0^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right) = \frac{\pi}{3} \left(-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right) = 0 = I(X^3)$$

et

$$J(X^5) = \frac{\pi}{3} \left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 + 0^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 \right) = \frac{\pi}{3} \left(-\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 \right) = 0 = I(X^5).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 J(X^4) &= \frac{\pi}{3} \left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 + 0^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \right) \\
 &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{3}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \times 0^2 + \frac{3}{4} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) \\
 &= \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{3} \left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 0^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) \\
 &= \frac{3}{4} J(X^2) = \frac{3}{4} I(X^2) = I(X^4)
 \end{aligned}$$

Pour finir, les applications I et J (définies sur E) sont linéaires (est-ce évident pour tout le monde?), coïncident sur la base $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$ de E , donc sont égales.