

DS 2 - NORMES, SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS, ALGÈBRE

Samedi 18/10/2025 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Exercice 1 - ITC - E3A PC 2017 Maths 1 (exercice 4)

On dit qu'un entier naturel n est premier si, et seulement si, il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. 0 et 1 ne sont donc pas des nombres premiers. Par contre, 3 est un nombre premier puisque l'ensemble de ses diviseurs est exactement $\{1, 3\}$.

Toutes les fonctions demandées ci-après seront à réaliser dans le langage Python. On pourra au fil des questions utiliser les fonctions construites dans les questions précédentes.

1. Écrire une fonction `divise(p,q)` d'arguments deux entiers naturels non nuls p et q , renvoyant `True` si p divise q et `False` sinon.
2. Écrire une fonction `estpremier(p)` d'argument un entier naturel p , renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon.
3. Écrire une fonction `phi(p)` d'argument un entier naturel p , renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p .
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\varphi(n)$ le nombre d'entiers inférieurs ou égaux à n .

Pour la suite de cet exercice, on admettra le résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers :

$$\varphi(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\Theta(n) = \left| \frac{\varphi(n) \ln(n)}{n} - 1 \right|$.

- (a) Rappeler la définition de deux suites équivalentes (les suites envisagées seront supposées n'avoir aucun terme nul).
- (b) Prouver que le théorème des nombres premiers implique qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- (c) Écrire une fonction `test(epsilon)` d'argument réel `epsilon` strictement positif, renvoyant le premier entier naturel $N \geq 50$ tel que $\Theta(N) \leq \epsilon$.
- (d) Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $\llbracket 50, 5000 \rrbracket$.

Exercice 2 - E3A PC 2017 Maths 1 (exercice 1)

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a du sens.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\llbracket 1, +\infty \rrbracket$ par :

$$\forall x \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket, f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de ζ .
2. Soit $a \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$. Montrer que la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a, +\infty]$. Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1, +\infty[, f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.
- (b) Montrer que la fonction ζ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1, +\infty[$ sous forme d'une série.

Indication : on pourra montrer que ζ est \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. Préciser le sens de variation de ζ .

5. On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$.

- (a) Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.
- (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \geq 2, 1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
- (c) En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$.

6. On considère à présent $h \in]0, +\infty[$.

À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.

7. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ .

8. On pose $\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

- (a) Justifier que F est bien définie.
- (b) Montrer que F est continue sur \mathbb{R}_+ .
- (c) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[, \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.
- (d) Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.

Exercice 3 - CCINP PC 2002 Maths 1 (extrait adapté de la partie 2)

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et N une norme quelconque sur \mathbb{C}^n . On pose :

$$M_A = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

On pose aussi N_∞ la norme infinie sur \mathbb{C}^n définie par :

$$\forall X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n, N_\infty(X) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

On identifiera \mathbb{C}^n et $M_{n,1}(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que l'on considerera que $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ représentent le même objet. Ainsi N_∞ définit également une norme sur l'ensemble des matrices colonnes.

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, on note également $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A)$ défini par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|.$$

Enfin, on qualifie de norme matricielle toute norme φ définie sur $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant la propriété :

$$\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2, \varphi(AB) \leq \varphi(A)\varphi(B).$$

1. (a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n : N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$.
- (b) Montrer qu'il existe une constante C_A telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq C_A N(X).$$

(c) Montrer que l'ensemble $\left\{ \frac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ possède une borne supérieure dans \mathbb{R} .

On notera dans la suite :

$$\tilde{N}(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}.$$

(d) Montrer que $\widetilde{N}_\infty(A) \leq M_A$.

(e) On pose : $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur X_0 de \mathbb{C}^3 tel que $N_\infty(X_0) = 1$ et $N_\infty(GX_0) = 10$. En déduire la valeur de $\widetilde{N}_\infty(A)$.

2. Soit i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = M_A$. En considérant le vecteur Y de \mathbb{C}^n de composantes y_j définies par :

$$y_j = \begin{cases} \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} & \text{si } a_{i_0,j} \neq 0 \\ 1 & \text{si } a_{i_0,j} = 0 \end{cases}$$

montrer que $M_A \leq \widetilde{N}_\infty(A)$ et en déduire que $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A$.

3. Montrer que :

(a) $\tilde{N}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$.
 (b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \tilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \tilde{N}(A)$.
 (c) En déduire : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \tilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \tilde{N}(A)$.
 (d) $\forall B \in M_n(\mathbb{C}), \tilde{N}(A + B) \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$.
 (e) $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq \tilde{N}(A)N(X)$.

(f) Déduire de ces résultats que \tilde{N} est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$. On lui donne le nom de norme matricielle subordonnée à la norme N .

4. (a) En considérant une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, montrer que :

$$\rho(A) \leq \tilde{N}(A).$$

(b) Donner un exemple simple de matrice A non nulle vérifiant $\rho(A) = \widetilde{N}_\infty(A)$.

(c) Montrer que si A est nilpotente non nulle, on a l'égalité stricte :

$$\rho(A) < \tilde{N}(A).$$

Indication : on pourra montrer que si A est nilpotente, alors $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

5. Montrer que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$ alors $\rho(A) < 1$.

Dans la suite du problème, on admettra que, réciproquement, si $\rho(A) < 1$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$.

6. (a) Montrer que pour tout k entier naturel non nul : $\rho(A) \leq \left[\tilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}}$.

(b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)$.

(c) Soit $\epsilon > 0$ et $A_\epsilon = \frac{A}{\rho(A)+\epsilon}$. Vérifier que $\rho(A_\epsilon) < 1$ et en déduire l'existence d'un entier naturel k_ϵ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(k \geq k_\epsilon \Rightarrow \tilde{N}(A^k) \leq (\rho(A) + \epsilon)^k \right).$$

(d) En déduire que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\tilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Exercice 4 - Centrale-Supélec PC 2014 Maths 2 (extrait adapté de la partie 2)

Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on désigne par $M(a, b)$ la matrice carrée complexe $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

Une matrice de la forme $M(a, b)$ sera appelée *quaternion*. On considérera en particulier les quaternions $e = I_2 = M(1, 0)$, $I = M(0, 1)$, $J = M(i, 0)$, $K = M(0, -i)$ et on notera $\mathbb{H} = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$ le sous-ensemble de $M_2(\mathbb{C})$ constitué par tous les quaternions.

On veillera à ne pas confondre la matrice $I = M(0, 1)$ et la matrice unité $I_2 = e = M(1, 0)$.

Partie I - Le « corps » des quaternions

On note $\mathcal{C} = M_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices complexes à deux lignes et deux colonnes.

1. (a) Donner sans justification une base et la dimension de \mathcal{C} en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel.
 (b) Montrer que \mathbb{H} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{C} et que $\{e, I, J, K\}$ en est une base sur le corps \mathbb{R} .
 (c) Montrer que \mathbb{H} est stable par multiplication.
2. (a) Vérifier que toute matrice de \mathbb{H} non nulle est inversible.
 (b) Montrer que $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ est stable par passage à l'inverse.

\mathbb{H} a toutes les propriétés d'un corps (comme \mathbb{R} ou \mathbb{C}) **sauf** la commutativité pour la multiplication. On dit que c'est un *anneau à divisions* (ou parfois un *corps non-commutatif*).

3. (a) Calculer les produits deux à deux des matrices e, I, J, K . On présentera les résultats dans un tableau à double entrée.
 (b) On appelle *H-système* de matrices de taille n toute famille finie (A_1, \dots, A_p) de matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, A_i^2 = I_n, \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2 \text{ tel que } i \neq j, A_i A_j + A_j A_i = 0. \end{cases}$$

Montrer que (iI, iJ, iK) est un *H-système*.

Partie II - Conjugaison et normes

Ainsi tout élément $q \in \mathbb{H}$ s'écrit de manière unique $q = xe + yI + zJ + tK$ avec $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Pour $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ et $q = xe + yI + zJ + tK$, on pose $q^* = xe - yI - zJ - tK \in \mathbb{H}$ et $N(q) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \in \mathbb{R}_+$.

4. Vérifier que $q \mapsto \sqrt{N(q)}$ est une norme sur \mathbb{H} .
5. (a) Vérifier que, pour tout $q \in \mathbb{H}$, q^* est la transposée de la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de q .
 (b) En déduire que pour tout $(q, r) \in \mathbb{H}^2$, $(qr)^* = r^*q^*$.
 (c) Montrer que $q^{**} = q$ pour tout $q \in \mathbb{H}$ et que $q \mapsto q^*$ est un automorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{H} .
 (d) Pour $q \in \mathbb{H}$, exprimer qq^* à l'aide de $N(q)$. En déduire la relation valable pour tout $(q, r) \in \mathbb{H}^2$:

$$N(qr) = N(q)N(r).$$

6. (a) Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $q = xe + yI + zJ + tK$. Exprimer la trace de la matrice $q \in M_2(\mathbb{C})$ en fonction du réel x .
 (b) En déduire que, pour tout $(q, r) \in \mathbb{H}^2$, $qr - rq = q^*r^* - r^*q^*$.
 (c) Soient a, b, c et d des quaternions. Établir la relation $(acb^*)d + d^*(acb^*)^* = (acb^*)^*d^* + d(acb^*)$.
 En déduire l'identité $(N(a) + N(b))(N(c) + N(d)) = N(ac - d^*b) + N(bc^* + da)$.