Théorie des jeux

ITC PC

M. Charles

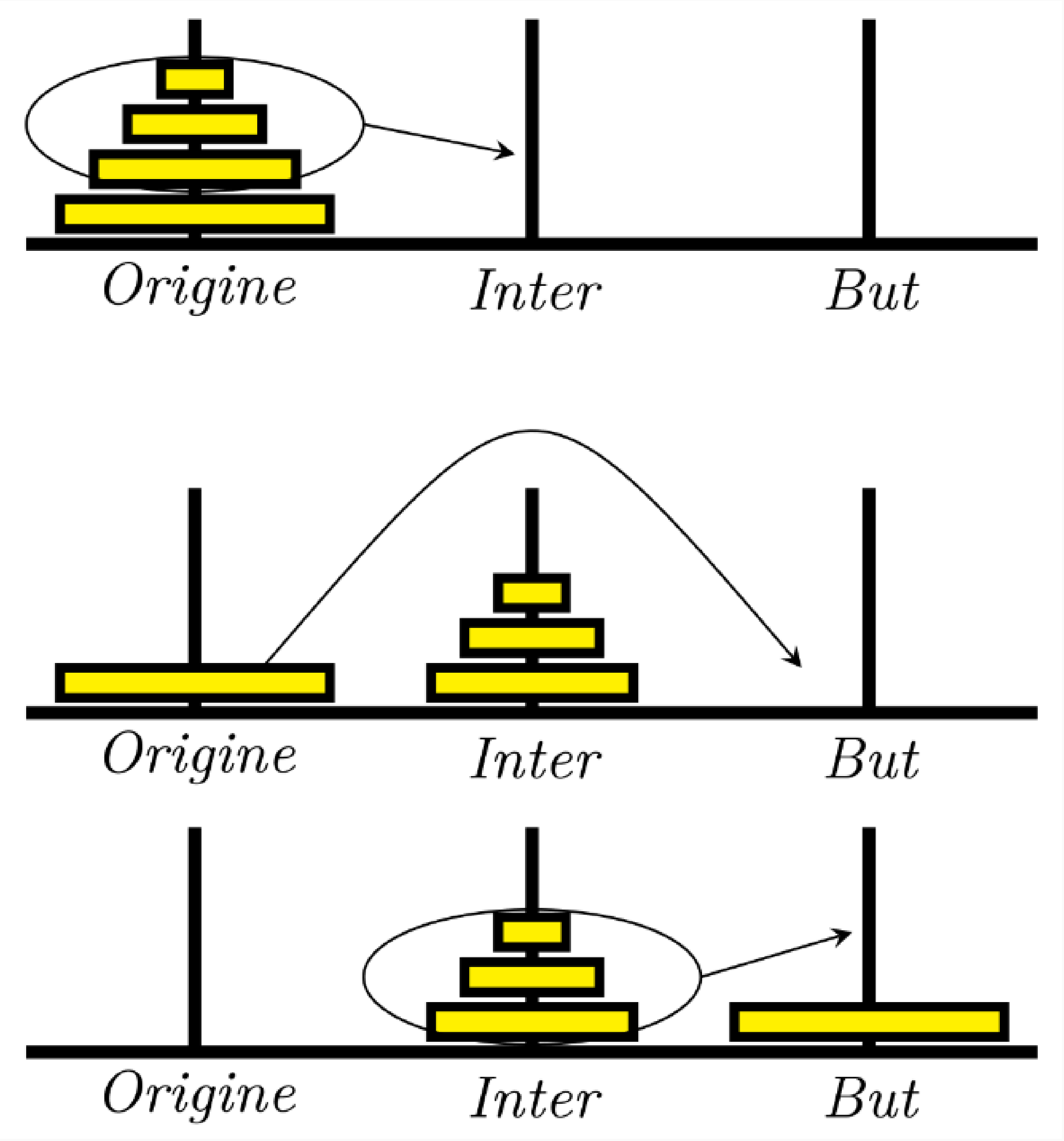
Encore un peu de Python

Les tours de Hanoï sont un jeu inspiré par une fausse légende, créée par le mathématicien français Édouard Lucas. Dans le temple de Bénarès, au centre du monde, se trouvaient trois poteaux en diamant sur une base en cuivre.

Pendant la Création, Dieu mit 64 disques en or sur un de ces poteaux, empilés de grand en petit. Ceci est la tour de Brahma. Suivant les lois de Brahma, les prêtres transféraient les disques un par un à l'un des autres poteaux, le disque que l'on transfère ne pouvant pas être placé sur un disque plus petit.

Quand la tour aura été transférée d'un poteau à un autre, tout tombera en poussière et le monde disparaîtra dans un coup de foudre.

Exercice : Écrire une fonction récursive `Hanoï(n: int) -> int` qui donne le nombre d'opérations nécessaires pour transférer n disques d'un poteau à un autre.


Origine
Inter
But
Origine
Inter
But
Origine
Inter
But

```python
def Hanoï(n: int) -> int:
    if n == 0:
        return 0
    elif n == 1:
        return 1
    else:
        return Hanoï(n-1) + 1 + Hanoï(n-1)
```

Bonus : Comment adapter la fonction suivante pour avoir la liste des opérations nécessaires ?

```python
def Hanoï(n:int, origine = 1, inter = 2, but = 3) -> list:
    if n == 0:
        return []
    elif n == 1:
        return [(origine, but)]
    else:
        return Hanoï(n-1, origine, but, inter)
            + [(origine, but)]
            + Hanoï(n-1, inter, origine, but)
```

Jeux

Qu'est-ce qu'un jeu au sens général ?

« Interaction stratégique entre agents rationnels. » (Wikipedia)

Domaines intéressés, entre autres, et un peu chronologiquement :

- économie (Nash : thèse 1950, Nobel 1994), finance
- éthologie, biologie de l'évolution
- sciences politiques, géostratégie (1962, crise des missiles de Cuba)
- IA

On va se limiter aux jeux :

- à information complète ;
- séquentiels (au tour par tour) ;
- à deux joueurs.

Exemples : ...

Contre-exemples : ...

Modélisation

Jeux modélisables par un graphe

On va considérer les jeux pouvant être modélisés par un graphe (orienté) fini :

- les sommets sont les **positions** du jeu ;
- les arêtes sont les **demi-coups** légaux.

Synonyme de position : **état**.

Graphes pour le morpion :

- premiers états
- graphe en entier à 5478 états

(source : Wolfram)

Graphes pour le morpion :

- premiers états
- graphe en entier à 5478 états

(source : Wolfram)

Pour le jeu d'échecs :

- de l'ordre de 10^{40} positions légales
- estimations de Fermi : combien de secondes dans une vie humaine ? combien d'opérations pouvant être effectuées par un ordinateur ?

Règles d'une variante d'un jeu de Nim :

- il y a 21 allumettes ;
- deux joueurs s'affrontent, retirant chacun leur tour entre 1 et 4 allumettes ;
- celui qui prend la dernière allumette a perdu.

Construisez le graphe des premiers états de ce jeu.

Les jeux considérés seront supposés modélisables par un graphe **biparti**, chaque partie correspondant à l'ensemble des positions contrôlées par l'un des deux joueurs.

États finaux

Un **état final** est une position dans laquelle on ne peut jouer aucun coup légal.

Exemples :

- morpion
- échecs

Statut des états finaux

On considère que les états finaux se divisent en trois catégories :

- ceux gagnants pour le joueur J_1 et perdants pour le joueur J_2 ;
- ceux perdants pour le joueur J_1 et gagnants pour le joueur J_2 ;
- ceux correspondant à un état de match nul.

Exemples :

- morpion
- échecs

Attracteurs

Positions gagnantes et perdantes en n demi-coups

- G_0 : ensemble des positions **finales** gagnantes ;
  P_0 : ensemble des positions **finales** perdantes.
- Une position est dans G_n si elle est déjà dans G_{n-1} ou si, depuis cette position, **il existe** un demi-coup amenant l'adversaire dans une position dans P_{n-1}.
- Une position est dans P_n si elle est déjà dans P_{n-1} ou si, depuis cette position, **tous** les demi-coups amènent l'adversaire dans une position dans G_{n-1}.

Question : Pourquoi une telle asymétrie dans la définition ?

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$$

$$P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

Ces deux ensembles sont appelés *attracteurs*.

Remarques :

- $G \cup P$ ne couvre pas nécessairement toutes les positions. Il ne faut pas oublier les cas d'issues nulles.
- il existe plusieurs façons de définir une position (non finale) nulle (position où l'on peut tenir la nulle, position où la nulle est inévitable).

Cartographie des positions

- Diagrammes de Venn
- Arbres

Exemple du jeu de morpion.

Calcul pratique des attracteurs

En pratique, on peut envisager de calculer les attracteurs

- récursivement,
- avec mémoïsation.

Calcul pratique des attracteurs

En pratique, on peut envisager de calculer les attracteurs

- récursivement,
- avec mémoïsation.

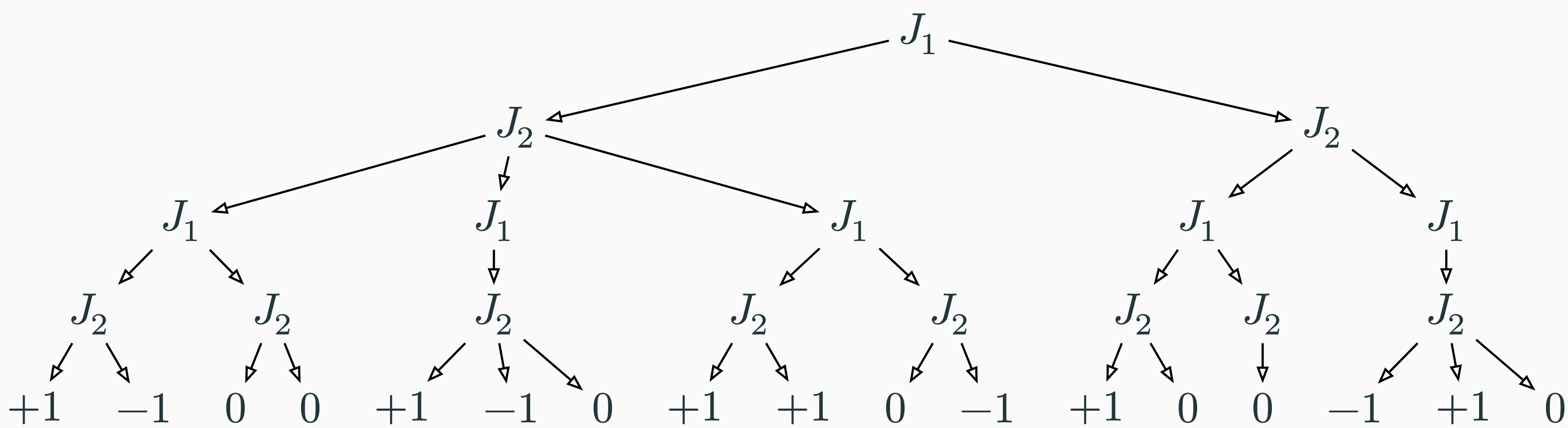
Faisabilité ?

- Échecs
- Morpion

Voici le graphe d'un jeu.

On désigne **arbitrairement** par $+1$ une position gagnante pour J_1, par 0 une position nulle, et par -1 une position gagnante pour J_2.

Valeur des positions non finales ?



Remarque sur les jeux résolus

Un *jeu résolu* est un jeu dont on sait déterminer le statut (gagnante, perdante ou nulle) de chaque position.

Exemples de jeux résolus :

- morpion : la position initiale est nulle ;
- hexapawn 3×3 (Gardner) : la position initiale est gagnante pour les noirs ;
- mini-échecs 5×5 (Gardner aussi) : la pos. initiale est nulle (Mhalla et Prost (Grenoble) 2013, https://arxiv.org/abs/1307.7118) ;
- qui perd gagne : la position initiale est gagnante pour les blancs sur 1.e3 (Watkins 2016) ; les noirs ont un gain forcé sur 13 des 20 premiers coups des blancs.

Stratégies

Notion de stratégie

Une **stratégie** (sans mémoire) est une **fonction de choix** prenant en argument une position et renvoyant un coup à jouer.

Notion de stratégie gagnante

Une stratégie **gagnante** est une fonction de choix f telle que, si p est une position gagnante, alors le coup $f(p)$ amène l'adversaire à une position perdante.

Construction naïve d'une stratégie gagnante

La construction d'une stratégie est triviale si l'on a entièrement calculé les attracteurs : si $p \in G$, on prend pour $f(p)$ n'importe quel coup amenant l'adversaire dans P.

Exercice

On reprend le jeu-exemple précédent.

On désigne **arbitrairement** par $+1$ une position gagnante pour J_1, par 0 une position nulle, et par -1 une position gagnante pour J_2.

Identifier les stratégies gagnantes pour les deux joueurs.