

## TD7 - ESPACES EUCLIDIENS

**Exercice 1.** Soit  $E$  euclidien et  $s \in \mathcal{L}(E)$  une symétrie.

1. Montrer que  $s$  est une isométrie si et seulement si  $s$  est autoadjointe.
2. Montrer que  $s$  est autoadjointe si et seulement si  $s$  est une symétrie orthogonale.
3. Montrer que  $s$  est une symétrie orthogonale si et seulement si  $s = 2p - \text{Id}_E$  avec  $p$  un projecteur orthogonal.

**Exercice 2.** Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales :

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3.** Soit  $E$  un espace euclidien. On note  $(.,.)$  le produit scalaire et  $\|.\|$  la norme associée.

1. Montrer que si  $u$  et  $v$  sont unitaires alors  $(u+v, u-v) = 0$ .
2. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  conservant l'orthogonalité, ie :  $(x, y) = 0 \Rightarrow (f(x), f(y)) = 0$ .  
Montrer que si  $u$  et  $v$  sont unitaires alors  $\|f(u)\| = \|f(v)\|$ .
3. Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| = k\|x\|$ . Que dire de  $\frac{1}{k}f$  si  $k \neq 0$ ? Que dire si  $k = 0$ ?

**Exercice 4.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  avec  $E$  un espace euclidien non réduit au vecteur nul,  $v \in E \setminus \{\vec{0}\}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On pose pour  $x \in E$  :  $f(x) = x + \lambda(x, v)v$ .

1. Déterminer  $\lambda$  pour que  $f$  soit dans  $\mathcal{O}(E)$ .
2. Montrer qu'alors  $f$  est une symétrie et la caractériser.

**Exercice 5.** Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures?

**Exercice 6.** Montrer que les valeurs propres complexes d'une matrice orthogonale  $A$  (à coefficients réels) sont de module 1 (*Indication : pour  $X$  vecteur propre de  $A$ , calculer  $\overline{AX}^\top AX$  de deux façons différentes.*).

**Exercice 7.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ ,  $g$  celui canoniquement associé à  $A^\top$ . On suppose  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel.

1. Montrer que pour tous  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$(g(y), x) = (y, f(x)) \quad \text{puis que} \quad (g \circ f(x), x) = \|f(x)\|^2.$$

2. En déduire que  $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)^\perp$  (orthogonal de  $\text{Ker}(f)$  dans  $\mathbb{R}^n$ ).
3. Montrer que l'endomorphisme  $g \circ f$  est symétrique.
4. Montrer que l'endomorphisme  $g \circ f$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

**Exercice 8.** Soit  $E$  euclidien. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{S}(E)$  des endomorphismes symétriques de  $E$  est un espace vectoriel réel.

**Exercice 9.** Diagonaliser à l'aide d'une matrice orthogonale  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 10.**

1. Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ . On pose  $S = A^\top A$

(a) Montrer que  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

(b) On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $S$  (comptées avec multiplicité). Démontrer l'égalité :  $\sum_{i=1}^n \lambda_i =$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2.$$

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $A$  pour que  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

2. Soit  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = A^\top A$ .

**Exercice 11.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{rg}(A^\top A) = \text{rg}(A)$ .

**Exercice 12.** Soit  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

1. Montrer qu'il existe une unique matrice  $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $A = C^2$ .

2. (pour 5/2) Montrer qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que  $C = Q(A)$  (*Indication : utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange*).

Pour les deux questions, on pourra commencer par traiter le cas  $A$  diagonale.

**Exercice 13.** Soit  $E = M_n(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire  $(P, Q) = \text{tr}(P^\top Q)$ . Fixons  $A \in E$ , et notons

$$\phi : X \in E \mapsto AX^\top A.$$

Montrer que  $\phi$  est autoadjoint de  $E$ .

**Exercice 14.** Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$  tel que pour tout  $i$  et  $j$ ,  $a_{i,j} = 1$ . Montrer que  $A$  est diagonalisable et sans calcul donner son spectre ainsi que ses sous-espaces propres.

**Exercice 15.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u$  autoadjoint, où  $E$  est un espace euclidien. Montrer l'équivalence entre :

(i) Pour tout  $x \in E$ ,  $(u(x), x) \geq 0$ .

(ii) Les valeurs propres de  $u$  sont positives.

**Exercice 16.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  symétrique. On note  $\lambda$  la plus petite valeur propre de  $A$  et  $\mu$  la plus grande valeur propre de  $A$ . Montrer que pour tout  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$\lambda X^\top X \leq X^\top A X \leq \mu X^\top X$$

**Exercice 17.** On considère un espace euclidien  $E$ . Soit  $f$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . On note  $\lambda$  la plus petite valeur propre de  $f$  et  $\mu$  la plus grande valeur propre de  $f$ . Montrer que pour tout  $x \in E$ ,

$$\lambda \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \mu \|x\|^2.$$

**Exercice 18.** Soit  $S = (s_{i,j})$  une matrice orthogonale d'ordre  $n$ . Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j}^2 = n \quad \text{et} \quad \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j} \right| \leq n$$

*Indication : pour l'inégalité, commencer par déterminer  $X$  vecteur colonne tel que  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j} = X^\top S X$ .*

**Exercice 19.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot, \cdot)$ , la norme associée étant notée  $\|\cdot\|$ . Soient  $x_1, \dots, x_n$  des vecteurs de  $E$  tels que pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\|x_i\| = 1$  et pour  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| = 1$ .

1. Calculer, pour tout couple d'indices  $i$  et  $j$ ,  $(x_i, x_j)$ .

2. Soit  $A = (a_{i,j})$  la matrice carrée d'ordre  $n$ , de terme générique  $a_{i,j} = (x_i, x_j)$ . Déterminer le spectre de  $A$ . Montrer que  $A$  est inversible et en déduire que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre.

**Exercice 20.**

1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique telle qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^k = I_n$ . Démontrer que  $A^2 = I_n$ .

2. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique telle qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^k = 0_n$ . Démontrer que  $A = 0_n$ .

**Exercice 21.** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que :

$$\text{pour } u \in E, (u, f(u)) = 0.$$

1. Démontrer que pour  $(u, v) \in E^2$ ,  $(f(u), v) = -(u, f(v))$  (*Indication : calculer  $(f(u+v), u+v)$* ).

2. (a) Démontrer que  $\lambda = 0$  est la seule valeur propre possible de  $f$ . Est-ce que  $f$  est diagonalisable ?  
 (b) Démontrer que  $f \circ f$  est autoadjoint et que les valeurs propres de  $f \circ f$  sont négatives.
3. Démontrer que  $\text{Ker}(f) = (\text{Im}(f))^\perp$  (orthogonal de  $\text{Im}(f)$  dans  $E$ ).
4. Montrer l'existence d'une base orthonormale  $B = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs de  $\text{Im}(f)$  et de  $\text{Ker}(f)$ .
5. (a) Montrer que la matrice  $A$  de  $f$  dans une base orthonormale  $B$  est antisymétrique (i.e.  $A^\top = -A$ ).  
 (b) Réciproquement, si  $f$  est un endomorphisme de  $E$  dont la matrice  $A$  dans une base orthonormale  $B$  est antisymétrique, démontrer que pour  $(u, v) \in E$ ,  $(f(u), v) = -(u, f(v))$ . Conclure.
6. Prouver que  $\text{Id}_E + f \in \mathcal{GL}(E)$  et que  $(\text{Id}_E - f) \circ (\text{Id}_E + f)^{-1} \in \mathcal{SO}(E)$ .

**Exercice 22.** Soient :  $E$  un espace préhilbertien,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$  et  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} \in \text{M}_p(\mathbb{R})$  la matrice définie pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ , par  $a_{i,j} = (u_i, u_j)$ .

1. Montrer que  $A \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $A$  est inversible si et seulement si la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre.
3. **Application :** soit  $H = \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}$  (la matrice de Hilbert). Montrer que  $H \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 23** (CCP 2013 Officiel de la Taupe - exo 2). Soit  $A \in \text{M}_n(\mathbb{R})$  inversible telle que  $A^\top = A^2$ . Montrer que  $A$  est orthogonale.

**Exercice 24** (CCP 2009 Officiel de la Taupe - exo 2). Soit  $E$  un espace euclidien et  $f$  un endomorphisme orthogonal. Montrer que  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  et  $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$  sont supplémentaires orthogonaux.

**Exercice 25** (CCP PC 2017 (?)). Soit  $M \in \text{M}_2(\mathbb{R})$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à  $M$ .  $\mathbb{R}^2$  est muni du produit scalaire canonique. On suppose que

$$M^\top = M^2.$$

1. Montrer que  $M^4 = M$ .
2. Que peut-on dire des valeurs du déterminant de  $M$  et des valeurs propres complexes de  $M$  ?
3. Montrer que si l'on suppose  $M$  inversible, alors  $M \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ . Caractériser dans ce cas géométriquement  $f$ .
4. Montrer que si  $f$  n'est pas inversible, alors  $M$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$  où  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \{0, 1\}$ .
5. Si  $b = 0$  que dire de  $f$  ?
6. Si  $b = 1$ , montrer que  $f$  est diagonalisable, puis montrer que  $f$  est un projecteur orthogonal.

**Exercice 26** (CCP PC 2019 (RMS 130 exo 1324)). On munit  $\mathbb{R}^3$  de son produit scalaire canonique  $(., .)$ . Soit  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$u(x) = (x, a) b + (x, b) a,$$

où  $a$  et  $b$  sont des vecteurs unitaires et libres de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme autoadjoint. Que peut-on en déduire ?
2. Donner  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$ . Montrer que  $u$  n'est pas une projection orthogonale.

## Solutions

**Exercice 1.** Soit  $s$  une symétrie (donc  $s \circ s = \text{Id}_E$ ).

1) • Supposons que  $s$  soit une isométrie. Soit  $B$  une base orthonormée, alors  $S = \text{Mat}_B(s)$  est orthogonale, donc

$$S^{-1} = S^\top.$$

Mais  $s$  est une symétrie, donc  $s \circ s = \text{Id}_E$ , donc

$$S^2 = I_n, \quad \text{soit} \quad S^{-1} = S.$$

Donc  $S^\top = S$ , et comme  $B$  est une base orthonormée,  $s$  est bien autoadjoint.

**Autre démonstration :** supposons que  $s$  soit une isométrie, donc que  $s$  préserve le produit scalaire. Soit  $(x, y) \in E^2$ , alors

$$(s(x), y) = (s(s(x)), s(y)) = (s^2(x), s(y)).$$

Puis,  $s$  est une symétrie, donc  $s \circ s = \text{Id}_E$ . Donc

$$(s(x), y) = (s^2(x), s(y)) = (x, s(y)).$$

C'est vrai pour tout  $(x, y) \in E^2$ , donc  $s$  est autoadjoint.

• Supposons que  $s$  est autoadjoint. Alors, si  $B$  est une base orthonormée,  $S = \text{Mat}_B(s)$  est une matrice symétrique :

$$S^\top = S.$$

Mais  $s \circ s = \text{Id}_E$ , donc

$$S^2 = I_n, \quad \text{soit} \quad S^{-1} = S.$$

Donc  $S^{-1} = S^\top$ , donc  $S$  est une matrice orthogonale. Comme  $B$  est une base orthonormée,  $s$  est bien une isométrie.

**Autre démonstration :** supposons que  $s$  est autoadjoint. Alors, pour tout  $(x, y) \in E^2$ , comme  $s$  est autoadjoint,

$$(s(x), s(y)) = (x, s(s(y))) = (x, s^2(y)).$$

Puis,  $s^2 = \text{Id}_E$ , donc

$$(s(x), s(y)) = (x, s^2(y)) = (x, y).$$

Donc  $s$  préserve le produit scalaire, donc est une isométrie.

2) • Supposons que  $s$  soit autoadjoint, donc ses espaces propres sont orthogonaux (deux à deux, mais il y en a que deux), et donc

$$\underbrace{\text{Ker}(s - \text{Id}_E)}_{=E_1(s)} \perp \underbrace{\text{Ker}(s + \text{Id}_E)}_{=E_{-1}(s)}, \quad \text{soit} \quad \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(s + \text{Id}_E)^\perp.$$

Mais, comme  $s$  est une symétrie, on a

$$E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E),$$

donc

$$\dim(\text{Ker}(s - \text{Id}_E)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(s + \text{Id}_E)).$$

Puis,  $E$  est euclidien, donc

$$\dim(\text{Ker}(s + \text{Id}_E)^\perp) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(s + \text{Id}_E)).$$

Par conséquent,

$$\dim(\text{Ker}(s - \text{Id}_E)) = \dim(\text{Ker}(s + \text{Id}_E)^\perp).$$

On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions, on peut donc conclure :

$$\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)^\perp,$$

donc  $s$  est une symétrie orthogonale.

• Supposons que  $s$  soit une symétrie orthogonale, autrement dit que

$$\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)^\perp.$$

Comme  $s$  est une symétrie,

$$E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E).$$

Puis, si  $B_1$  est une base orthonormée de  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  et  $B_2$  est une base orthonormée de  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ , alors  $B = B_1 \sqcup B_2$  est une base orthonormée de  $E$  :

- Pour tout  $x \in B$ , soit  $x \in B_1$  et alors  $\|x\| = 1$  car tout élément de  $B_1$  est normé, soit  $x \in B_2$ , et alors  $\|x\| = 1$  car tout élément de  $B_2$  est normé.
- Pour tout  $x$  et  $y \in B$  avec  $x \neq y$ , quatre cas sont possibles :
  - $x \in B_1$  et  $y \in B_1$ , alors  $x \perp y$  car  $B_1$  est une famille orthogonale,
  - $x \in B_2$  et  $y \in B_2$ , alors  $x \perp y$  car  $B_2$  est une famille orthogonale,
  - $x \in B_1$  et  $y \in B_2$ , alors  $x \perp y$  car  $x \in B_1 \subset \text{Ker}(s - \text{Id})$ ,  $y \in B_2 \subset \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) \perp \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$
  - $x \in B_2$  et  $y \in B_1$ , alors  $x \perp y$  car  $y \in B_1 \subset \text{Ker}(s - \text{Id})$ ,  $x \in B_2 \subset \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) \perp \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ .
- $B$  est une base de  $E$  car  $B_1$  est une base de  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ ,  $B_2$  est une base de  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$  et que  $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$  (car  $s$  symétrie).

De plus, la base  $B$  de  $E$  est formée de vecteurs propres de  $s$  (car  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = E_1(s)$ ,  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = E_{-1}(s)$ ). Donc,  $\text{Mat}_B(s)$  est alors une matrice diagonale, donc symétrique, et comme  $B$  est une base orthonormée, on en déduit que  $s$  est autoadjoint.

**Remarque.** En toute rigueur, il faudrait traiter à part  $s = \text{Id}_E$  et  $s = -\text{Id}_E$ , pour exclure le cas où  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \{\vec{0}\}$  ou  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \{\vec{0}\}$ .

**Autre démonstration :** supposons que

$$\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)^\perp.$$

Comme  $s$  est une symétrie, on a

$$E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s).$$

Donc, pour tout  $x \in E$ , il existe  $x_1 \in E_1(s)$  et  $x_2 \in E_{-1}(s)$  avec  $x = x_1 + x_2$ , et alors

$$s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2.$$

Notons aussi, pour  $y \in E$ ,  $y = y_1 + y_2$  avec  $y_1 \in E_1(s)$  et  $y_2 \in E_{-1}(s)$ . Alors

$$s(y) = y_1 - y_2.$$

Et donc

$$(s(x), y) = (x_1 - x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) + \underbrace{(x_1, y_2)}_{=0} - \underbrace{(x_2, y_1)}_{=0} - (x_2, y_2) = (x_1, y_1) - (x_2, y_2)$$

(car  $x_1 \in E_1(s) = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ ,  $y_2 \in E_{-1}(s) = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ , et que  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) \perp \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ , donc en particulier  $x_1 \perp y_2$ , soit  $(x_1, y_2) = 0$ . De même pour  $(x_2, y_1) = 0$ ). Et de même,

$$(x, s(y)) = (x_1 + x_2, y_1 - y_2) = (x_1, y_1) - \underbrace{(x_1, y_2)}_{=0} + \underbrace{(x_2, y_1)}_{=0} - (x_2, y_2) = (x_1, y_1) - (x_2, y_2)$$

On a donc

$$(s(x), y) = (x, s(y))$$

pour tout  $(x, y) \in E^2$ , donc  $s$  est autoadjoint.

**3) •** Supposons que  $s$  soit une symétrie orthogonale, alors  $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$  est un projecteur, car

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s + \text{Id}_E)^2 = \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + \text{Id}_E) = \frac{1}{4}(2s + 2\text{Id}_E) = p,$$

puisque  $s \circ s = \text{Id}_E$  ( $s$  symétrie). Et on a  $s = 2p - \text{Id}_E$ .

**Remarque.** Si  $s$  est la symétrie par rapport à  $F$ , parallèlement à  $G$  (avec donc  $F = E_1(s)$ ,  $G = E_{-1}(s)$ ), alors  $p$  est le projecteur sur  $F$ , parallèlement à  $G$  (avec donc  $F = E_1(p)$ ,  $G = E_0(p)$ ).

Puis, pour tout  $(x, y) \in E^2$ , comme  $s$  est autoadjoint (par la question 2), par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$(p(x), y) = \left( \frac{1}{2}(s(x) + x), y \right) = \frac{1}{2}(s(x), y) + \frac{1}{2}(x, y) = \frac{1}{2}(x, s(y)) + \frac{1}{2}(x, y) = \left( x, \frac{1}{2}(s(y) + y) \right) = (x, p(y)).$$

Donc  $p$  est autoadjoint. Mais c'est aussi un projecteur, donc c'est un projecteur orthogonal.

- Si  $s = 2p - \text{Id}_E$  avec  $p$  projecteur orthogonal, alors  $s$  est une symétrie car

$$s \circ s = (2p - \text{Id}_E)^2 = 4p \circ p - 4p + \text{Id}_E = \text{Id}_E,$$

puisque  $p \circ p = p$ .

**Remarque.** Si  $p$  est le projecteur sur  $F$ , parallèlement à  $G$  (avec donc  $F = E_1(p)$ ,  $G = E_0(p)$ ), alors  $s$  est la symétrie par rapport à  $F$ , parallèlement à  $G$  (avec donc  $F = E_1(s)$ ,  $G = E_{-1}(s)$ ).

Puis, pour tout  $(x, y) \in E^2$ , comme  $p$  est autoadjoint (car projecteur orthogonal), par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$(s(x), y) = (2p(x) - x, y) = 2(p(x), y) - (x, y) = 2(x, p(y)) - (x, y) = (x, 2p(y) - y) = (x, s(y)).$$

Donc  $s$  est autoadjoint. Donc la question 2 conclut.

**Exercice 2.** Première façon : on vérifie que

$$A^\top A = B^\top B = C^\top C = I_3.$$

Deuxième façon : on dit que les colonnes de  $A$  (ou de  $B$  ou de  $C$ ) forment une famille orthonormée (pour le produit scalaire usuel) de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ , et donc  $A$  (ou  $B$  ou  $C$ ) sera la matrice de passage entre la base canonique (qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel) et une autre base orthonormée, donc  $A$  (ou  $B$  ou  $C$ ) sera bien orthogonale.

Illustrons la deuxième façon :

$$\sqrt{\frac{1}{6}(1^2 + 1^2 + (-2)^2)} = \sqrt{\frac{1}{6}((- \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2)} = \sqrt{\frac{1}{6}((\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2)} = 1,$$

donc les colonnes de  $A$  sont de norme 1. Puis, si on note  $C_i$  la  $i$ -ième colonne de  $A$  (pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ ),

$$(C_1, C_2) = C_1^\top C_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}(-\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 0, \quad (C_1, C_3) = \frac{1}{6}(\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = 0$$

et

$$(C_2, C_3) = \frac{1}{6}(-\sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{2} + 0) = 0,$$

d'où l'assertion.

On fait de même pour  $B$  et  $C$ .

**Remarque.** La deuxième méthode fait moins de calcul que la première, mais si on remarque que  $A^\top A$  est une matrice symétrique (et donc qu'il suffit de calculer les coefficients d'indice  $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$  avec  $j \geq i$ ), on se ramène à faire exactement les mêmes calculs dans la première méthode.

**Exercice 3.**

1. Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs unitaires (donc  $\|u\| = \|v\| = 1$ ). Alors, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire,

$$(u + v, u - v) = (u, u) + \underbrace{(v, u) - (u, v)}_{=0} - (v, v) = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 1 - 1 = 0.$$

2. Soit  $u$  et  $v$  unitaires, on a alors :

$$(f(u+v), f(u-v)) = 0$$

car  $f$  conserve l'orthogonalité (on a  $(u+v, u-v) = 0$  d'après la question précédente).

Par linéarité de  $f$ , on a donc

$$(f(u) + f(v), f(u) - f(v)) = 0.$$

On a donc

$$\|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 = 0$$

(en développant, comme à la question 1), donc

$$\|f(u)\| = \|f(v)\|$$

(car une norme est un réel positif).

3. • Fixons  $u$  un vecteur unitaire, et notons  $k = \|f(u)\|$  (alors  $k \in \mathbb{R}_+$ ). Soit  $x \in E$  avec  $x \neq \vec{0}$ .

Le vecteur  $\frac{x}{\|x\|}$  est unitaire, donc

$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = k$$

par la question précédente. Ainsi, par linéarité de  $f$ , puis homogénéité de la norme, on a :

$$k = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} f(x) \right\| = \left| \frac{1}{\|x\|} \right| \|f(x)\| = \frac{1}{\|x\|} \|f(x)\|$$

(car une norme est positive). On en déduit (en multipliant par  $\|x\|$ ) :

$$\|f(x)\| = k\|x\|.$$

C'est vrai pour tout  $x \in E$  avec  $x \neq \vec{0}$ , mais cette égalité reste clairement vraie pour  $x = \vec{0}$  (car  $f(\vec{0}) = \vec{0}$  et  $\|\vec{0}\| = 0$ ).

• Si  $k \neq 0$ ,  $\frac{1}{k}f$  est alors une isométrie. Si  $k = 0$ ,  $f = 0$ .

**Remarque.** On a donc montré que, si  $f$  préserve l'orthogonalité, alors il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  et  $g \in \mathcal{O}(E)$  ( $g$  quelconque si  $f = 0$ ) tel que  $f = k\text{Id}_E \circ g$ . La réciproque se voit facilement.

#### Exercice 4.

1. • Soit  $x \in E$ , alors  $f(x)$  est une combinaison linéaire de  $x$  et de  $v$  (car  $(x, v) \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ), et comme  $v \in E$  aussi et que  $E$  est stable par combinaison linéaire,  $f(x) \in E$ . Donc  $f$  va de  $E$  dans  $E$ .

• Pour tout  $(x, y) \in E^2$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , par linéarité à gauche du produit scalaire,

$$f(\alpha x + y) = \alpha x + y + \lambda(\alpha x + y, v)v = \alpha x + y + \lambda(\alpha(x, v) + (y, v))v = \alpha(x + \lambda(x, v)v) + y + \lambda(y, v)v = \alpha f(x) + f(y).$$

Donc  $f$  est linéaire.

• Donc  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

• Soit  $(x, y) \in E^2$ , on a par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} (f(x), f(y)) &= (x + \lambda(x, v)v, y + \lambda(y, v)v) \\ &= \langle x \rangle y + 2\lambda \langle x \rangle v \langle y \rangle v + \lambda^2 \langle x \rangle v \langle y \rangle v \underbrace{(v, v)}_{=\|v\|^2} \\ &= \langle x \rangle y + \lambda \langle x \rangle v \langle y \rangle v (2 + \lambda\|v\|^2) \end{aligned}$$

Donc, si  $f \in \mathcal{O}(E)$ , alors pour  $x = y = v$ , on a

$$\|v\|^2 = \|f(v)\|^2 = (f(v), f(v)) = \|v\|^2 + \lambda(\|v\|^2)^2(2 + \lambda\|v\|^2),$$

ce qui force

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}$$

(car  $v \neq \vec{0}$ , donc  $\|v\| \neq 0$ ).

Réciproquement, si  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}$ , alors pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$(f(x), f(y)) = (x, y).$$

Donc  $f$  est une isométrie.

Donc

$$f \in \mathcal{O}(E) \text{ si et seulement si } \boxed{\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}}.$$

2. ★ Si  $\lambda = 0$  alors  $f = \text{Id}$ , cas sans intérêt.

★ Si  $\lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}$ , alors pour tout  $x \in E$ ,

$$f(x) = x - 2 \left( x, \frac{v}{\|v\|} \right) \frac{v}{\|v\|}.$$

Il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan  $\text{Vect}(v)^\perp$ . En effet :

• Pour tout  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= x - \frac{2}{\|v\|^2} (x, v) v - \frac{2}{\|v\|^2} \left( x - \frac{2}{\|v\|^2} (x, v) v, v \right) v \\ &= x - \frac{2}{\|v\|^2} (x, v) v - \frac{2}{\|v\|^2} (x, v) v + \frac{4}{\|v\|^4} (x, v) \underbrace{(v, v)}_{=\|v\|^2} v \\ &= x = \text{Id}_E(x) \end{aligned}$$

Donc  $f \circ f = \text{Id}_E$ , et donc  $f$  est une symétrie.

• Pour tout  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} x \in E_1(f) &\Leftrightarrow f(x) = x \\ &\Leftrightarrow x - \frac{2}{\|v\|^2} (x, v) v = x \\ &\Leftrightarrow (x, v) v = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (x, v) = 0 \end{aligned}$$

car  $v \neq \vec{0}$ . Donc

$$E_1(f) = \text{Vect}(v)^\perp.$$

• Pour tout  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} x \in E_{-1}(f) &\Leftrightarrow f(x) = -x \\ &\Leftrightarrow x - \frac{2}{\|v\|^2} (x, v) v = -x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\|v\|^2} (x, v) v \\ &\Rightarrow x \in \text{Vect}(v) \end{aligned}$$

(car  $\frac{1}{\|v\|^2} (x, v) \in \mathbb{R}$ ). Donc

$$E_{-1}(f) \subset \text{Vect}(v).$$

Puis, si  $x \in \text{Vect}(v)$ , alors il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  avec  $x = \mu v$ , et alors

$$f(x) = \mu v - \frac{2}{\|v\|^2} (\mu v, v) v = \mu v - 2\mu v = -\mu v = -x,$$

donc  $x \in E_{-1}(f)$ . Donc

$$\text{Vect}(v) \subset E_{-1}(f).$$

Par double inclusion,

$$E_{-1}(f) = \text{Vect}(v).$$

• Donc  $f$  est la symétrie par rapport à  $\text{Vect}(v)^\perp$ , parallèlement à  $\text{Vect}(v)$ . Comme  $\text{Vect}(v)^\perp$  est un hyperplan (car  $\dim(\text{Vect}(v)) = 1$  puisque  $v \neq \vec{0}$ ),  $f$  est une **réflexion**.

**Autre façon** : pour  $\lambda = -\frac{2}{\|v\|^2}$ , on a, pour tout  $x \in E$ ,

$$f(x) = x - 2 \left( x, \frac{v}{\|v\|} \right) \frac{v}{\|v\|}.$$

Or,  $\left( \frac{v}{\|v\|} \right)$  est une base orthonormée de  $\text{Vect}(v)$ , donc le projecteur orthogonal sur  $\text{Vect}(v)$  est

$$q : x \in E \mapsto \left( x, \frac{v}{\|v\|} \right) \frac{v}{\|v\|} \in E.$$

Or, le projecteur orthogonal  $p$  sur  $\text{Vect}(v)^\perp$  vérifie  $p + q = \text{Id}$ , donc

$$p : x \in E \mapsto x - \left( x, \frac{v}{\|v\|} \right) \frac{v}{\|v\|} \in E.$$

Enfin,  $f = 2p - \text{Id}$ , et donc  $f$  est la symétrie par rapport à  $\text{Vect}(v)^\perp$ , parallèlement à  $\text{Vect}(v)$  (relation classique entre symétrie et projecteur...).

**Exercice 5.** Ce sont les matrices diagonales n'ayant que des 1 ou des  $-1$  sur la diagonale.

★ Première façon :

**Analyse** : soit  $T$  une telle matrice,  $T = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ . On montre alors par récurrence **forte** sur  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , que  $C_i$  est  $\pm E_i$ , si l'on note  $(E_1, \dots, E_n)$  la base canonique de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

**Initialisation** : comme  $T$  est triangulaire supérieure, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $C_1 = \alpha E_1$ . Comme  $T$  est orthogonale,  $\|C_1\|^2 = 1$  (pour le produit scalaire usuel de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ ), et donc

$$1 = \|C_1\|^2 = \alpha^2 \|E_1\|^2 = \alpha^2,$$

donc  $\alpha = \pm 1$ . D'où l'initialisation.

**Hérédité** : soit  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , supposons qu'il existe  $(e_1, \dots, e_i) \in \{\pm 1\}^i$  avec

$$C_1 = e_1 E_1, \quad \dots, \quad C_i = e_i E_i.$$

Comme  $T$  est triangulaire supérieure, il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}) \in \mathbb{R}^{i+1}$  avec

$$C_{i+1} = \sum_{k=1}^{i+1} \alpha_k E_k.$$

Comme  $T$  est orthogonale,  $C_{i+1} \perp C_j$  pour tout  $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$ , et donc

$$0 = (C_{i+1}, C_j) = \sum_{k=1}^{i+1} \alpha_k e_j (E_k, E_j) = \alpha_j e_j,$$

donc  $\alpha_j = 0$ . Puis,  $C_{i+1} = \alpha_{i+1} E_{i+1}$  est de norme 1, donc

$$1 = \|C_{i+1}\|^2 = \alpha_{i+1}^2 \|E_{i+1}\|^2 = \alpha_{i+1}^2.$$

Donc  $\alpha_{i+1} = \pm 1$ . Donc  $C_{i+1} = \pm E_{i+1}$ . D'où l'hérédité.

**Conclusion** : pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $C_i = \pm E_i$ .

**Synthèse** : réciproquement, une telle matrice convient (elle est diagonale, donc triangulaire, et son inverse est bien sa transposée (qui est elle-même, car c'est une matrice diagonale), c'est direct).

★ Deuxième façon :

**Analyse :** soit  $T$  une telle matrice, alors  $T$  est inversible. Si on note  $\mathcal{T}_n$  l'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures de  $M_n(\mathbb{R})$ , alors

$$\phi : U \in \mathcal{T}_n \mapsto TU \in \mathcal{T}_n$$

est une application bien définie (le produit de deux matrices triangulaires supérieures en est encore une), linéaire (par bilinéarité du produit matriciel), injective (car  $TU = 0_n \Rightarrow U = 0_n$ , puisque  $T$  est inversible (on multiplie par  $T^{-1}$  à gauche)),  $\mathcal{T}_n$  est de dimension finie, donc l'espace de départ et d'arrivée de  $\phi$  a même dimension finie. Alors (par le cours de PCSI), on sait que  $\phi$  est bijective.

Par conséquent, comme  $I_n \in \mathcal{T}_n$ , il existe  $U$  triangulaire supérieure avec  $TU = I_n$ , donc  $U = T^{-1}$ .

Mais, comme  $T$  est orthogonale,  $T^{-1} = T^\top$ . On obtient donc que  $T^\top = U$  est une matrice triangulaire supérieure, or  $T$  aussi. Cela donne directement que  $T$  est diagonale, donc égale à sa transposée, et donc

$$I_n = T^\top T = T^2.$$

$T$  est donc une matrice diagonale de la forme  $T = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  avec  $a_i^2 = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Donc

$$T = \text{diag}(e_1, \dots, e_n)$$

avec  $e_i = \pm 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Synthèse :** réciproquement, une telle matrice convient.

**Exercice 6.** Dans cet exercice, pour tout  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , si  $M \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ , on note  $\overline{M} \in M_{p,q}(\mathbb{C})$  la matrice telle que

$$(\overline{M})_{i,j} = \overline{M_{i,j}}$$

pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ . Comme la conjugaison complexe préserve l'addition et le produit, on a directement : pour tout  $(M, N) \in M_{p,q}(\mathbb{C}) \times M_{q,r}(\mathbb{C})$ ,

$$\overline{M \times N} = \overline{M} \times \overline{N}$$

et pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , pour tout  $M \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ ,

$$\overline{\lambda \cdot M} = \overline{\lambda} \cdot \overline{M} \quad \text{et} \quad \overline{({}^\top M)} = \overline{M}^\top.$$

Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Toute matrice a au moins une valeur propre complexe.

Soit alors  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A$ , et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ , alors

$$AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

Donc

$$\overline{AX}^\top AX = \overline{\lambda X}^\top \lambda X = \overline{\lambda X}^\top \lambda X = \overline{\lambda} \lambda \overline{X}^\top X = |\lambda|^2 (\overline{x_1} \quad \dots \quad \overline{x_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = |\lambda|^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

Comme  $X \neq 0_{n,1}$ , on a

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0$$

(en effet, si  $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 0$ , alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|x_i|^2 = 0$ , car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque réel est nul, et donc pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $x_i = 0$ , ce qui donne  $X = 0_{n,1}$ ).

Puis,

$$\overline{AX}^\top AX = (\overline{A} \times \overline{X})^\top AX = \overline{X}^\top \overline{A}^\top AX = \overline{X}^\top I_n X = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

car  $A$  est orthogonale à coefficient réels, donc

$$\overline{A}^\top A = A^\top A = I_n.$$

En simplifiant par  $\sum_{i=1}^n |x_i|^2$  (qui est bien non nul), il vient

$$|\lambda|^2 = 1,$$

donc  $\lambda$  est bien de module 1.

### Exercice 7.

**1) •** Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $y \in \mathbb{R}^n$ . Notons  $X$  et  $Y$  les matrices-colonnes coordonnées de  $x$  et  $y$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $AX$  et  $A^\top Y$  sont celles de  $f(x)$  et  $g(y)$ , et comme le produit scalaire considéré est le produit scalaire usuel (donc la base canonique est **orthonormée** pour ce produit scalaire), on a

$$(g(y), x) = (A^\top Y)^\top X \quad \text{et} \quad (y, f(x)) = Y^\top (AX)$$

Or, par propriétés de la transposition, on a

$$(A^\top Y)^\top = Y^\top (A^\top)^\top = Y^\top A,$$

ce qui donne bien l'égalité

$$(g(y), x) = Y^\top AX = (y, f(x))$$

(par associativité du produit matriciel).

• Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Il suffit ensuite de prendre  $y = f(x)$  dans cette dernière égalité pour obtenir

$$(g \circ f(x), x) = (f(x), f(x)) = \|f(x)\|^2.$$

**2) •** Soit  $z \in \text{Im}(g)$ , alors il existe  $y \in E$  avec  $z = g(y)$ . Donc, pour tout  $x \in \text{Ker}(f)$ , en appliquant l'égalité de la question 1,

$$(z, x) = (g(y), x) = (y, f(x)) = (y, \vec{0}) = 0$$

donc  $z \in \text{Ker}(f)^\perp$ . Donc

$$\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)^\perp.$$

• Puis, comme une matrice et sa transposée ont même rang,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(g)) &= \text{rg}(A^\top) = \text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(f)) \\ &= \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) && \text{(par le théorème du rang)} \\ &= \dim(\text{Ker}(f)^\perp) && \text{(car } E \text{ est euclidien)} \end{aligned}$$

• On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions, ce qui permet bien de conclure à l'égalité

$$\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)^\perp.$$

**3) Soit**  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , prenons  $y = f(z)$  dans la première égalité de la question 1, alors on a

$$(g \circ f(z), x) = (f(z), f(x)).$$

En intervertissant les rôles de  $x$  et  $z$ , on a

$$(g \circ f(x), z) = (f(x), f(z)).$$

La symétrie du produit scalaire (utilisée deux fois) donne alors

$$(g \circ f(z), x) = (f(z), f(x)) = (f(x), f(z)) = (g \circ f(x), z) = (z, g \circ f(x)).$$

Cette égalité est vraie pour tout  $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ , donc  $g \circ f$  est bien autoadjoint.

**Remarque.** Une autre possibilité aurait été de remarquer que  $A^\top A$  est la matrice de  $g \circ f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , que c'est une matrice symétrique car

$$({}^\top A^\top A) = A^\top ({}^\top A^\top) = A^\top A,$$

et que la base canonique est orthonormée pour le produit scalaire usuel, donc on pouvait bien en conclure que  $g \circ f$  est autoadjoint.

4) Par le théorème spectral, tout endomorphisme symétrique est diagonalisable. Soit alors  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre, et  $x \in \mathbb{R}^n$  un vecteur propre associé. Alors

$$g \circ f(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad x \neq \vec{0}.$$

Et donc, en utilisant la deuxième égalité de la première question,

$$\|f(x)\|^2 = (g \circ f(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = \lambda\|x\|^2.$$

Comme  $x$  est non nul,  $\|x\| \neq 0$ , et donc

$$\lambda = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \geq 0.$$

Donc toute valeur propre de  $g \circ f$  est positive ou nulle.

**Exercice 8.** •  $\mathcal{S}(E) \subset \mathcal{L}(E)$  par définition.

• Soit  $f : x \in E \mapsto \vec{0} \in E$  l'endomorphisme nul, alors pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$(f(x), y) = (\vec{0}, y) = 0 = (x, \vec{0}) = (x, f(y)).$$

Donc  $f \in \mathcal{S}(E)$ .

• Soit  $(u, v) \in \mathcal{S}(E)^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors pour tout  $(x, y) \in E^2$ , par bilinéarité du produit scalaire,

$$((\lambda u + v)(x), y) = (\lambda u(x) + v(x), y) = \lambda(u(x), y) + (v(x), y) \underset{(\star)}{=} \lambda(x, u(y)) + (x, v(y)) = (x, \lambda u(y) + v(y)) = (x, (\lambda u + v)(y))$$

(l'égalité  $(\star)$  provenant de ce que  $u$  et  $v$  sont symétriques). Donc

$$\lambda u + v \in \mathcal{S}(E).$$

• Donc  $\mathcal{S}(E)$  est un sous-espace vectoriel du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$ .

**Exercice 9.** Les matrices  $A$  et  $B$  sont symétriques réelles, donc d'après le théorème spectral, c'est possible.

• Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1 & 1 \\ 4 - \lambda & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} (\lambda - 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + 0 \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} (\lambda - 4) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4)\lambda(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Donc

$$\chi_A = (X - 3)(X - 4)X.$$

$A$  a donc trois valeurs propres différentes : 0, 3 et 4, toutes simples (donc les espaces propres sont de dimension 1). Une recherche des espaces propres donne

$$E_0(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \quad E_3(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_4(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(et comme chaque espace propre est de dimension 1, toute famille génératrice d'un espace propre, formée d'un seul vecteur, sera une base de l'espace propre en question. Donc, chaque vecteur dans un Vect ci-dessus est une base de l'espace propre à gauche du Vect).

Mais, pour construire  $P$  orthogonale, il faut avoir une base orthonormée de chaque espace propre. Pour cela, on applique le procédé de Gram-Schmidt autant de fois qu'il y a de valeurs propres : on l'applique à une base de chaque espace propre.

Comme ici chaque base est de cardinal 1, seule la première étape du procédé est à appliquer : on divise l'unique vecteur de la base par sa norme, pour avoir une base orthonormée de l'espace propre considéré.

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}, \text{ donc}$$

$$\left( \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right)$$

est une base orthonormée de  $E_0$ .

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \text{ donc}$$

$$\left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right)$$

est une base orthonormée de  $E_3$ .

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \text{ donc}$$

$$\left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

est une base orthonormée de  $E_4$ .

Comme  $A$  est symétrique à coefficients réels, et qu'on a trouvé une base orthonormée de chaque espace propre, on peut alors affirmer que (par exemple) les matrices

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

vérifient

$$P^{-1}AP = D \quad \text{avec} \quad P \text{ orthogonale}$$

- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 \chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_3 - B) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{C_1 \leftarrow \bar{C}_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 2 \\ \lambda + 1 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{C_1 \leftarrow \bar{C}_1 + C_2}{=} (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 2 \\ \lambda + 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 5)
 \end{aligned}$$

Donc

$$\chi_B = (X + 1)^2(X - 5).$$

$B$  a donc deux valeurs propres différentes :  $-1$  et  $5$ ,  $-1$  étant valeur propre double (donc  $\dim(E_{-1}(B)) = 2$ , car on sait  $B$  diagonalisable),  $5$  étant valeur propre simple (donc  $\dim(E_5(B)) = 1$ ).

Une recherche des espaces propres donne

$$E_{-1}(B) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_5(B) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Les familles génératrices ci-dessus sont en fait des bases des espaces propres considérés, car  $\dim(E_{-1}(B)) = 2$  et  $\dim(E_5(B)) = 1$ .

Mais, pour construire  $P$  orthogonale, il faut avoir une base orthonormée de chaque espace propre. Pour cela, on applique le procédé de Gram-Schmidt autant de fois qu'il y a de valeurs propres : on l'applique à une base de chaque espace propre.

Comme  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_5(B)$  formée d'un seul vecteur, seule la première étape du procédé de Gram-

Schmidt est à appliquer. Or,  $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$ , donc on pose

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

et  $(W)$  est une base orthonormée de  $E_5(B)$ .

Par contre, la famille

$$\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de  $E_{-1}(B)$  formée de deux vecteurs, il faut donc appliquer les deux premières étapes du procédé de Gram-Schmidt.

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \text{ donc on pose}$$

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, U \right) U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \text{ donc on pose}$$

$$V = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et alors on sait que  $(U, V)$  est une base orthonormée de  $E_{-1}(B)$ .

Comme on sait que  $B$  est symétrique réelle, et qu'on a trouvé une base orthonormée de chaque espace propre, on peut affirmer que les matrices

$$P = (U \mid V \mid W) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

vérifient

$$P^{-1}BP = D \quad \text{avec} \quad P \text{ orthogonale}$$

### Exercice 10.

1. (a) •  $S = A^T A$  est une matrice symétrique, car

$$S^T = ({}^T A^T A) = A^T ({}^T A^T) = A^T A = S,$$

et à coefficients réels, elle est donc diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$  (théorème spectral).

• Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une valeur propre réelle de  $S = A^T A$  et  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . On a alors  $A^T A X = \lambda X$ , donc

$$X^T A^T A X = \lambda X^T X.$$

Or,

$$X^T A^T A X = ({}^T A X) A X = \|A X\|^2 \quad \text{et} \quad X^T X = \|X\|^2,$$

pour la norme associée au produit scalaire canonique de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ . Ainsi on a :

$$\|A X\|^2 = \lambda \|X\|^2$$

et comme  $\|X\| \neq 0$  (puisque  $X$  est un vecteur propre, donc est non nul), on a donc

$$\lambda = \frac{\|A X\|^2}{\|X\|^2} \geq 0.$$

Donc les valeurs propres de  $A^T A$  sont positives ou nulles.

- Donc  $S = A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

(b) Comme  $A^\top A$  est symétrique réelle, le théorème spectral donne qu'il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$A^\top A = P D P^{-1}$$

où  $D$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

On a, en passant à la trace dans l'égalité précédente :

$$\text{tr}(A^\top A) = \text{tr}(P D P^{-1}) = \text{tr}(D)$$

(car deux matrices semblables ont même trace). Or,

$$\text{tr}(A^\top A) = \sum_{j=1}^n (A^\top A)_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (A^\top)_{j,i} A_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$$

et comme  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,

$$\text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

En reportant, on a bien l'égalité voulue.

(c) • Si  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors toutes les valeurs propres de  $S$  sont réelles et strictement positives. Donc  $0 \notin \text{Sp}(S)$ , donc  $S$  est inversible. Par conséquent,

$$0 \neq \det(S) = \det(A^\top A) = \det(A^\top) \det(A) = \det(A)^2,$$

et donc  $\det(A) \neq 0$ , autrement dit  $A$  est inversible.

• Réciproquement, si  $A$  est inversible,  $A^\top$  aussi, puis par produit,  $S$  aussi. Donc  $0 \notin \text{Sp}(S)$ .

La question 1a donne que les valeurs propres de  $S$  sont toutes réelles et positives. Comme elles ne sont pas nulles, on a alors que les valeurs propres de  $S$  sont toutes réelles et strictement positives. Donc  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

• **Conclusion :**

$$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est inversible.}$$

2. Comme  $S$  est une matrice symétrique réelle, le théorème spectral donne qu'il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  tel que

$$S = P D P^\top$$

avec  $D$  une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont positifs ou nuls, puisque ce sont des valeurs propres de  $S$  (et car  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ).

On a :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} S &= P D P^\top \\ &= P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top \\ &= \underbrace{P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top}_{=:A} \underbrace{P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top}_{=:A} \end{aligned}$$

car  $P^\top P = I_n$ , puisque  $P$  est une matrice orthogonale. On a donc  $S = A^2$ , avec

$$A^\top = ({}^\top P^\top) \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top = P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top = A,$$

donc

$$S = A^\top A.$$

**Exercice 11.** Le théorème du rang donne

$$\text{rg}(A) = n - \dim(\text{Ker}(A)) \quad \text{et} \quad \text{rg}(A^\top A) = n - \dim(\text{Ker}(A^\top A)),$$

car  $A$  et  $A^\top A$  ont le même nombre  $n$  de colonnes. Donc

$$\text{rg}(A^\top A) = \text{rg}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\text{Ker}(A^\top A)) \quad \Leftarrow \quad \text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top A).$$

(on fait attention : le dernier symbole est celui d'une implication, pas d'une équivalence!). Montrons donc l'égalité de ces deux noyaux.

$\boxed{\subset}$  Soit  $X \in \text{Ker}(A)$ , on a alors  $AX = 0_{n,1}$ , donc :

$$A^\top AX = A^\top (AX) = A^\top 0_{n,1} = 0_{n,1},$$

donc  $X \in \text{Ker}(A^\top A)$ . On a donc

$$\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^\top A).$$

$\boxed{\supset}$  Soit  $X \in \text{Ker}(A^\top A)$ , on a alors  $A^\top AX = 0_{n,1}$ , donc :

$$\|AX\|^2 = ({}^\top AX)AX = X^\top A^\top AX = X^\top (A^\top AX) = X^\top 0_{n,1} = 0,$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme associée au produit scalaire usuel de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ . Comme c'est une norme, on en déduit  $AX = 0_{n,1}$ , donc  $X \in \text{Ker}(A)$ . Donc

$$\text{Ker}(A^\top A) \subset \text{Ker}(A).$$

• Par double inclusion, on a

$$\text{Ker}(A^\top A) = \text{Ker}(A),$$

puis avec ce qui précède,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top A).$$

**Exercice 12. 1) Existence :**

Comme  $A$  est une matrice symétrique réelle, par le théorème spectral, il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  tel que

$$A = PDP^\top$$

avec  $D$  une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont positifs ou nuls puisque ce sont des valeurs propres de  $A$  (et qu'elles sont positives ou nulles puisque  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ).

On a :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
 A &= PD P^\top \\
 &= P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top \\
 &= \underbrace{P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top}_{=:C} \underbrace{P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top}_{=:C}
 \end{aligned}$$

car  $P^\top P = I_n$ . On a donc  $A = C^2$ , avec

$$C^\top = ({}^\top P^\top) \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top = P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^\top = C,$$

donc  $C$  est symétrique.

Enfin,  $P$  étant orthogonale,  $C$  est semblable à la matrice diagonale  $\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$ , donc ses valeurs

propres sont les réels  $\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}$ , qui sont tous positifs.

Donc la matrice  $C$  vérifie

$$A = C^2$$

et  $C$  est symétrique avec toutes ses valeurs propres dans  $\mathbb{R}_+$ . Donc  $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Donc cette matrice  $C$  convient. D'où l'existence.

Unicité :

• Montrons d'abord le cas diagonale :

On a  $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$  (avec, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $d_i \geq 0$ ), et  $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$ , et soit une

matrice  $N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , donc symétrique réelle à valeurs propres toutes positives, telle que  $N^2 = D$ . Alors on veut montrer  $N = \Delta$ .

Commençons par remarquer que, par construction, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(D)$ , on a

$$\sqrt{\lambda} \in \text{Sp}(\Delta) \quad \text{et} \quad E_\lambda(D) = E_{\sqrt{\lambda}}(\Delta)$$

(si on note  $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  la base canonique de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors  $E_\lambda(D)$  est l'espace engendré par les  $E_i$  tels que  $D_{i,i} = \lambda$ , et  $E_{\sqrt{\lambda}}(\Delta)$  est l'espace engendré par les  $E_i$  tels que  $\Delta_{i,i} = \sqrt{\lambda}$ , donc ce sont les mêmes puisque, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\Delta_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}}$  et  $D_{i,i} = \Delta_{i,i}^2$ ).

Puis, la matrice  $N$  est symétrique réelle, donc diagonalisable : il existe  $(X_1, \dots, X_n) \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^n$  base de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ , et il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$NX_i = \alpha_i X_i.$$

Les  $\alpha_i$  (pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) sont alors des valeurs propres de  $N$ , donc sont des réels positifs.

Puis,  $N^2 = D$ , donc pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\alpha_i^2 X_i = N^2 X_i = D X_i,$$

autrement dit  $\alpha_i^2$  est une valeur propre de  $D$  et  $X_i \in E_{\alpha_i^2}(D) = E_{\sqrt{\alpha_i^2}}(\Delta)$ . Comme  $\alpha_i \geq 0$ , on a  $\sqrt{\alpha_i^2} = \alpha_i$ , et donc  $X_i \in E_{\alpha_i}(\Delta)$ , soit

$$\Delta X_i = \alpha_i X_i = N X_i.$$

Donc les applications linéaires

$$f : X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto N X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g : X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto \Delta X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

(ce sont les applications canoniquement associées à  $N$  et  $\Delta$ ) coïncident sur une base de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  (à savoir  $(X_1, \dots, X_n)$ ), donc sont égales, donc ont même matrice dans la base canonique. Autrement dit, on a bien  $N = \Delta$ .

D'où l'unicité dans le cas diagonale.

• Cas général : reprenons les notations de la démonstration de l'existence : on a

$$A = P D P^\top, \quad C = P \Delta P^\top \quad \text{et} \quad C^2 = A$$

avec  $P$  matrice orthogonale. Soit  $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , donc symétrique réelle avec toutes les valeurs propres positives, telle que

$$R^2 = A.$$

Notons  $N = P^\top R P$ . Alors les règles  $(^\top T U) = U^\top T^\top$  et  $(^\top T^\top) = T$  (valables pour toutes matrices  $T$  et  $U$  de  $M_n(\mathbb{R})$ ) donnent :

$$N^\top = (^\top P^\top R P) = P^\top R^\top (^\top P^\top) = P^\top R P = N$$

(car  $R$  est symétrique), donc  $N$  est une matrice symétrique réelle. Puis, la matrice  $P$  est orthogonale, donc  $P^\top = P^{-1}$ , donc

$$N = P^{-1} R P \quad \text{puis} \quad N^2 = P^{-1} R P P^{-1} R P = P^{-1} R^2 P = P^{-1} A P = P^{-1} (P D P^\top) P = D$$

(car  $P^\top P = I_n$ , puisque  $P$  est orthogonale).

Enfin,  $N = P^{-1} R P$ , donc  $N$  et  $R$  sont semblables, donc

$$\text{Sp}(N) = \text{Sp}(R).$$

Comme toutes les valeurs propres de  $R$  sont positives, on en déduit que toutes les valeurs propres de  $N$  sont positives.

L'étude du cas diagonale donne alors  $N = \Delta$ . Et donc

$$\Delta = P^{-1} R P \quad \text{soit} \quad R = P \Delta P^{-1} = P \Delta P^\top = C.$$

D'où l'unicité.

**2)** On a  $P$  orthogonale, donc  $P^\top = P^{-1}$ .

On a

$$A = P D P^{-1} = P \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs deux à deux différents de sorte que

$$\{d_1, \dots, d_n\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\},$$

et notons  $(L_1, \dots, L_r)$  les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ . On a alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,

$$L_i \in \mathbb{R}_{r-1}[X] \subset \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

Notons  $Q \in \mathbb{R}[X]$  le polynôme défini par

$$Q = \sum_{i=1}^r \sqrt{\lambda_i} L_i.$$

On a alors

$$Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

(car  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  est stable par combinaison linéaire), et pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,

$$Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}.$$

Puis, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tel que  $d_j = \lambda_i$ , et donc

$$Q(d_j) = Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} = \sqrt{d_j}.$$

Ainsi,

$$Q(A) = PQ(D)P^{-1} = P \begin{pmatrix} Q(d_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Q(d_n) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} P^{-1} = C.$$

Donc le polynôme  $Q$  convient.

**Exercice 13.** Le fait que  $\phi$  va de  $E$  dans  $E$  est immédiat : si  $X \in E$ ,  $X^\top$  est encore une matrice carrée de taille  $n$ , et comme  $A \in E$ , et que  $E$  est stable par produit,

$$AX^\top A \in E.$$

★  $\phi$  est linéaire : pour tout  $(X, Y) \in E^2$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , en utilisant que la transposition est linéaire, et la bilinéarité du produit matriciel, on a

$$\phi(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y)^\top A = A(\lambda X^\top + Y^\top)A = \lambda AX^\top A + AY^\top A = \lambda \phi(X) + \phi(Y)$$

★  $\phi$  est autoadjoint : pour tout  $(X, Y) \in E^2$ ,

$$(\phi(X), Y) = \text{tr}(X^\top \phi(Y)) = \text{tr}(X^\top (A^\top A X^\top A) Y) = \text{tr}(A^\top (X^\top A^\top A) Y) = \text{tr}(A^\top X A^\top Y)$$

et

$$(X, \phi(Y)) = \text{tr}(X^\top \phi(Y)) = \text{tr}(X^\top A Y^\top A)$$

Or, une matrice et sa transposée ont même trace, et comme  $(A^\top X A^\top Y)^\top = Y^\top (A^\top)^\top X^\top (A^\top)^\top = Y^\top A X^\top A$ , on en déduit

$$(\phi(X), Y) = \text{tr}(Y^\top A X^\top A).$$

En notant  $P = Y^\top A$  et  $Q = X^\top A$ , la propriété  $\text{tr}(PQ) = \text{tr}(QP)$  donne

$$(\phi(X), Y) = \text{tr}(X^\top A Y^\top A) = (X, \phi(Y)).$$

Donc  $\phi$  est bien symétrique.

★ **Deuxième approche pour montrer que  $\phi$  est autoadjoint** : comme la base canonique  $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  est orthonormée pour le produit scalaire considéré, cela revient à montrer que la matrice de  $\phi$  dans cette base est symétrique, autrement dit que pour tout  $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$ , le coefficient de  $\phi(E_{i,j})$  selon  $E_{k,\ell}$  est égal au coefficient de  $\phi(E_{k,\ell})$  selon  $E_{i,j}$ .

Or, le coefficient de  $\phi(E_{i,j})$  selon  $E_{k,\ell}$  est

$$(\phi(E_{i,j}))_{k,\ell} = (A E_{i,j}^\top A)_{k,\ell} = \sum_{p=1}^n a_{k,p} (E_{i,j}^\top A)_{p,\ell} = \sum_{p=1}^n a_{k,p} \sum_{q=1}^n (E_{i,j}^\top)_{p,q} a_{q,\ell} = \sum_{p=1}^n a_{k,p} \sum_{q=1}^n (E_{i,j})_{q,p} a_{q,\ell} = a_{k,j} a_{i,\ell}$$

$$\text{car } (E_{i,j})_{q,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = i \text{ et } p = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En échangeant le rôle de  $i$  et  $k$ , et de  $j$  et  $\ell$ , le coefficient de  $\phi(E_{k,\ell})$  selon  $E_{i,j}$  est  $a_{i,\ell} a_{k,j}$ , et donc c'est bien égal.

**Exercice 14.** On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$A$  est diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$  car symétrique réelle. De plus  $\text{rg}(A) = 1$  donc

$$\dim(E_0(A)) = n - 1$$

par le théorème du rang.

Comme  $A$  est diagonalisable, il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  avec  $D = P^{-1}AP$  diagonale, et sur la diagonale, il y a les valeurs propres de  $A$ , autant de fois que leur multiplicité, donc que la dimension de l'espace propre associé (puisque  $A$  est diagonalisable). Donc, sur la diagonale de  $D$ , il y a  $n - 1$  fois 0. Notons  $\lambda$  le dernier coefficient de  $D$ , alors

$$\lambda = \lambda + (n - 1) \times 0 = \text{tr}(D) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A) = n$$

(car deux matrices semblables ont même trace).

Donc  $A$  est semblable à

$$D = \text{diag}(0, \dots, 0, n).$$

Donc

$$\text{Sp}(A) = \{0, n\} \quad \text{et} \quad \dim(E_n(A)) = 1$$

(car deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres et mêmes dimensions d'espaces propres).

On a

$$E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}), x_1 + \dots + x_n = 0 \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et

$$E_n(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

En effet,  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  vérifie

$$AU = nU$$

car la somme de chaque ligne de  $A$  fait  $n$ , donc  $U \in E_n(A)$ . Et comme  $U \neq 0_{n,1}$  et  $\dim(E_n(A)) = 1$ , on en déduit que  $(U)$  est une base de  $E_n(A)$ .

**Exercice 15.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  et  $x$  un vecteur propre associé. Alors

$$0 \leq (u(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = \lambda \|x\|^2.$$

Or,  $\|x\|^2 > 0$  car  $x \neq \vec{0}$  (puisque c'est un vecteur propre). Donc

$$\lambda = \frac{(u(x), x)}{\|x\|^2} \geq 0$$

(comme quotient de deux réels positifs). Ainsi  $\lambda \geq 0$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Comme  $u$  est autoadjoint, le théorème spectral donne que  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormée de  $E$  : il existe donc  $(e_1, \dots, e_n)$  base orthonormée de  $E$ , et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  avec, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u(e_i) = \lambda_i e_i$ . De plus, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i \in \text{Sp}(u)$ , donc  $\lambda_i \geq 0$  (par hypothèse).

Soit  $x \in E$ , il existe donc  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  avec  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , et alors, par linéarité de  $u$ ,

$$u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i.$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on a alors :

$$(u(x), x) = \left( \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_i (e_i, e_j).$$

Or  $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , car  $(e_1, \dots, e_n)$  est orthonormée. On a donc :

$$(u(x), x) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} x_i^2 \geq 0.$$

Cela étant vrai pour tout  $x \in E$ , on a bien (i).

**Remarque.** C'est la version endomorphisme de la propriété

$$\ll S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad S \text{ est symétrique et } \text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+ \gg$$

vue en cours.

**Exercice 16.**  $A$  est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, il existe  $(U_1, \dots, U_n)$  base orthonormée de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  (pour le produit scalaire usuel) et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  avec  $AU_i = \lambda_i U_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Puis, pour  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  avec  $X = \sum_{i=1}^n x_i U_i$ . Alors

$$X^\top X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j U_i^\top U_j = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

car pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $U_i^\top U_j = \delta_{i,j}$  (car  $(U_1, \dots, U_n)$  est une famille orthonormée pour le produit scalaire usuel de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ ).

Et

$$AX = \sum_{j=1}^n x_j AU_j = \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j U_j,$$

par conséquent

$$X^\top AX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_j U_i^\top U_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i.$$

Puis, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda \leq \lambda_i \leq \mu$ , et comme  $x_i^2 \geq 0$ ,

$$\lambda x_i^2 \leq \lambda_i x_i^2 \leq \mu x_i^2.$$

En sommant, on a alors

$$\lambda X^\top X = \sum_{i=1}^n \lambda x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = X^\top AX \leq \sum_{i=1}^n \mu x_i^2 = \mu X^\top X.$$

**Autre rédaction :**  $A$  est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $D \in M_n(\mathbb{R})$  matrice orthogonale avec  $A = PDP^{-1} = PDP^\top$ . Alors

$$X^\top AX = X^\top PDP^\top X = (P^\top X)^\top DP^\top X = Y^\top DY$$

en notant  $Y = P^\top X$ . Puis, comme  $P$  est orthogonale,  $PP^\top = I_n$ , et donc

$$Y^\top Y = X^\top ({}^\top P^\top) P^\top X = X^\top P P^\top X = X^\top I_n X = X^\top X.$$

Notons alors  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , on a alors

$$Y^\top D Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \quad \text{et} \quad Y^\top Y = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\lambda \leq \lambda_i \leq \mu$ , et comme  $y_i^2 \geq 0$ ,

$$\lambda y_i^2 \leq \lambda_i y_i^2 \leq \mu y_i^2.$$

En sommant, on a alors

$$\lambda X^\top X = \lambda Y^\top Y = \sum_{i=1}^n \lambda y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = Y^\top D Y = X^\top A X \leq \sum_{i=1}^n \mu y_i^2 = \mu Y^\top Y = \mu X^\top X.$$

**Exercice 17.**  $f$  est autoadjoint, donc par le théorème spectral, il existe une base orthonormée  $B = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ . Donc, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  avec  $f(e_i) = \lambda_i e_i$ . Puis, pour  $x \in E$ , il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  avec  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , et par linéarité de  $f$ , on a

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i,$$

et donc (comme  $B$  est orthonormée)

$$(f(x), x) = \left( \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \lambda_i x_j \underbrace{(e_i, e_j)}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i$$

Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\lambda \leq \lambda_i \leq \mu$ , et comme  $x_i^2 \geq 0$ ,

$$\lambda x_i^2 \leq \lambda_i x_i^2 \leq \mu x_i^2.$$

En sommant, on a alors

$$\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \mu x_i^2 = \mu \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Or, comme  $B$  est orthonormée,  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ , donc on obtient bien, pour tout  $x \in E$ ,

$$\lambda \|x\|^2 \leq (f(x), x) \leq \mu \|x\|^2.$$

**Exercice 18.** Par définition de la trace, on a

$$\text{tr}(S^\top S) = \sum_{j=1}^n (S^\top S)_{j,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (S^\top)_{j,i} S_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n s_{i,j}^2.$$

Or, comme  $S$  est orthogonale,  $S^\top S = I_n$ , donc

$$\text{tr}(S^\top S) = \text{tr}(I_n) = n.$$

D'où l'égalité.

**Remarque.** On peut aussi dire que  $\sum_{i=1}^n s_{i,j}^2 = 1$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , puisque c'est la norme du vecteur formé par la  $j$ -ième colonne de  $S$ , qui est unitaire puisque  $S$  est orthogonale, puis on somme  $n$  fois 1...

Soit  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors la formule du produit matriciel donne :

$$X^\top SX = \sum_{i=1}^n \underbrace{(X^\top)_{1,i}}_{=1} (SX)_{i,1} = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \sum_{j=1}^n s_{i,j} \underbrace{X_{j,1}}_{=1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j},$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire usuel sur  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ ),

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j} \right| = |X^\top SX| = |(X, SX)| \leq \|X\| \|SX\|.$$

Or, comme  $S$  est orthogonale,  $\|SX\| = \|X\|$ , donc

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j} \right| \leq \|X\|^2 = 1^2 + \dots + 1^2 = n.$$

**Exercice 19. 1)** Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  avec  $i \neq j$ ,

$$1 = \|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2(x_i, x_j) = 1 + 1 - 2(x_i, x_j),$$

donc

$$(x_i, x_j) = \frac{1}{2}.$$

**2) •**  $A$  symétrique (par symétrie du produit scalaire) et à coefficients réelles, donc diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$ .

• Si on note

$$J = (1)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$A = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}J.$$

Or,  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est clairement vecteur propre de  $J$  associé à  $n$  (car la somme de chaque ligne de  $J$  fait  $n$ ) :

$$JX = nX$$

(et  $X \neq_{n,1}$ ), donc

$$\dim(E_n(J)) \geq 1,$$

et comme  $J$  est de rang 1, 0 est valeur propre de  $J$  avec

$$\dim(E_0(J)) = n - 1$$

(par le théorème du rang). Comme

$$\dim(E_n(J)) + \dim(E_0(J)) \geq 1 + (n - 1) = n = \text{taille de } J,$$

on en déduit que  $J$  est diagonalisable (mais vu que  $J$  est symétrique réelle, ce n'est pas surprenant), et surtout que

$$\text{Sp}(J) = \{0, n\},$$

avec donc

$$\dim(E_n(J)) = 1.$$

Par conséquent, il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}JP = \text{diag}(0, \dots, 0, n).$$

Alors

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}P^{-1}I_nP + \frac{1}{2}P^{-1}JP = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}\text{diag}(0, \dots, 0, n) = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right).$$

Donc

$$\text{Sp}(A) = \left\{ \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2} \right\}.$$

- $0 \notin \text{Sp}(A)$ , donc  $A$  est inversible.
- Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ , si  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \vec{0}$ , alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , par bilinéarité du produit scalaire, puis par définition du produit matriciel,

$$0 = \left( x_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x_i, x_j) = (AX)_{i,1}$$

où  $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ . Donc

$$AX = 0_{n,1},$$

et comme  $A$  est inversible,

$$X = A^{-1}0_{n,1} = 0_{n,1},$$

et donc  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Donc la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre.

**Exercice 20.** La matrice  $A$  est symétrique réelle, donc le théorème spectral donne qu'il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que  $P^{-1}AP = P^TAP$  soit diagonale. Notons  $d_i$  le  $i^{\text{ème}}$  coefficient (réel) de  $P^{-1}AP$ , donc

$$D := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix},$$

alors  $d_i$  est une valeur propre de  $A$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix}.$$

1) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que  $A^k = I_n$ , alors

$$D^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP = P^{-1}I_nP = I_n,$$

donc  $d_i^k = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , comme  $d_i$  est réel, si  $k$  est impair,  $d_i = 1$  (et donc  $D = I_n$ , donc  $A = I_n$ ), et si  $k$  est pair,  $d_i \in \{1, -1\}$ , et donc  $d_i^2 = 1$  (et donc  $D^2 = I_n$ ).

Dans les deux cas, on a  $D^2 = I_n$ , donc

$$P^{-1}A^2P = P^{-1}APP^{-1}AP = D^2 = I_n,$$

et en multipliant par  $P$  à gauche,  $P^{-1}$  à droite, il vient

$$A^2 = PI_nP^{-1} = I_n.$$

2) Supposons  $A^k = 0_n$ , alors

$$D^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP = P^{-1}0_nP = 0_n,$$

donc pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $d_i^k = 0$ , soit  $d_i = 0$ . Donc

$$P^{-1}AP = \text{diag}(0, \dots, 0) = 0_n,$$

et donc en multipliant par  $P$  à gauche, et  $P^{-1}$  à droite, il vient

$$A = P0_nP^{-1} = 0_n.$$

**Exercice 21.** 1) Comme  $f$  est linéaire, et par bilinéarité du produit scalaire, on a : pour tout  $(u, v) \in E^2$ ,

$$0 = (u + v, f(u + v)) = (u + v, f(u) + f(v)) = \underbrace{(u, f(u))}_{=0} + (u, f(v)) + \underbrace{(v, f(v))}_{=0} + (v, f(u)),$$

donc

$$(f(u), v) = -(u, f(v)).$$

2a) ★ Soit  $u$  un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors

$$\lambda \underbrace{(u, u)}_{=\|u\|^2} = (\lambda u, u) = (f(u), u) = -(u, f(u)) = -(u, \lambda u) = -\lambda \underbrace{(u, u)}_{=\|u\|^2},$$

donc

$$2\lambda\|u\|^2 = 0,$$

et comme  $u$  est un vecteur propre,  $u \neq \vec{0}$  et donc  $\|u\| \neq 0$ , donc

$$\lambda = 0.$$

★ **Analyse :** si  $f$  était diagonalisable, il existerait une base  $B$  telle que la matrice de  $f$  dans  $B$  serait diagonale, et les coefficients diagonaux seraient des valeurs propres de  $f$ , donc seraient nuls. Donc on aurait

$$\text{Mat}_B(f) = \text{diag}(0, \dots, 0) = 0_n.$$

Or, si la matrice de  $f$  est nulle, c'est que  $f = 0$ .

**Synthèse :** réciproquement, si  $f = 0$ , il vérifie bien la relation « pour tout  $u \in E$ ,  $(f(u), u) = 0$  », et  $f$  est diagonalisable.

**Conclusion :** donc, parmi les endomorphismes étudiés, seul l'endomorphisme nul est diagonalisable.

2b) ★ Pour tout  $(x, y) \in E^2$ , grâce à la question 1 (en posant  $u = f(x)$  et  $v = y$ ), on a

$$(f \circ f(x), y) = -(f(x), f(y)).$$

Puis, toujours grâce à la question 1 (en posant ce coup-ci  $u = x$  et  $v = f(y)$ ), on a

$$-(f(x), f(y)) = (x, f \circ f(y)).$$

Donc, pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a

$$(f \circ f(x), y) = (x, f \circ f(y)).$$

Donc  $f \circ f$  est autoadjoint, donc diagonalisable.

★ Si on prend  $y = x$  dans l'égalité précédente, pour tout  $x \in E$ , on a

$$(f \circ f(x), x) = -(f(x), f(x)) = -\|f(x)\|^2.$$

Or, si  $\lambda \in \text{Sp}(f \circ f)$ , il existe  $x \in E$  non nul avec  $f \circ f(x) = \lambda x$ , et donc

$$(f \circ f(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = \lambda\|x\|^2.$$

Comme  $x \neq \vec{0}$ , on a  $\|x\| \neq 0$ , et donc

$$\lambda = -\frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0.$$

**3) •** Montrons  $\text{Ker}(f) \subset (\text{Im}(f))^\perp$  : soit  $u \in \text{Ker}(f)$  et  $y \in \text{Im}(f)$ , alors il existe  $v \in E$  tel que  $y = f(v)$ , et donc

$$(u, y) = (u, f(v)) = -(f(u), v) = -(\vec{0}, v) = 0$$

(car  $u \in \text{Ker}(f)$ ), soit  $u \perp y$ . Comme c'est vrai pour tout  $y \in \text{Im}(f)$ , on a  $u \in (\text{Im}(f))^\perp$ . Comme c'est vrai pour tout  $u \in \text{Ker}(f)$ , on a

$$\text{Ker}(f) \subset (\text{Im}(f))^\perp.$$

• Par le théorème du rang, on a

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)).$$

Comme  $E$  est un espace euclidien, on a

$$\dim((\text{Im}(f))^\perp) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)),$$

donc

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim((\text{Im}(f))^\perp).$$

• Une inclusion et l'égalité des dimensions donne bien l'égalité :

$$\text{Ker}(f) = (\text{Im}(f))^\perp.$$

**4)** Si on prend une base orthonormée  $B_1$  de  $\text{Ker}(f)$ , et une base orthonormée  $B_2$  de  $\text{Im}(f)$ , grâce à la question 2 et le fait que  $F \oplus F^\perp = E$  pour tout sous espace vectoriel de  $E$  (car  $E$  est euclidien), on a que la réunion  $B = B_1 \sqcup B_2$  est une base de  $E$  (car  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f)^\perp$ ), formée de vecteurs de norme 1 (car tous les vecteurs de  $B_1$  et  $B_2$  le sont), et orthogonale, car si  $(u, v) \in B^2$  avec  $u \neq v$ , quatre cas sont possibles :

- si  $u$  et  $v$  dans  $B_1$ , alors  $u \perp v$  car  $B_1$  orthogonale,
- si  $u$  et  $v$  dans  $B_2$ , alors  $u \perp v$  car  $B_2$  orthogonale,
- si  $u \in B_1$  et  $v \in B_2$ , alors  $u \in \text{Ker}(f) = (\text{Im}(f))^\perp$  et  $v \in \text{Im}(f)$ , donc  $u \perp v$ ,
- si  $v \in B_1$  et  $u \in B_2$ , alors  $v \in \text{Ker}(f) = (\text{Im}(f))^\perp$  et  $u \in \text{Im}(f)$ , donc  $u \perp v$ .

Donc  $B$  convient.

**5a)** Notons  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  et  $B = (e_1, \dots, e_n)$ . Par construction, pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i.$$

Mais, comme la base  $B$  est orthonormée, les coordonnées d'un vecteur s'obtiennent grâce au produit scalaire, et on a donc, pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$$a_{i,j} = (f(e_j), e_i),$$

et donc

$$a_{j,i} = (f(e_i), e_j) = (e_j, f(e_i)).$$

Le résultat de la question 1 donne alors

$$a_{i,j} = -a_{j,i}$$

pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , donc  $A$  est antisymétrique.

**5b)** Soit  $(u, v) \in E^2$ . Notons

$$U = \text{Mat}_B(u) \quad \text{et} \quad V = \text{Mat}_B(v)$$

les matrices-colonnes des coordonnées de  $u$  et  $v$  dans la base  $B$ .

Comme de plus  $A = \text{Mat}_B(f)$ , on a alors

$$AU = \text{Mat}_B(f(u)) \quad \text{et} \quad AV = \text{Mat}_B(f(v)).$$

Alors, comme la base  $B$  est orthonormée, on peut exprimer le produit scalaire à l'aide des matrices coordonnées : on a

$$(f(u), v) = ({}^\top AU)V = U^\top A^\top V.$$

Comme  $A$  est antisymétrique,  $A^\top = -A$ , et donc

$$(f(u), v) = -U^\top(AV) = -(u, f(v)).$$

Si  $u = v$ , on a donc  $(u, f(u)) = -(f(u), u)$ , et donc

$$(u, f(u)) = 0.$$

C'est vrai pour tout  $u \in E$ , donc  $f$  vérifie bien la condition étudiée dans cet exercice.

6) 0 est la seule valeur propre réelle possible de  $f$ , donc 1 et  $-1$  ne le sont pas, donc

$$\text{Id}_E + f \in \mathcal{GL}(E) \quad \text{et} \quad \text{Id}_E - f \in \mathcal{GL}(E).$$

Donc l'endomorphisme

$$v = (\text{Id}_E - f) \circ (\text{Id}_E + f)^{-1}$$

est un isomorphisme, comme composée d'isomorphismes.

Alors

$$v \text{ est une rotation} \Leftrightarrow v \text{ est orthogonale et } \det(v) = 1$$

$$\Leftrightarrow (I_n - M)(I_n + M)^{-1} \text{ est orthogonale et son déterminant vaut } 1$$

(où  $M$  matrice de  $f$  dans une base **orthonormée**, qui vérifie donc  $M^\top = -M$  d'après la question précédente).  
Or,

$$\det(I_n - M) = \det(({}^\top I_n - M)) = \det(I_n + M)$$

(puisque  $M^\top = -M$ ) (et c'est non nul grâce au début de la question), donc  $\det(v) = 1$ . Enfin,

$$\begin{aligned} ((I_n - M)(I_n + M)^{-1})^\top &= ((I_n + M)^{-1})^\top ({}^\top I_n - M) \\ &= (({}^\top I_n + M))^{-1} ({}^\top I_n - M) \\ &= (I_n - M)^{-1} (I_n + M) \\ &= ((I_n + M)^{-1} (I_n - M))^{-1} \end{aligned}$$

(puisque  $M^\top = -M$ ). Pour conclure que  $(I_n - M)(I_n + M)^{-1}$  est orthogonale, il suffit de remarquer que  $(I_n - M)$  et  $(I_n + M)^{-1}$  commutent.

Or, pour  $A$  et  $B$  deux matrices carrées quelconques, si  $AB = BA$ , alors en multipliant par  $A^{-1}$  à gauche et à droite, on a  $BA^{-1} = A^{-1}B$ . Donc, si  $A$  et  $B$  commutent, alors  $A^{-1}$  et  $B$  commutent.

Puis,  $(I_n + M)$  et  $(I_n - M)$  commutent (c'est direct), donc  $(I_n + M)^{-1}$  et  $(I_n - M)$  commutent aussi, ce qui conclut.

**Exercice 22.** 1) Par symétrie du produit scalaire, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ ,

$$a_{i,j} = (u_i, u_j) = (u_j, u_i) = a_{j,i},$$

donc  $A$  est symétrique.

De plus, un produit scalaire est un réel, donc  $A$  est à coefficients réels.

Puis, pour  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ , on a

$$X^\top AX = \sum_{j=1}^p x_j (AX)_j = \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^p a_{i,j} x_i = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p x_i x_j (u_i, u_j) = \left( \sum_{i=1}^p x_i u_i, \sum_{j=1}^p x_j u_j \right) = \left\| \sum_{j=1}^p x_j u_j \right\|^2 \geq 0$$

par bilinéarité du produit scalaire.

Donc  $A \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ .

2) • Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$ , alors  $AX = 0_{p,1}$ , puis

$$0 = X^\top 0_{p,1} = X^\top AX = \left\| \sum_{j=1}^p x_j u_j \right\|^2$$

par le calcul précédent.

Donc

$$\sum_{j=1}^p x_j u_j = \vec{0}.$$

• Réciproquement, soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ . Si

$$\sum_{j=1}^p x_j u_j = \vec{0},$$

alors pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^p x_j (u_j, u_i) = \left( \sum_{j=1}^p x_j u_j, u_i \right) = (\vec{0}, u_i) = 0$$

par linéarité à gauche du produit scalaire. Donc  $AX = 0_{p,1}$ , soit

$$X \in \text{Ker}(A).$$

• Par conséquent,

$$\text{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{R}), \sum_{j=1}^p x_j u_j = \vec{0} \right\}.$$

Et donc

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Ker}(A) = \{0_{p,1}\} \quad \Leftrightarrow \quad \text{la famille } (u_1, \dots, u_p) \text{ est libre.}$$

3) Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ , muni du produit scalaire  $(P, Q) \mapsto (P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ .

Soit, pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $u_i = X^{i-1}$ . Alors pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ ,

$$(u_i, u_j) = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1} dt = \left[ \frac{t^{i+j-1}}{i+j-1} \right]_0^1 = \frac{1}{i+j-1} = H_{i,j},$$

donc la question 1 donne que  $H \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$ , et comme la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre (elle est extraite de la base canonique de  $\mathbb{R}_p[X]$ ), la question 2 donne que la matrice  $H$  est inversible.

Donc  $0 \notin \text{Sp}(H)$ , et comme les valeurs propres de  $H$  sont toutes positives, on en déduit qu'elles sont toutes strictement positives. Donc on a bien  $H \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 23.** En utilisant les règles sur la transposition, on a

$$A = ({}^\top A^\top) = ({}^\top A^2) = (A^\top)^2 = (A^2)^2 = A^4.$$

Comme  $A$  est inversible, on obtient (en multipliant par  $A^{-1}$ ) :

$$I = A^3 = AA^2 = AA^\top,$$

donc  $A$  est orthogonale.

**Exercice 24.** Comme  $E$  est euclidien, la question revient à montrer que

$$\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp.$$

• Soit  $x \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ , alors  $f(x) = x$ , et soit  $y \in \text{Im}(f - \text{Id}_E)$ , alors il existe  $z \in E$  avec  $y = f(z) - z$ . Puis, par bilinéarité du produit scalaire,

$$(x, y) = (x, f(z) - z) = (x, f(z)) - (x, z) = (f(x), f(z)) - (x, z) = 0$$

car  $f$  est une isométrie.

Donc

$$\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp.$$

• Puis, le théorème du rang donne

$$\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f - \text{Id}_E)).$$

Et, comme  $E$  est euclidien,

$$\dim(\text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f - \text{Id}_E)).$$

Par conséquent,

$$\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) = \dim(\text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp).$$

• On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions. On peut alors conclure :

$$\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \text{Im}(f - \text{Id}_E)^\perp.$$

**Exercice 25.**

1. On élève au carré l'égalité  $M^\top = M^2$ , et on obtient

$$M^4 = (M^2)^2 = (M^\top)^2 = (^\top M^2) = {}^t(M^\top) = M.$$

2. • On passe au déterminant dans la relation initiale :

$$\det(M^\top) = \det(M^2) = \det(M)^2,$$

or

$$\det(M^\top) = \det(M), \quad \text{donc} \quad \det(M) = \det(M)^2,$$

donc

$$\det(M) = 0 \quad \text{ou} \quad \det(M) = 1.$$

• On sait que toute matrice admet au moins une valeur propre dans  $\mathbb{C}$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $M$  et  $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$  un vecteur propre associé, donc

$$X \neq 0_{2,1} \quad \text{et} \quad MX = \lambda X.$$

Alors

$$M^2X = M \times MX = M \times \lambda X = \lambda MX = \lambda \cdot \lambda X = \lambda^2 X,$$

et de même,

$$M^3X = MM^2X = M\lambda^2X = \lambda^3X,$$

et enfin

$$M^4X = MM^3X = M\lambda^3X = \lambda^4X.$$

Alors

$$0_{2,1} = 0_2 \times X = (M^4 - M)X = M^4X - MX = \lambda^4X - \lambda X = (\lambda^4 - \lambda)X,$$

donc  $\lambda^4 - \lambda = 0$ , puisque  $X \neq 0_{2,1}$ . Or,

$$\lambda^4 = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \{0, 1, j, j^2\}.$$

On a donc

$$\boxed{\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{0, 1, j, j^2\}}, \quad \text{et} \quad \boxed{\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{0, 1\}}.$$

**Remarque.** Pour  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ , il ne peut sûrement pas y avoir égalité, puisque  $M$  est de taille 2, donc a **au plus** deux valeurs propres distinctes.

3. Si l'on suppose  $M$  inversible : multiplions l'égalité  $M^4 = M$  par  $M^{-1}$ , on a

$$M^3 = I_2.$$

Or

$$M^3 = M^2 \times M = M^{\top} M,$$

donc on a

$$M^{\top} M = I_2,$$

autrement dit,  $M$  est une matrice orthogonale.

Comme de plus  $\det(M) = 1$  (car non nul, puisque  $M$  est supposé inversible), on a bien

$$M \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}).$$

$M$  est donc la matrice d'une rotation d'angle  $\theta$  (à déterminer), soit

$$M = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Faisons un raisonnement par analyse/synthèse :

**Analyse :** supposons que  $M$  soit une telle matrice. Alors<sup>1</sup>

$$M^3 = R(\theta)^3 = R(3\theta)$$

est la matrice d'une rotation d'angle  $3\theta$ , mais comme  $M^3 = I_2$ , on a aussi que c'est une rotation d'angle 0, donc

$$R(3\theta) = R(0),$$

soit

$$3\theta = 0 \quad \text{modulo } 2\pi,$$

donc

$$\boxed{\theta \text{ est un multiple de } \frac{2\pi}{3}}.$$

On obtient alors que

- $M = R(0) = I_2$  (si  $\theta = 0$  modulo  $2\pi$ ), ou
- $M = R\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  (si  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  modulo  $2\pi$ ) ou
- $M = R\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  (si  $\theta = -\frac{2\pi}{3}$  modulo  $2\pi$ ).

**Synthèse :** réciproquement une telle matrice vérifie

$$M^{\top} = M^2.$$

Cela peut se voir par calcul direct, sinon on dit :  $M = R(\theta)$ , donc (par le cours,  $M$  est une matrice orthogonale, et)

$$M^{\top} = M^{-1} = R(-\theta), \quad M^2 = R(2\theta),$$

et l'on a bien

$$-\theta = 2\theta \quad \text{modulo } 2\pi$$

si  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  modulo  $2\pi$ .

**Conclusion :** dans ce cas, on voit que géométriquement, les solutions sont

---

1. On utilise la propriété de cours : pour tout  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ ,  $R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta')$

l'identité, la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  et la rotation d'angle  $\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ .

**Remarque.** Cela ne dépend pas de l'orientation choisie, car un changement d'orientation change le signe de l'angle de la rotation, et ici cela laisse stable l'ensemble des solutions (par contre, ça échange deux solutions).

4. Si  $f$  n'est pas inversible, alors 0 est valeur propre de  $f$  donc de  $M$ . Il existe donc  $U \in M_{2,1}(\mathbb{R})$  avec

$$MU = 0_{2,1} \quad \text{et} \quad U \neq 0_{2,1}.$$

Donc la famille  $(U)$  est libre, et par le théorème de la base incomplète, on peut trouver  $V \in M_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que  $(U, V)$  soit une base de  $M_{2,1}(\mathbb{R})$  (puisque  $\dim(M_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ ). Alors il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$MV = aU + bV$$

(et  $MU = 0 \cdot U + 0 \cdot V$ ). Donc la matrice de l'endomorphisme de  $M_{2,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associé à  $M$

- dans la base  $(U, V)$  est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

- dans la base canonique est  $M$ ,

donc  $M$  est bien semblable à  $T$  dans  $M_2(\mathbb{R})$  (deux matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes sont semblables).

Enfin, on a  $T$  triangulaire, donc ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres, donc

$$b \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(T) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$$

(cette dernière égalité provient du fait que  $M$  est semblable à  $T$  dans  $M_2(\mathbb{R})$ ), donc  $b \in \{0, 1\}$  d'après la question 2.

**Remarque.** Le polynôme caractéristique  $\chi_M$  est de degré deux et admet la racine réelle 0 (car 0 est valeur propre), donc est forcément scindé dans  $\mathbb{R}$  ( $\chi_M = X(X - b)$  où  $b \in \mathbb{R}$ ). Par application du théorème de trigonalisation, on en déduit que  $M$  est semblable à une matrice triangulaire. De plus, cette matrice triangulaire doit avoir 0 et  $b$  sur la diagonale, mais pour répondre à la question, il faut justifier que ce n'est pas  $\begin{pmatrix} b & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , et ça demande un peu plus de travail...

5. Si  $b = 0$ , alors

$$T^2 = 0_2.$$

Or, il existe  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  avec

$$M = PTP^{-1}$$

(car  $M$  et  $T$  sont semblables), donc

$$M^2 = PT^2P^{-1} = P0_2P^{-1} = 0_2,$$

donc

$$M^\top = M^2 = 0_2, \quad \text{soit} \quad M = 0_2,$$

donc  $f = 0$  (l'endomorphisme nul).

6. Si  $b = 1$ , alors  $f$  admet deux valeurs propres distinctes (0 et 1), et  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ , donc  $f$  est diagonalisable et

$$\dim(E_0) = \dim(E_1) = 1.$$

Donc  $M$  est semblable à la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

par conséquent il existe  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  avec

$$M = PDP^{-1}.$$

Alors,

$$M^2 = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = M$$

(car  $D^2 = D$ ), donc

$$f^2 = f,$$

autrement dit,  $f$  est un projecteur.

Enfin, on a alors

$$M^\top = M^2 = M,$$

donc  $M$  est symétrique. Comme  $M$  est la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , et que la base canonique est orthonormée, on en déduit que  $f$  est autoadjoint.

$f$  est donc un projecteur autoadjoint, autrement dit,

$$\boxed{f \text{ est un projecteur orthogonal}}$$

(différent de Id et de l'endomorphisme nul, qui n'ont qu'une seule valeur propre).

**Remarque.** Réciproquement, si  $f$  est un projecteur différent de Id et de l'endomorphisme nul, il admet 0 et 1 comme valeurs propres, il n'est donc pas inversible, et si de plus c'est un projecteur orthogonal, il est autoadjoint, et donc sa matrice  $M$  dans la base canonique est symétrique (car la base canonique est orthonormée), ce qui donne bien

$$M^\top = M = M^2.$$

**Exercice 26. 1) •** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $(x, a) \in \mathbb{R}$  et  $(x, b) \in \mathbb{R}$ , donc  $u(x)$  est une combinaison linéaire de  $a$  et  $b$ . Comme  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbb{R}^3$ , et que  $\mathbb{R}^3$  est stable par combinaison linéaire, on a alors  $u(x) \in \mathbb{R}^3$ . Puis, le produit scalaire est linéaire à gauche, donc : pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} u(\lambda x + y) &= (\lambda x + y, a)b + (\lambda x + y, b)a \\ &= (\lambda(x, a) + (y, a))b + (\lambda(x, b) + (y, b))a \\ &= \lambda((x, a)b + (x, b)a) + (y, a)b + (y, b)a \\ &= \lambda u(x) + u(y) \end{aligned}$$

donc  $u$  est linéaire.

Donc  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

• Soit  $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$ . Par linéarité à gauche du produit scalaire, on a :

$$(u(y), x) = ((y, a)b + (y, b)a, x) = (y, a)(b, x) + (y, b)(a, x),$$

et

$$(u(x), y) = ((x, a)b + (x, b)a, y) = (x, a)(b, y) + (x, b)(a, y).$$

La symétrie du produit scalaire permet alors bien de conclure :

$$(u(y), x) = (u(x), y).$$

Donc  $u$  est autoadjoint.

• On peut en déduire que l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable, et même qu'il existe une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres de  $u$  (théorème spectral).

**2) •** On a  $(a, b)$  libre, donc

$$x \in \text{Ker}(u) \quad \Leftrightarrow \quad (x, a)b + (x, b)a = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x, a) = 0 \\ (x, b) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \text{Vect}(a, b)^\perp.$$

Donc

$$\boxed{\text{Ker}(u) = \text{Vect}(a, b)^\perp}.$$

- De manière directe,  $\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(a, b)$ . Puis, le théorème du rang donne

$$\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Vect}(a, b)^\perp).$$

Mais  $\mathbb{R}^3$  est euclidien, donc

$$\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Vect}(a, b)^\perp) = \dim(\text{Vect}(a, b)).$$

On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions, on peut conclure :

$$\boxed{\text{Im}(u) = \text{Vect}(a, b)}.$$

- On a  $a \in \text{Vect}(a, b) = \text{Im}(u)$ . Si  $u$  est un projecteur, alors  $a = u(a)$ , soit

$$a = (a, a) b + (a, b) a$$

ou encore  $(a, a) = 0$  et  $(a, b) = 1$  par liberté de  $(a, b)$ . Mais  $a \neq \vec{0}$  (car  $(a, b)$  est libre), donc  $(a, a) \neq 0$ , contradiction. Donc  $u$  n'est pas un projecteur.