

CORRECTION DS 2 - NORMES, SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS, ALGÈBRE

Exercice 1 - ITC - E3A PC 2017 Maths 1 (exercice 4)

1. p divise q si et seulement le reste de la division euclidienne de q par p donne 0. On peut donc écrire :

```
1 def divise(p,q):
    return (q % p) == 0
```

- 2.

```
1 def estpremier(p):
    for k in range(2,p):
        if divise(k,p):
            return False
5 return True
```

- 3.

```
1 def phi(p):
    nb = 0
    for k in range(p+1):
        if estpremier(k):
5         nb += 1
    return nb
```

4. (a) Soit (u_n) et (v_n) n'ayant aucun terme nul. On a :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

- (b) Si le nombre de nombres premiers est fini, alors on peut poser p le plus grand nombre premier. Et en conséquence, φ sera constante à partir de $n \geq p$. En particulier :

$$\varphi(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} N \in \mathbb{N}$$

où N est la constante en question (et également le nombre total de nombres premiers).

Or d'après le théorème des nombres premiers $\varphi(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$. Par croissance comparée, on a $\frac{n}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc :

$$\varphi(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc il y a un nombre infini de nombres premiers.

- (c)

```
1 import math
def theta(n):
    return abs(phi(n)*math.log(n)/n - 1)

5 def test(epsilon):
    N = 50
    while theta(N) > epsilon:
        N += 1
    return N
```

- (d) **Remarque :** les tracés de graphes sont au programme de première année. Comme vous pouvez le voir, certains sujets posent la question de but en blanc.

```

1 import numpy as np
  import matplotlib.pyplot as plt

X = np.arange(50, 5001)
5 Y = np.zeros(5001-50)
  for i in range(0, 5001-50):
      Y[i] = theta(X[i])
  plt.plot(X, Y)
  plt.show()

```

Exercice 2 - E3A PC 2017 Maths 1 (exercice 1)

- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $x > 1$. Ainsi ζ est définie sur $]1, +\infty[$. Cela prouve en fait la convergence simple de la série des $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $]1, +\infty[$.
- Soit $a \in]1, +\infty[$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, +\infty[$:

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$$

par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{n^x}$. Par définition de la borne supérieure, on a donc :

$$\|f_n\|_{+\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{n^a}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ est une série de Riemann convergente (car $a > 1$). Donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{+\infty, [a, +\infty[}$ converge également.

Ainsi $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et donc uniformément sur le même intervalle.

Comme tous les f_n sont continues sur $[a, +\infty[$, ζ est également continue sur $[a, +\infty[$.

Par caractère local de la continuité, puisque ce résultat est valable pour tout $a > 1$, on en déduit que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

- (a) f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} = n^{-x} = \exp(-x \ln(n)).$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_n^{(k)}(x) = (-\ln(n))^k \exp(-x \ln(n)) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$

- (b) Soit $a > 1$. Commençons par montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, +\infty[$:

$$|f_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln(n))^k}{n^x} \leq \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$$

par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{n^x}$. Par définition de la borne supérieure, on a donc :

$$\|f_n^{(k)}\|_{+\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{(\ln(n))^k}{n^a}.$$

Posons $b = \frac{1+a}{2}$. On a :

$$n^b \times \frac{(\ln(n))^k}{n^a} = n^{b-a}(\ln(n))^k = n^{\frac{1-a}{2}}(\ln(n))^k.$$

Comme $a > 1$, on a $\frac{1-a}{2} < 0$ et donc par croissance comparée :

$$n^b \times \frac{(\ln(n))^k}{n^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc :

$$\frac{(\ln(n))^k}{n^a} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^b} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^b}$ est une série de Riemann convergente (car $b > 1$). Par critère de négligeabilité (appliqué à des séries à termes positifs), on a donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$ qui converge.

Puis par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n \geq 1} \|f_n^{(k)}\|_{+\infty, [a, +\infty[}$ converge, c'est-à-dire que $\boxed{\sum f_n^{(k)} \text{ converge normalement sur } [a, +\infty[}$.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$. On a :

- f_n est $\mathcal{C}^k$ sur $[a, +\infty[$;
- pour tout $i < k$, $\sum_{n \geq 1} f_n^{(i)}$ converge simplement sur $[a, +\infty[$ (puisque la série converge normalement);
- pour $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ (puisque la série converge normalement).

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ est $\mathcal{C}^k$. De plus pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a :

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$

Remarquons que la formule s'applique même pour $k = 0$.

Puis comme le résultat est prouvé pour tout $a > 1$, par caractère local de la dérivabilité (et de la continuité), ζ est en fait $\mathcal{C}^k$ sur $]1, +\infty[$ et la même expression s'applique.

Comme c'est valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\boxed{\zeta \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]1, +\infty[}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]1, +\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$

4. On a donc pour tout $x > 1$:

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^1}{n^x} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} < 0.$$

$\boxed{\text{Donc } \zeta \text{ est strictement décroissante sur }]1, +\infty[}$.

5. (a) ζ est décroissante d'après la question précédente. Elle est aussi positive (comme somme de termes positifs). Elle est donc minorée.

D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\zeta \text{ admet une limite finie (et même positive ou nulle) en } +\infty}$.

(b) Pour tout $x > 1$, on a :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}_{\geq 0} \geq 1.$$

Et donc c'est vrai en particulier pour $x \geq 2$. De plus, pour $x \geq 2$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Comme $x \geq 2$, on a $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2}$. Comme les séries convergent, on a :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

D'où :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

- (c) **Remarque :** la question est étonnamment posée étant donnée qu'on a le théorème d'inversion série-limite. Mais bon, essayons de nous adapter au sujet. L'idée est que la majoration qu'on a est composé de deux termes : le premier dépend de x mais est une somme finie, on peut donc en prendre la limite. Le second ne dépend pas de x , mais on peut le rendre arbitrairement petit en choisissant N suffisamment grand. Rendons cela plus précis.

Soit $\epsilon > 0$. On a montré que la limite de ζ existe. Notons-la ℓ . Montrons que l'on a $1 \leq \ell \leq 1 + \epsilon$.

Puisque $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, le reste de la série tend vers 0. Donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Fixons désormais ce N . On a alors :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{k=2}^N \underbrace{\frac{1}{n^x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

car c'est une somme finie. Donc il existe $A > 1$ tel que pour tout $x > A$:

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{n^x} \leq 1 + \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi pour tout $x > A$, on a :

$$1 \leq \zeta(x) \leq 1 + \epsilon.$$

Par passage à la limite $x \rightarrow +\infty$, on a :

$$1 \leq \ell \leq 1 + \epsilon.$$

Mais ce résultat est valable pour tout $\epsilon > 0$. Donc nécessairement $\ell = 1$ c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

6. Pour $h \in]0, +\infty[$, on a :

$$\zeta(1+h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+h}}.$$

Posons donc : $f : t \mapsto \frac{1}{t^{1+h}}$. Cette fonction est décroissante. Ainsi pour $t \in [n, n+1]$, on a :

$$\frac{1}{n^{1+h}} \geq \frac{1}{t^{1+h}} \geq \frac{1}{(n+1)^{1+h}}.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[n, n+1]$, on obtient alors :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n^{1+h}} dt \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^{1+h}} dt \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^{1+h}} dt$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n^{1+h}} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^{1+h}} dt \geq \frac{1}{(n+1)^{1+h}}.$$

En réorganisant les inégalités, on obtient :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^{1+h}} dt \leq \frac{1}{n^{1+h}} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^{1+h}} dt.$$

Puis par croissance de la somme, en fixant $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{t^{1+h}} dt \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^{1+h}} \leq \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n \frac{1}{t^{1+h}} dt.$$

Cela donne encore par relation de Chasles :

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^{1+h}} dt \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^{1+h}} \leq \int_1^N \frac{1}{t^{1+h}} dt$$

et en rajoutant le terme en $n = 1$ manquant :

$$1 + \int_2^{N+1} \frac{1}{t^{1+h}} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1+h}} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{t^{1+h}} dt.$$

Comme $h > 0$, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^{1+h}}$ est donnée par $t \mapsto -\frac{1}{ht^h}$. On calcule :

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^{1+h}} dt = \left[-\frac{1}{ht^h} \right]_2^{N+1} = \frac{1}{h2^h} - \frac{1}{h(N+1)^h}$$

et de même :

$$\int_1^N \frac{1}{t^{1+h}} dt = \frac{1}{h} - \frac{1}{hN^h}.$$

Donc :

$$1 + \frac{1}{h2^h} - \frac{1}{h(N+1)^h} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1+h}} \leq 1 + \frac{1}{h} - \frac{1}{hN^h}.$$

On prend alors la limite quand $N \rightarrow +\infty$ (tout converge), et à la limite, on a :

$$1 + \frac{1}{h2^h} \leq \zeta(1+h) \leq 1 + \frac{1}{h}.$$

On conjecture alors qu'un équivalent de $\zeta(1+h)$ pour $h \rightarrow 0$ est donné par $\frac{1}{h}$. Montrons-le. On a en multipliant l'inégalité précédente par $h > 0$:

$$\underbrace{h + \frac{1}{2^h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} \leq h\zeta(1+h) \leq \underbrace{h + 1}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1}.$$

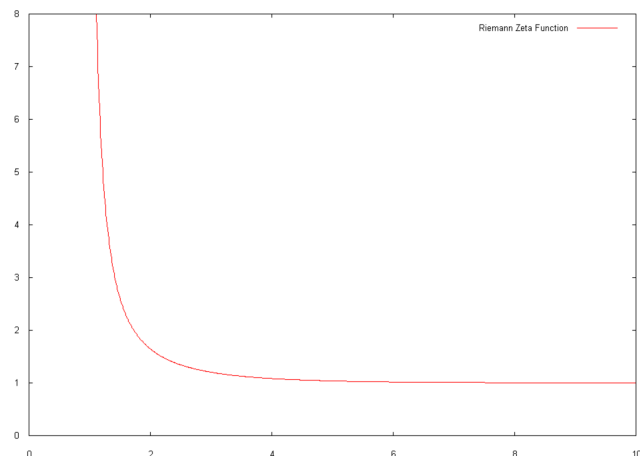
Par encadrement, on a donc $h\zeta(1+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$ que l'on peut aussi écrire :

$$\zeta(1+h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{h}$$

c'est-à-dire en repassant aux variables de l'énoncé :

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

7. On trouve l'allure suivante :



8. (a) Soit $x \in]0, +\infty[$. Si $x > 1$, d'après l'étude qui précède $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge absolument. Mais un tel raisonnement ne fonctionne pas pour $x \in]0, 1[$.

En revanche, quel que soit $x \in]0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème spécial des séries alternées. En effet :

- $\left(\frac{1}{n^x}\right)_n$ est une suite décroissante ;
- $\frac{1}{n^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
- $\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)_n$ est de signe alterné.

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge.

Et donc F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

- (b) Pour la même raison que précédemment, on ne peut pas espérer avoir la convergence normale (qui impliquerait la convergence absolue en tout point). On va donc devoir revenir à la convergence uniforme.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Essayons de majorer $\left|\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^x} - F(x)\right|$ c'est-à-dire $|R_N(x)|$ où $R_N(x)$ désigne le reste de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

Comme la série est alternée, d'après le théorème spécial des séries alternées, on peut obtenir une majoration du reste. On a pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout $N \geq 1$:

$$|R_N(x)| \leq \underbrace{\left| \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)^x} \right|}_{= \frac{1}{(N+1)^x}}.$$

On ne peut pas facilement enlever le x . Passons donc sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. On a donc pour tout $x \in [a, +\infty[$ et pour tout $N \geq 1$:

$$|R_N(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$$

et donc par définition de la borne supérieure :

$$\|R_N\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Or $\frac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc par encadrement :

$$\|R_N\|_{\infty, [a, +\infty[} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc la série de fonctions converge uniformément sur $[a, +\infty[$. Comme les fonctions $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ sont continues sur $[a, +\infty[$, la fonction somme F est également continue sur $[a, +\infty[$.

Puis par caractère local de la continuité, puisque le résultat précédent est valable pour tout $a > 0$, on a F continue sur $]0, +\infty[$.

(c) Soit $x \in]1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\zeta(x) + F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} + \frac{(-1)^n}{n^x} \right) \\ &\quad \text{(la somme converge comme somme de séries convergentes)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^x}.\end{aligned}$$

Or lorsque n est impair, on a $1 + (-1)^n = 1 + (-1) = 0$. Donc la somme ne contient que les termes paires. On peut donc écrire :

$$\zeta(x) + F(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{2j}}{(2j)^x} = \frac{2}{2^x} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^x} = 2^{1-x} \zeta(x).$$

(d) On en déduit que pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$F(x) = 2^{1-x} \zeta(x) - \zeta(x) = \underbrace{(2^{1-x} - 1)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \zeta(x).$$

On sait que $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Donc par produit de limites :

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1.$$

Exercice 3 - CCINP PC 2002 Maths 1 (extrait adapté de la partie 2)

1. (a) Soit $X \in \mathbb{C}^n$. On notera X_i ses composantes.

Pour majorer la norme infinie, majorons toutes les composantes. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned}|(AX)_i| &= \left| \sum_{k=1}^n A_{ik} X_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |A_{ik} X_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |A_{ik}| \underbrace{|X_k|}_{\leq N_\infty(X)} \\ &\leq N_\infty(X) \underbrace{\sum_{k=1}^n |A_{ik}|}_{\leq M_A} \\ &\leq M_A N_\infty(X).\end{aligned}$$

Donc par définition de la borne supérieure :

$$N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X).$$

(b) $\mathbb{C}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie. Donc toutes les normes sur $\mathbb{C}^n$ sont équivalentes.

En particulier, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ (on peut toujours supposer α, β non nuls) tels que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$:

$$N_\infty(X) \leq \alpha N(X) \quad \text{et} \quad N(X) \leq \beta N_\infty(X).$$

On a donc pour tout $X \in \mathbb{C}^n$:

$$N(AX) \leq \beta N_\infty(AX) \leq \beta M_A N_\infty(X) \leq \beta M_A \alpha N(X).$$

En posant $C_A = \alpha \beta M_A$, on a donc :

$$N(AX) \leq C_A N(X).$$

(c) Pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ non nul, on $N(X) \neq 0$ (axiome de séparation). Donc :

$$\frac{N(AX)}{N(X)} \leq C_A.$$

Donc $\frac{N(AX)}{N(X)}$ est donc majoré. Comme $\left\{ \frac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ est non-vide,

l'ensemble admet une borne supérieure (plus petite que C_A).

(d) D'après ce qui précède, on a $\tilde{N}(A) \leq C_A$ où C_A vérifie $N(AX) \leq C_A N(X)$.

Pour la norme infinie, on a $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$. Et donc :

$$\widetilde{N}_\infty(A) \leq M_A.$$

(e) Posons $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $N_\infty(X_0) = 1$.

Et :

$$GX_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

D'où $N_\infty(GX_0) = 10$.

On a donc :

$$\frac{N_\infty(GX_0)}{N_\infty(X_0)} = 10.$$

Et donc :

$$\widetilde{N}_\infty(G) \geq 10.$$

De plus :

$$\widetilde{N}_\infty(G) \leq M_G.$$

Et on calcule M_G directement pour trouver $M_G = 10$. Ainsi :

$$\widetilde{N}_\infty(G) \leq 10.$$

D'où :

$$\widetilde{N}_\infty(G) = 10.$$

2. Commençons par remarquer que $|y_j| = \left| \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \right| = 1$ si $a_{i_0,j} \neq 0$. Et si $a_{i_0,j} = 0$, alors $|y_{i_0,j}| = |1| = 1$. Et ainsi pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $|y_j| = 1$.

Ainsi :

$$N_\infty(Y) = 1.$$

Cherchons maintenant à minorer $N_\infty(AX)$. Pour $i = i_0$, on a :

$$(AY)_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} y_j$$

Si $a_{i_0j} \neq 0$, alors :

$$a_{i_0j}y_j = a_{i_0j} \frac{\overline{a_{i_0j}}}{|a_{i_0j}|} = |a_{i_0j}|.$$

Si $a_{i_0j} = 0$ alors $y_j = 1$ et $a_{i_0j}y_j = 0$. Et comme $a_{i_0j} = 0$, on peut aussi écrire :

$$a_{i_0j}y_j = |a_{i_0j}|.$$

Ainsi :

$$(AY)_{i_0} = \sum_{j=1}^n |a_{i_0j}| = M_A.$$

Ainsi, par définition du majorant, on a :

$$N_\infty(AY) \geq M_A.$$

Et comme $N_\infty(Y) = 1$, on peut écrire :

$$\frac{N_\infty(AY)}{N_\infty(Y)} \geq M_A.$$

Par définition du majorant, on a :

$$\widetilde{N}_\infty(A) \geq M_A.$$

Et puisqu'on a déjà montré que $N_\infty(A) \leq M_A$, on a :

$$\widetilde{N}_\infty(A) = M_A.$$

3. (a) On suppose $\tilde{N}(A) = 0$. Montrons que $A = 0_n$.

On a donc pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ non nul :

$$\frac{N(AX)}{N(X)} \leq 0.$$

Comme $N(X) > 0$, on en déduit que $N(AX) \leq 0$. Et donc, comme la norme est toujours positive, $N(AX) = 0$. Par axiome de séparation, on a donc pour tout $X \in \mathbb{C}^n$:

$$AX = 0.$$

En particulier en prenant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, puis $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ jusqu'à $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on constate que toutes les colonnes de A sont nulles. Ainsi :

$$A = 0.$$

Pour la réciproque, il suffit de constater que pour tout $X \in X^n$:

$$\frac{N(0X)}{N(X)} = 0$$

et donc :

$$\tilde{N}(0) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(0X)}{N(X)} = 0.$$

- (b) Pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a :

$$\frac{N(\lambda AX)}{N(X)} \leq \frac{|\lambda| N(AX)}{N(X)} \leq |\lambda| \tilde{N}(A)$$

où on a utilisé l'absolue homogénéité de N . Ainsi, par passage à la borne supérieure :

$$\tilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \tilde{N}(A).$$

- (c) Si $\lambda = 0$, l'égalité est vérifiée d'après la première question (qui montre l'axiome de séparation).

Si $\lambda \neq 0$, on a :

$$\tilde{N}(A) = \tilde{N}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda A\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \tilde{N}(\lambda A).$$

Ainsi :

$$\tilde{N}(\lambda A) \geq |\lambda| \tilde{N}(A).$$

Ainsi par double inégalité, on a :

$$\tilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \tilde{N}(A).$$

- (d) Pour tout $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$\frac{N((A+B)X)}{N(X)} = \frac{N(AX + BX)}{N(X)} \leq \frac{N(AX) + N(BX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B).$$

Par définition de la borne supérieure, on obtient :

$$\tilde{N}(A+B) \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B).$$

- (e) Si $X \in \mathbb{C}^n$ est non nul, alors par définition d'un majorant, on a :

$$\frac{N(AX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A).$$

Et donc :

$$N(AX) \leq \tilde{N}(A)N(X).$$

Si $X = 0$ alors $N(X) = 0$ et donc $\tilde{N}(A)N(X) = 0$. Et on a aussi $AX = 0$ et donc $N(AX) = 0$. Ainsi, on a bien également :

$$N(AX) \leq \tilde{N}(A)N(X).$$

- (f) On vient de vérifier l'axiome de séparation, l'absolue homogénéité et l'inégalité triangulaire pour $\tilde{N}$. Donc, en tant que fonction des matrices dans $\mathbb{R}_+$ c'est bien une norme.

Montrons maintenant que c'est une norme matricielle.

Soient A et B deux matrices. Pour tout $X \in \mathbb{C}^n$. On a :

$$N(ABX) = N(A(BX)) \leq \tilde{N}(A)N(BX) \leq \tilde{N}(A)\tilde{N}(B)N(X).$$

Et on l'a en particulier pour $X \neq 0$, et dans ce cas :

$$\frac{N(ABX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A)\tilde{N}(B).$$

Par définition de la borne supérieure, on a donc :

$$\tilde{N}(AB) \leq \tilde{N}(A)\tilde{N}(B).$$

$$\tilde{N} \text{ est donc bien une norme matricielle.}$$

4. (a) Puisque λ est valeur propre, il existe $X \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $AX = \lambda X$.

On a donc $N(AX) = N(\lambda X)$ puis $N(AX) = |\lambda|N(X)$. Comme $X \neq 0$, on a $N(X) \neq 0$. Ainsi :

$$\frac{N(AX)}{N(X)} = |\lambda|.$$

Or on a en particulier :

$$\frac{N(AX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A)$$

et donc $|\lambda| \leq \tilde{N}(A)$ c'est-à-dire :

$$\rho(A) \leq \tilde{N}(A).$$

(b) Posons $A = I_n$. On a clairement $\text{Sp}(A) = \{1\}$ et donc $\rho(A) = 1$.

Par ailleurs, on a montré que $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A$. Comme la somme des coefficients sur chaque ligne de I_n vaut 1, on a $M_A = 1$. Et ainsi $\widetilde{N}_\infty(A) = 1$.

Et donc :

$$\boxed{\rho(I_n) = \widetilde{N}_\infty(I_n)}.$$

(c) Soit A nilpotente. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A (cela existe toujours puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$). Notons $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$.

On a alors : $A^n X = \lambda^n X$ par récurrence immédiate et donc $\lambda^n X = 0$. Comme $X \neq 0$, on obtient $\boxed{\lambda = 0}$.

Ainsi $\boxed{\text{Sp}(A) = \{0\}}$ et donc $\boxed{\rho(A) = 0}$.

En outre, si A est non nul, alors par axiome de séparation, $\tilde{N}(A) > 0$. Et donc :

$$\boxed{\rho(A) < \tilde{N}(A)}.$$

5. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ (cela existe encore une fois puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$). Notons $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$.

On a :

$$N(A^k X) \leq \tilde{N}(A^k) N(X) \leq (\tilde{N}(A))^k N(X)$$

où la dernière inégalité est obtenue par propriété de norme matricielle.

Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$, on a en particulier :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{N}(A^k) = 0.$$

Par encadrement, on a donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} N(A^k X) = 0.$$

Or $A^k X = \lambda^k X$. Et donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda|^k N(X) = 0.$$

Comme $X \neq 0$, on a $N(X) \neq 0$ et donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda|^k = 0.$$

Ainsi $|\lambda| < 1$. C'est vrai en particulier pour la plus grande de ces valeurs et donc :

$$\boxed{\rho(A) < 1}.$$

6. (a) Soit λ une valeur propre de A (qui existe dans $\mathbb{C}$). Notons $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$.

On a $A^k X = \lambda^k X$ avec $X \neq 0$. Donc $\lambda^k \in \text{Sp}(A^k)$. Ainsi $|\lambda|^k \leq \rho(A^k)$.

Puis :

$$|\lambda|^k \leq \rho(A^k) \leq \tilde{N}(A^k).$$

Et ainsi :

$$|\lambda| \leq \left[\tilde{N}(A^k) \right]^{1/k}.$$

Puis par définition de la borne supérieure :

$$\boxed{\rho(A) \leq \left[\tilde{N}(A^k) \right]^{1/k}}.$$

(b) Montrons que $\text{Sp}(\alpha A) = \alpha \text{Sp}(A)$.

Si $\alpha = 0$, le résultat est évident. Montrons le résultat pour $\alpha \neq 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} \alpha \lambda \in \text{Sp}(\alpha A) &\Leftrightarrow \det(\alpha \lambda I_n - \alpha A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^n \det(\lambda I_n - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0 \text{ (car } \alpha \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(A). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{Sp}(\alpha A) = \alpha \text{Sp}(A)}.$$

Et donc en prenant le maximum du module de chaque ensemble :

$$\boxed{\rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)}.$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} \rho(A_\epsilon) &= \rho\left(\frac{A}{\rho(A) + \epsilon}\right) \\ &= \left|\frac{1}{\rho(A) + \epsilon}\right| \rho(A) \\ &= \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \epsilon}. \end{aligned}$$

Et comme $\epsilon > 0$, on a bien :

$$\boxed{\rho(A_\epsilon) < 1}.$$

Puisque $\rho(A_\epsilon) < 1$, d'après la proposition admise par l'énoncé, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A_\epsilon^k = 0.$$

Et donc exprimé avec la norme $\tilde{N}$ (c'est possible car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie) :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{N}(A_\epsilon^k) = 0.$$

$\boxed{\text{Il existe donc } k_\epsilon \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout $k \geq k_\epsilon$:

$$\tilde{N}(A_\epsilon^k) \leq 1.$$

Or :

$$\tilde{N}(A_\epsilon^k) = \tilde{N}\left(\frac{A^k}{(\rho(A) + \epsilon)^k}\right) = \frac{1}{(\rho(A) + \epsilon)^k} \tilde{N}(A^k).$$

Donc pour $k \geq k_\epsilon$, on a $\frac{1}{(\rho(A) + \epsilon)^k} \tilde{N}(A^k) \leq 1$ que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{\tilde{N}(A^k) \leq (\rho(A) + \epsilon)^k}.$$

(d) D'après les inégalités précédemment calculés, on a pour tout $\epsilon > 0$ et pour k suffisamment grand (à ϵ donné) :

$$\rho(A) \leq \left[\tilde{N}(A^k)\right]^{1/k} \leq \rho(A) + \epsilon.$$

On a donc également :

$$\rho(A) - \epsilon \leq \left[\tilde{N}(A^k)\right]^{1/k} \leq \rho(A) + \epsilon$$

qui peut se réécrire :

$$\left|\left[\tilde{N}(A^k)\right]^{1/k} - \rho(A)\right| \leq \epsilon$$

ce qui donne précisément la définition de :

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\tilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)}.$$

Exercice 4 - Centrale-Supélec PC 2014 Maths 2 (extrait adapté de la partie 2)**Partie I - Le « corps » des quaternions**

1. (a) $\mathcal{C}$ est de dimension 8 sur $\mathbb{R}$ puisqu'une base est donnée par :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right).$$

- (b) Vérifions que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

- $\mathbb{H}$ est bien un sous-ensemble de $\mathcal{C}$.
- $0_2 = M(0, 0) \in \mathbb{H}$ donc $\mathbb{H}$ n'est pas vide.
- Soient M et M' deux éléments de $\mathbb{H}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $M = M(a, b)$ et $M' = M(a', b')$. On a alors :

$$\begin{aligned} M + \lambda M' &= M(a, b) + \lambda M(a', b') \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + \lambda a' & -b - \lambda b' \\ \bar{b} + \lambda \bar{b}' & \bar{a} + \lambda \bar{a}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + \lambda a' & -(b + \lambda b') \\ \bar{b} + \lambda \bar{b}' & \overline{a + \lambda a'} \end{pmatrix} \\ &\quad (\text{car } \lambda \in \mathbb{R}) \\ &= M(a + \lambda a', b + \lambda b') \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{H}$ est stable par combinaison linéaire.

Donc $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

De plus, en notant $a = a + ia'$ et $b = b + ib'$ où $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \left\{ \begin{pmatrix} a + ia' & -b - ib' \\ b - ib' & a - ia' \end{pmatrix}, (a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a' \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, (a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \{ae + a'J + bI + b'K, (a, a', b, b') \in \mathbb{R}^4\} \\ &= \text{Vect}(e, I, J, K). \end{aligned}$$

Donc (e, I, J, K) est une famille génératrice de $\mathbb{H}$. Comme elle est libre (ça se vérifie simplement), c'en est une base.

Remarquons qu'on aurait pu conclure sur le caractère sous-espace vectoriel de $\mathbb{H}$ directement à partir de son expression en tant qu'espace engendré par une famille.

- (c) Soient M et $M' \in \mathbb{H}$. Notons $M = M(a, b)$ et $M' = M(a', b')$. On a alors :

$$\begin{aligned} MM' &= M(a, b)M(a', b') \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b}' & \bar{a}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa' - b\bar{b}' & -ab' - b\bar{a}' \\ \bar{b}a' + \bar{a}\bar{b}' & -\bar{b}b' + \bar{a}\bar{a}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa' - b\bar{b}' & -(ab' + b\bar{a}') \\ \bar{b}a' + \bar{a}\bar{b}' & \overline{aa' - b\bar{b}'} \end{pmatrix} \\ &= M(aa' - b\bar{b}', ab' + b\bar{a}'). \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{H}$ est stable par multiplication.

2. (a) Soit $M(a, b) \in \mathbb{H}$ non nulle. On a donc $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Calculons :

$$\det M(a, b) = \begin{vmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{vmatrix} = a\bar{a} + b\bar{b} = |a|^2 + |b|^2.$$

Si $\det M(a, b) = 0$, en tant que somme de termes positifs, on aura donc $|a|^2 = |b|^2 = 0$ et donc $a = b = 0$. Or $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ donc $\det M(a, b) \neq 0$.

Ainsi $M(a, b)$ est inversible.

- (b) Soit $M(a, b) \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. On a donc $M(a, b)$ inversible. Calculons cette inverse avec la formule de la comatrice :

$$M(a, b)^{-1} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \bar{a} & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix} = M\left(\frac{1}{|a|^2 + |b|^2}\bar{a}, -\frac{1}{|a|^2 + |b|^2}b\right) \in \mathbb{H}.$$

Et comme $M(a, b)^{-1} \neq 0$, $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ est stable par passage à l'inverse.

3. (a) On trouve après calcul :

$\times$	e	I	J	K
e	e	I	J	K
I	I	$-e$	K	$-J$
J	J	$-K$	$-e$	I
K	K	J	$-I$	$-e$

- (b) D'après le tableau précédent, on a $IJ = -JI$, $IK = -KI$ et $JK = -KJ$. Donc :

$$iIiJ + iJiI = iIiK + iKiI = iJiK + iKiJ = 0.$$

De plus, toujours d'après le tableau précédent $I^2 = J^2 = K^2 = -e$. Donc :

$$(iI)^2 = (iJ)^2 = (iK)^2 = e$$

Donc (iI, iJ, iK) est bien un H -système.

Partie II - Conjugaison et normes

4. Vérifions que N est une norme sur $\mathbb{H}$.

- $q \mapsto \sqrt{N(q)}$ est bien une application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{R}_+$.
- **Absolue homogénéité** : Soit $q = xe + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$ avec $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sqrt{N(\lambda q)} = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (\lambda z)^2 + (\lambda t)^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)} = |\lambda| \sqrt{N(q)}.$$

- **Inégalité triangulaire** : Soient $q = xe + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$ et $q' = x'e + y'I + z'J + t'K \in \mathbb{H}$. On a :

$$\sqrt{N(q + q')} = \sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2 + (t + t')^2}$$

- **Axiome de séparation** : Soit $q = xe + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$. On suppose $\sqrt{N(q)} = 0$. Montrons que $q = 0$.

On a $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} = 0$. Donc $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$. Comme c'est une somme de termes positifs, on a :

$$x^2 = y^2 = z^2 = t^2 = 0$$

et donc $x = y = z = t = 0$, c'est-à-dire $q = 0$.

Donc $q \mapsto \sqrt{N(q)}$ est bien une norme sur $\mathbb{H}$.

5. (a) Soit $q = xe + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$. On a :

$$\begin{aligned} q^* &= xe - yI - zJ - tK \\ &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - iz & y + it \\ -y + it & x + iz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De même, on peut calculer :

$$q = \begin{pmatrix} x + iz & -y - it \\ y - it & x - iz \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a :

$$\bar{q}^\top = \begin{pmatrix} x - iz & -y + it \\ y + it & x + iz \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} x - iz & y + it \\ -y + it & x + iz \end{pmatrix} = q^\star.$$

(b) La conjugaison complexe est compatible avec la somme et l'addition. Ainsi si $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\overline{M \times N} = \overline{M} \times \overline{N}$$

puisque la multiplication matricielle n'implique que des combinaisons linéaires.

Puis :

$$(qr)^\star = \overline{(qr)}^\top = (\overline{qr})^\top = \bar{r}^\top \bar{q}^\top = r^\star q^\star.$$

(c) On a :

$$q^{\star\star} = \overline{(\bar{q}^\top)}^\top$$

La transposition et la conjugaison complexe coefficient par coefficient commutent. Donc :

$$q^{\star\star} = \bar{\bar{q}}^{\top\top} = q^{\top\top} = q.$$

L'application $q \mapsto q^\star$ est donc une involution (c'est sa propre réciproque) et donc en particulier est bijective.

Par linéarité de la conjugaison complexe et de la transposition, $q \mapsto q^\star$ est linéaire (sur $\mathbb{R}$). C'est une application de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$ donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{H}$.

En tant qu'endomorphisme bijectif de $\mathbb{H}$, $q \mapsto q^\star$ est un automorphisme de $\mathbb{H}$.

(d) Soit $q \in \mathbb{H}$. Notons $q = xe + yI + zJ + tK$. On a donc :

$$q = \begin{pmatrix} x + iz & -y - it \\ y - it & x - iz \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} qq^\star &= \begin{pmatrix} x + iz & -y - it \\ y - it & x - iz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - iz & y + it \\ -y + it & x + iz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x + iz)(x - iz) + (y + it)(y - it) & (x + iz)(y + it) - (y + it)(x + iz) \\ (x - iz)(y - it) - (x - iz)(y - it) & (y - it)(y + it) + (x - iz)(x + iz) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 + z^2 + y^2 + t^2 & 0 \\ 0 & x^2 + z^2 + y^2 + t^2 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{N(q)e}. \end{aligned}$$

Soient maintenant $(q, r) \in \mathbb{H}^2$. On a :

$$(qr)(qr)^\star = N(qr)e$$

On a également :

$$(qr)(qr)^\star = qrr^\star q^\star = qN(r)e q^\star = N(r)qq^\star = N(r)N(q)e.$$

Comme $e \neq 0$, on a :

$$\boxed{N(qr) = N(q)N(r)}.$$

6. (a) Soit $q = xe + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$. On a :

$$\text{Tr}(q) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} x + iz & -y - it \\ y - it & x - iz \end{pmatrix} \right) = (x + iz) + (x - iz) = 2x.$$

- (b) Notons $qr - rq = xe + yI + zJ + tK$ et $q^*r^* - r^*q^* = x'e + y'I + z'J + t'K$.

On a :

$$\text{Tr}(qr - rq) = \text{Tr}(qr) - \text{Tr}(rq) = \text{Tr}(qr) - \text{Tr}(qr) = 0.$$

Et de même : $\text{Tr}(q^*r^* - r^*q^*) = 0$. Ainsi on a $x = 0$ et $x' = 0$ et donc $x = x'$.

On peut donc noter $qr - rq = yI + zJ + tK$ et $q^*r^* - r^*q^* = y'I + z'J + t'K$.

Remarquons maintenant que : $(qr - rq)^* = r^*q^* - q^*r^* = -(q^*r^* - r^*q^*)$.

Or $(qr - rq)^* = (yI + zJ + tK)^* = yI^* + zJ^* + tK^* = -yI - zJ - tK$ (la dernière étape se calculant avec les matrices).

D'où :

$$-yI - zJ - tK = -y'I - z'J - t'K$$

et comme (I, J, K) est libre $y = y'$, $z = z'$ et $t = t'$. Ainsi :

$$\boxed{qr - rq = q^*r^* - r^*q^*}.$$

- (c) Posons $q = acb^*$ et $r = d$. On a $qr - rq = q^*r^* - r^*q^*$. Donc :

$$(acb^*)d - d(acb^*) = (acb^*)^*d^* - d^*(acb^*)^*.$$

Puis en échangeant les termes de côté :

$$\boxed{(acb^*)d + d^*(acb^*)^* = (acb^*)^*d^* + d(acb^*)}.$$

D'après ce qui précède, on a : $qq^* = N(q)e \in \mathbb{H}$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} N(ac - d^*b)e + N(bc^* + da)e &= (ac - d^*b)(ac - d^*b)^* + (bc^* + da)(bc^* + da)^* \\ &= (ac - d^*b)(c^*a^* - b^*d) + (bc^* + da)(cb^* + a^*d^*) \\ &= (acc^*a^* + d^*bb^*d - acb^*d - d^*bc^*a^*) + (bc^*cb^* + daa^*d^* + bc^*a^*d^* + dacb^*) \end{aligned}$$

Remarquons que $qrr^*q^* = qN(r)eq^* = N(r)N(q)e$. Donc :

$$\begin{aligned} &N(ac - d^*b)e + N(bc^* + da)e \\ &= (N(a)N(c)e + N(d)N(b)e - acb^*d - d^*bc^*a^*) + (N(b)N(c)e + N(d)N(a)e + \underbrace{bc^*a^*d^*}_{=(acb^*)^*d^*} + dacb^*) \\ &= (N(a)N(c)e + N(d)N(b)e - acb^*d - d^*(acb^*)^*) + (N(b)N(c)e + N(d)N(a)e + (acb^*)d + d^*(acb^*)^*) \\ &= (N(a)N(c) + N(d)N(b) + N(b)N(c) + N(d)N(a))e. \end{aligned}$$

Comme $e \neq 0$, on obtient :

$$N(ac - d^*b) + N(bc^* + da) = N(a)N(c) + N(d)N(b) + N(b)N(c) + N(d)N(a)$$

puis :

$$\boxed{N(ac - d^*b) + N(bc^* + da) = N(a)(N(c) + N(d))N(b)(N(d) + N(c)) = (N(a) + N(b))(N(c) + N(d))}.$$