

QUINZAINE DU 10/11 AU 21/11

1 Contenu du cours

Chapitre 5 - Réduction (cours et TD)

1. Éléments propres

Définition valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres, spectre, pour les matrices et les endomorphismes, propriétés élémentaires, les sous-espaces propres sont stables, les sous-espaces propres sont en somme directe, toute famille finie de vecteurs de sous-espaces distincts est libre, lien matrices-endomorphismes.

2. Polynôme caractéristique

Définition ($\chi_M(t) = \det(tI_n - M)$), lien avec la similitude, lien avec le spectre, coefficients de degré n , $n-1$ et 0 , cas $n=2$, multiplicité des valeurs propres, liens avec la dimension des sous-espaces propres.

3. Diagonalisabilité

Définition pour les matrices et les endomorphismes, quelques exemples élémentaires, diagonalisabilité et sous-espaces propres, les projecteurs et symétries sont diagonalisables, CNS avec le polynôme caractéristique, cas à n valeurs propres distinctes, application au calcul de puissance, aux suites récurrentes couplées, aux suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur.

4. Trigonalisabilité

Définition, CNS avec le polynôme caractéristique, toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$, ce n'est pas le cas dans $\mathbb{R}$, calcul de la trace et du déterminant à partir des valeurs propres.

Remarques : aucune technique générale de trigonalisation n'a été vue, la notion de polynôme annulateur n'a pas encore été abordée, le cas des matrices symétriques non plus.

Chapitre 6 - Intégrales généralisées (cours et tout début du TD)

1. Fonctions continues par morceaux

Définition sur un segment, sur un intervalle quelconque, définition de l'intégrale de fonctions continues par morceaux, propriétés élémentaires (linéarité, Chasles, positivité, croissance, inégalité triangulaire, sommes de Riemann), l'intégrale d'une fonction non-nulle (même positive) peut être nulle si la fonction n'est pas continue.

2. Intégrales généralisées sur un intervalle semi-ouvert

Définition, exemples de référence en $+\infty$ ($\int e^{-t} dt$, $\int 1/t^\alpha dt$) et en 0 ($\int 1/t^\alpha dt$, $\int \ln(t) dt$), critère de majoration.

3. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Définition, propriétés élémentaires, IPP généralisée, changement de variable généralisé, cas des fonctions paires ou impaires.

4. Convergence absolue

Fonctions intégrables, lien avec la convergence usuelle, définition de $L^1(I, \mathbb{K})$, critères de comparaison pour les fonctions intégrables.

5. Théorème de convergence dominée

Version suite, version série. **Remarque :** Pas d'intégrales à paramètres pour l'instant.

2 Questions de cours

- Exemple :** Diagonaliser $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- Exemple :** Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -6 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. On donne pour aller plus vite $E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
- Exemple :** méthode matricielle pour $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
- Exemple :** $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- Exemple :** Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(t+1)^2} dt$ par IPP.
- Exemple :** Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/t}}{t^2} dt$ en posant $u = \frac{1}{t}$.