

CORRECTION DM 3 - SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 1 - CCINP PC 2021 (Extrait de l'exercice 2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (1)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (1).

Existence de la solution

1. **Méthode 1 :** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la série de terme général $\varphi_k(x)$ est une série alternée. En effet :

- $\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ est de signe alterné ;
- $\left(\frac{1}{(x+k)^2}\right)_k$ est décroissante (car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ l'est) ;
- et $\frac{1}{(x+k)^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.

Donc d'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(x)$ converge à x fixé.

Et donc $\boxed{\sum_{k \geq 0} \varphi_k \text{ converge simplement sur }]0, +\infty[.}$

Méthode 2 : On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\varphi_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2}.$$

Or : $\frac{1}{(x+k)^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$. Comme tout est positif, par critère d'équivalence, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(x+k)^2}$ a la même nature que la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ qui est convergente ($2 > 1$).

Donc la série $\sum_{k \geq 0} \varphi_k(x)$ converge absolument donc converge.

Et donc $\boxed{\sum_{k \geq 0} \varphi_k \text{ converge simplement sur }]0, +\infty[.}$

2. Soit $x \in]0, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(x+1) + \varphi(x) &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} + \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(-\frac{(-1)^{k+1}}{(x+1+k)^2} + \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \right) \\ &\quad \text{(la somme existe puisque les séries convergent)} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} -\frac{(-1)^{k+1}}{(x+1+k)^2} + \frac{(-1)^0}{(x+0)^2} = \boxed{\frac{1}{x^2}}. \\ &\quad \text{(série télescopique convergente)} \end{aligned}$$

3. De la même manière que dans la question 1, on constate qu'à x fixé, $\sum_{k \geq 0} \varphi_k(x)$ est une série alternée. D'après le théorème spécial des séries alternées, on a $|R_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)|$ où $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)$ est le reste de la série alternée. Donc :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4. On a déjà montré que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

Il reste donc à montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, et pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a :

$$\left| \varphi(x) - \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

En particulier, pour $n = 0$, on a : $|\varphi(x) - \varphi_0(x)| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$.

Or $|\varphi(x) - \varphi_0(x)| \geq |\varphi(x)| - |\varphi_0(x)|$. Donc :

$$\underbrace{|\varphi(x)|}_{\geq 0} \leq \underbrace{|\varphi_0(x)|}_{=\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}.$$

Et ainsi, par encadrement :

$$\boxed{\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.}$$

Unicité de la solution

5. Soit f une solution du problème. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Il y a ici deux « pour tout » : un pour x et un pour n . Soyons donc précis dans notre rédaction. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$(H_n) : \ll \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \gg.$$

Ainsi, pour chaque n , on montrera un « pour tout x ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = -f(x+1) + \frac{1}{x^2}.$$

Or comme f est solution du problème, on a $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}$ (pour tout x). Et ainsi :

$$\boxed{(-1)^{0+1} f(x+0+1) + \sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = f(x).}$$

La propriété est bien initialisée.

• **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n vraie c'est-à-dire :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Montrons que H_{n+1} est vraie.

On sait que f est solution du problème. Donc pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}$. En particulier, pour $x = x+n+1$, on obtient :

$$f(x+(n+1)+1) + f(x+n+1) = \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

Ainsi pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{(x+n+1)^2} - f(x+(n+1)+1) \right) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\ &= (-1)^{(n+1)+1} f(x+(n+1)+1) + \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n+1)^2} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\ &= \boxed{(-1)^{(n+1)+1} f(x+(n+1)+1) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.} \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Ainsi, par principe de récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6. Soit f une solution du problème. On a donc :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Et on a aussi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n+1) = 0$ (x fixé).

Donc à x fixé, on a :

$$f(x) = \underbrace{(-1)^{n+1} f(x+n+1)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x)}.$$

Donc en passant à la limite, on obtient :

$$f(x) = \varphi(x).$$

On vient de prouver que sous réserve d'existence, l'unique solution du problème est φ . Et comme on a déjà prouvé l'existence, on en déduit que φ est l'unique solution du problème.

Partie II - Étude de la solution du problème (1).

7. Soit $\epsilon > 0$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [\epsilon, +\infty[$:

$$|\varphi_k(x)| = \left| \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \right| = \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{(\epsilon+k)^2}.$$

Donc $\|\varphi_k\|_\infty \leq \frac{1}{(\epsilon+k)^2}$ par définition de la borne supérieure. Or $\frac{1}{(\epsilon+k)^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$. Comme tout est positif, par critère d'équivalence, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(\epsilon+k)^2}$ a la même nature que la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ qui est convergente.

Par critère de comparaison, la série à termes positifs $\sum \|\varphi_k\|_\infty$ converge.

Donc $\sum \varphi_k$ converge normalement sur $[\epsilon, +\infty[$ et donc uniformément.

8. Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $[\epsilon, +\infty[$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est continue sur $[\epsilon, +\infty[$, $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ est continue sur $[\epsilon, +\infty[$.

Et comme le résultat est valide pour tout $\epsilon > 0$, $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ est continue sur $]0, +\infty[$.

De plus, comme φ est solution du problème, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x^2 \varphi(x) = 1 - x^2 \times \underbrace{\varphi(x+1)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \varphi(1) \in \mathbb{R}}.$$

par continuité de φ en 1. Donc $x^2 \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ et ainsi :

$$\varphi(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

9. Soit $\epsilon > 0$. On a pour tout $x \in [\epsilon, +\infty[$:

$$|\varphi'_k(x)| = \left| \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3} \right| = \frac{1}{(x+k)^3} \leq \frac{1}{(\epsilon+k)^3}.$$

Ainsi, par définition de la borne supérieure $\|\varphi'_k\|_\infty \leq \frac{1}{(\epsilon+k)^3}$. Allons, un peu plus vite : on sait que $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(\epsilon+k)^3}$ converge (en comparant à une série de Riemann). Puis par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|\varphi'_k\|_\infty$ converge.

Donc $\sum_{k \geq 0} \varphi'_k$ converge normalement sur $[\epsilon, +\infty[$ et donc uniformément sur cet intervalle.

Ainsi on a :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, +\infty[$;
- la série $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge simplement vers φ ;
- la série $\sum_{k \geq 0} \varphi'_k$ converge uniformément.

Donc φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, +\infty[$ et :

$$\forall x \in [\epsilon, +\infty[, \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi'_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

Et comme cela est valable pour tout $\epsilon > 0$, on peut généraliser sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. On peut rapidement vérifier que pour x fixé, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ est une série alternée.

Donc $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3} \right| \leq \frac{2}{(x+n+1)^3}$. En particulier, pour $n = 0$, on obtient :

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3} \right| \leq \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Ainsi pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3} \leq -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3} < 0.$$

Donc φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

11. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \frac{1}{x^2}$. Or $\varphi(x) \geq \varphi(x+1)$. Donc : $2\varphi(x) \geq \frac{1}{x^2}$.

C'est vrai en particulier pour $x > 1$. Puis de même, on a pour $x \geq 1$:

$$\varphi(x-1) + \varphi(x-1+1) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Or $\varphi(x-1) \geq \varphi(x)$. Et donc : $2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$.

On en déduit l'encadrement :

$$1 \leq 2x^2\varphi(x) \leq \underbrace{\frac{x^2}{(x-1)^2}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}.$$

Ainsi $2x^2\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ par encadrement et donc :

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}.$$