TD9 - Polynômes annulateurs

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$ et la matrice $B = A^2 + 2I_3$.

1. Montrer que $B^2 = B + 2I_3$.
2. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 2$ est valeur propre de B. En déduire que A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le reste R_n de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.
4. En déduire l'expression de B^n en fonction des matrices I et B.

Exercice 2. On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. (a) Trouver les matrices qui commutent avec D.
   (b) On cherche à résoudre $Y^2 + Y = D$ (E') dans $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que si M est solution de (E') alors M et D commutent. En déduire les solutions de (E').
   (c) Résoudre $X^2 + X = A$ dans $M_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Montrer que $P(X) = (X-2)(X-6)$ est un polynôme annulateur de A.
   (b) On pose $\mathbb{R}[A] = \{P(A) \,|\, P \in \mathbb{R}[X]\}$. Calculer $\dim\big(\mathbb{R}[A]\big)$.
   (c) Soit (E) l'équation $X^2 + X = A$. Prouver sans utiliser la question 1 que si X est solution de (E), le spectre de X est inclus dans $\{-3, -2, 1, 2\}$ et montrer que X est diagonalisable.

Exercice 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que, si A est inversible, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, u et v deux endomorphismes de E **qui commutent**. On suppose que u possède n valeurs propres distinctes : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et on note $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

1. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\mu_i \in \mathbb{K}$ tel que $v(e_i) = \mu_i e_i$.
2. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = \mu_i$.
3. En déduire que $v = P(u)$. Réciproque ?

Exercice 5. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$A^3 - 3A - 4I_n = 0_n.$$

Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 6. Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Exercice 7 (CCP PC 2005 ODLT)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8. Soit A et B dans $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A et B sont semblables, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ le sont aussi.

Exercice 9. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si A est diagonalisable, alors $P(A)$ l'est aussi. Que dire de la réciproque ?

Exercice 10. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que

$$\mathrm{Sp}\big(P(A)\big) = \big\{P(\lambda),\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\big\}.$$

Indication : on pourra penser à trigonaliser.

Exercice 11. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, notons $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} \big(X - \lambda_i\big)$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\chi_{P(A)} = \prod_{i=1}^{n} \big(X - P(\lambda_i)\big)$. *Indication : on pourra penser à trigonaliser.*

Exercice 12. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $A \in M_n(\mathbb{C})$. Soit λ une valeur propre de $P(A)$. Montrer qu'il existe une valeur propre μ de A telle que $P(\mu) = \lambda$.

Exercice 13 (CCP PC 2009 ODLT)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^3 = A^2$ et $\mathrm{tr}(A) = n$.

1. Donner le spectre de A.
2. Donner son polynôme caractéristique.
3. Prouver que $A = I_n$.

Exercice 14. Soit $A \in \mathrm{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 - 2A$. Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 15. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $P = X^3 + X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de A et que -2 n'est pas valeur propre de A. Montrer que A est la matrice d'un projecteur.

Exercice 16. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(A) = 0_n$ si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $P(\lambda) = 0$.

Exercice 17.

1. Soient M et $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que MN est inversible si et seulement si M et N sont inversibles.
2. Soient A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset.$$

Exercice 18. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si Q est un polynôme scindé à racines simples qui annule A, alors $Q'(A)$ est inversible.

Exercice 19. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $P(A)$ est inversible si et seulement si, aucune racine de P n'est valeur propre de A.

Exercice 20. Soit P un polynôme annulateur d'une matrice nilpotente N. Montrer que $P(0) = 0$.

Exercice 21. Soit $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice N est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ avec $N^p = 0_n$.

1. Montrer que N est nilpotente si et seulement si $\chi_N = X^n$.
2. En déduire que
   (a) N est nilpotente si et seulement si $N^n = 0_n$.
   (b) N est nilpotente si et seulement si N est semblable à une matrice triangulaire stricte.
3. On suppose la matrice N nilpotente.
   (a) Montrer que la matrice $I_n + N$ est inversible.
   (b) Déterminer $(I_n + N)^{-1}$. *Indication : on pourra penser au DSE de* $(1+x)^{-1}$...

Exercice 22. Soit A et B deux matrices carrées à coefficients complexes, $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B le sont.

Exercice 23. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi_A : M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(\phi_A)$ est l'application $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P(A)M$.
2. En déduire que A est diagonalisable si et seulement si ϕ_A l'est.

Exercice 24 (CCP PC 2005 ODLT)**.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose $A^2 - 2A + I_n = 0_n$.
   (a) Donner $\mathrm{Sp}(A)$.
   (b) Calculer A^p en fonction de A et I_n pour $p \in \mathbb{Z}$.
2. Donner un exemple de matrice A non diagonalisable vérifiant $A^2 - 2A + I_n = 0_n$.

Exercice 25 (Mines-Ponts PSI 2009)**.** Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice $2M$ en fonction de celui de M.
2. On suppose que M et $2M$ sont semblables. Montrer que M est nilpotente.

Exercice 26 (CCP PC 2009 ODLT)**.** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f^2 = f^4$, et admettant 1 et -1 comme valeurs propres. f est-il diagonalisable ?

Exercice 27 (CCP PC 2009 ODLT).

1. Déterminer les valeurs propres complexes de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$? $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$?
3. On pose $t_n = \mathrm{tr}(A^n)$. Exprimer t_{n+3} en fonction de t_{n+2}, t_{n+1} et t_n.
4. Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} t_n x^n$ et somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 28 (CCP PC 2010 ODLT). Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$.

1. Montrer que si A est diagonalisable, A^2 l'est aussi.
2. En s'intéressant à la matrice qui a un unique 1 dans le coin supérieur droit et des 0 partout ailleurs, montrer que la réciproque est fausse.
3. Condition de diagonalisabilité utilisant le polynôme annulateur ?
4. Si A est inversible et A^2 diagonalisable, montrer que A est diagonalisable.
5. On suppose A non inversible. Montrer que si A^2 et A sont diagonalisables, alors $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$.

Exercice 29 (CCP PC 2013 ODLT). Soient A et B deux matrices carrées (à coefficients dans $\mathbb{C}$) qui commutent et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $A^k B = BA^k$, et calculer M^k.
2. Montrer que, pour tout polynôme P, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & BP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
3. Montrer que si Q est un polynôme scindé à racines simples qui annule A, $Q'(A)$ est inversible.
4. Montrer que si M est diagonalisable, A l'est aussi et B est nulle.
5. Montrer la réciproque.

Exercice 30 (CCP PC 2005 ODLT). Que peut-on dire de $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 - A^3 - A^2 + I_n = 0_n$ et $A^2 - 3A + 2I_n = 0_n$?

Exercice 31 (CCP PC 2007 ODLT). Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = A^2$. On suppose $M^2 + M + I_n = 0_n$.

1. M est-elle inversible ?
2. Montrer que les valeurs propres de M sont j et j^2.
3. M est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$? $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?
4. Montrer que n est pair et calculer $\mathrm{tr}(M)$ et $\det(M)$.
5. A est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$? $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?
6. Montrer que si $\frac{n}{2}$ est impair, $\mathrm{tr}(A)$ est un entier relatif impair.

Solutions

Exercice 1. **1)** Plusieurs façons pour montrer l'égalité demandée.

Première façon : on calcule $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, puis on calcule $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et on constate bien

$$B^2 = B + 2I_3.$$

Deuxième façon : on calcule $\chi_A = X^3 + 3X$, puis

$$B^2 - B - 2I_3 = (A^2 + 2I_3)^2 - (A^2 + 2I_3) - 2I_3 = A^4 + 3A^2 = A \times \chi_A(A).$$

Or, le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_A(A) = 0_3$, donc

$$B^2 - B - 2I_3 = A \times 0_3 = 0_3,$$

ce qui donne bien l'égalité voulue.
2) Soit $P = X^2 + 2 \in \mathbb{R}[X]$, alors $B = P(A)$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, si λ est valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$ (cours), soit $\lambda^2 + 2$ est valeur propre de B.
Mais

$$X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$$

est un polynôme annulateur de B qui admet -1 et 2 comme racines, donc

$$\mathrm{Sp}(B) \subset \{-1, 2\}.$$

Comme $\lambda^2 + 2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, on conclut : si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 2 = 2$, soit $\lambda = 0$.
Donc

0 est la seule valeur propre réelle possible de A.

Mais si A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, il existerait alors R une matrice inversible avec $R^{-1}AR$ qui serait une matrice diagonale, avec chaque coefficient diagonal qui serait une valeur propre réelle de A, donc nulle, donc on aurait

$$R^{-1}AR = 0_3, \qquad \text{soit} \qquad A = R \times 0_3 \times R^{-1} = 0_3,$$

ce qui est faux.
Donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons le reste de la division euclidienne de X^n par

$$X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1).$$

La division euclidienne donne : il existe un unique couple (Q_n, R_n) avec $Q_n \in \mathbb{R}[X]$, $R_n \in \mathbb{R}[X]$ avec

$$\deg(R_n) < \deg\left(X^2 - X - 2\right) = 2$$

tel que

$$X^n = (X^2 - X - 2) \times Q_n + R_n.$$

Comme $\deg(R_n) < 2$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec

$$R_n = aX + b, \qquad \text{et donc on a} \qquad X^n = (X^2 - X - 2) \times Q_n + aX + b.$$

En évaluant cette égalité en -1, on a alors

$$(-1)^n = 0 \times Q_n(-1) + a \times (-1) + b = -a + b.$$

En évaluant cette égalité en 2, on a alors

$$2^n = 0 \times Q_n(2) + a \times 2 + b = 2a + b.$$

Donc on a
$$\begin{cases} 2a+b=2^n \\ b-a=(-1)^n \end{cases},$$
ce qui donne
$$a=\frac{2^n-(-1)^n}{3} \qquad \text{puis} \qquad b=\frac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}.$$
Donc
$$\boxed{R_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}X+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}}.$$
4) Soit $n\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de B^n par X^2-X-2 s'écrit alors
$$X^n=(X^2-X-2)Q_n+\frac{2^n-(-1)^n}{3}X+\frac{2^n+2(-1)^n}{3},$$
et en évaluant en B, on a alors
$$B^n=(\underbrace{B^2-B-2I_3}_{=0_3})\times Q_n(B)+\frac{2^n-(-1)^n}{3}B+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3=\boxed{\frac{2^n-(-1)^n}{3}B+\frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3}.$$

Exercice 2.

1. (a) Soit $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Alors
$$MD=\begin{pmatrix} 2a & 6b \\ 2c & 6d\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad DM=\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 6c & 6d\end{pmatrix}.$$
Donc
$$MD=DM \qquad \Leftrightarrow \qquad b=c=0.$$
Donc les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

(b) ★ Si $M\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est solution de (E') alors
$$MD=M(M^2+M)=M^3+M^2=(M^2+M)M=DM.$$

★ Raisonnons par analyse et synthèse.

Analyse : si $M\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est solution de (E') alors M commute avec D (car D est un polynôme en M), donc M est diagonale.

Cherchons donc les matrices diagonales solution de (E'). Si $M=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}$, alors
$$M^2+M=\begin{pmatrix} a^2+a & 0 \\ 0 & d^2+d\end{pmatrix},$$
donc
$$M^2+M=D\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+a & 0 \\ 0 & d^2+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6\end{pmatrix}\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a=2 \\ d^2+d=6 \end{cases}.$$
Donc M est de la forme
$$M=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$
avec $\alpha\in\{-2,1\}$ (les racines de X^2+X-2) et $\beta\in\{-3,2\}$ (les racines de X^2+X-6).

Synthèse : réciproquement, si
$$M=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$
avec $\alpha\in\{-2,1\}$ et $\beta\in\{-3,2\}$, alors (puisque -2 et 1 sont les racines de X^2+X-2 et -3 et 2 les racines de X^2+X-6),
$$M^2+M=\begin{pmatrix} a^2+a & 0 \\ 0 & d^2+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6\end{pmatrix}=D,$$
donc M est solution de
$$M^2+M=D.$$

(c) Diagonalisons A :

$$\chi_A = (X-5)(X-3)-3 = X^2-8X+12 = (X-6)(X-2).$$

Les valeurs propres de A sont donc 2 et 6. Comme χ_A est scindé à racines simples, A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et les espaces propres sont de dimension 1.

★ On a

$$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Comme E_2 est de dimension 1, le vecteur trouvé en est une base.

★ On a

$$E_6 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Comme E_6 est de dimension 1, le vecteur trouvé en est une base.

★ De plus, on sait A diagonalisable, et on a trouvé une base de chaque espace propre, alors la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible (avec $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$), et on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, soit $X \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque, notons

$$Y = PXP^{-1}, \qquad \text{alors} \qquad X = PYP^{-1}.$$

En reportant dans l'équation, on a alors

$$X^2 + X = A \Leftrightarrow PY^2P^{-1} + PYP^{-1} = A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}P^{-1} \Leftrightarrow Y^2 + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = D \quad (E').$$

Ainsi X est solution de (E) si et seulement si Y est solution de (E'). Donc X est solution de (E) si et seulement si X est de la forme

$$X = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P^{-1}$$

avec $\alpha \in \{-2, 1\}$ et $\beta \in \{-3, 2\}$.

2. (a) En faisant le calcul, on a bien

$$P(A) = 0_2.$$

C'est aussi une conséquence directe de Cayley-Hamilton, puisque $P = \chi_A$.

(b) • Montrons que $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$:

◇ On a $\mathbb{R}[A] \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ par définition.

◇ On a $0_2 \in \mathbb{R}[A]$ (0_2 est le polynôme nul évalué en A, par exemple, mais on a aussi $0_2 = \chi_A(A)$...).

◇ Soit $(M, N) \in \mathbb{R}[A]^2$, alors il existe $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec

$$M = P(A) \qquad \text{et} \qquad N = Q(A),$$

et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda M + N = \lambda P(A) + Q(A) = (\lambda P + Q)(A) \in \mathbb{R}[A]$$

car $\lambda P + Q \in \mathbb{R}[X]$.

◇ Donc $\mathbb{R}[A]$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

• Montrons que (I_2, A) est une base de $\mathbb{R}[A]$.

◇ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, si $\alpha I_2 + \beta A = 0_2$, alors

$$\begin{pmatrix} \alpha + 5\beta & 3\beta \\ \beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} \alpha + 5\beta = 0 \\ 3\beta = 0 \\ b = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{cases},$$

donc $\alpha = \beta = 0$. Donc la famille (I_2, A) est libre.
◇ De plus, $I_2 = P(A)$ si $P = 1$ (le polynôme constant égal à 1), et $A = P(A)$ si $P = X$, donc

$$I_2 \in \mathbb{R}[A] \qquad \text{et} \qquad A \in \mathbb{R}[A].$$

◇ Enfin, soit $M \in \mathbb{R}[A]$. Il existe alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ avec

$$M = Q(A).$$

Effectuons la division euclidienne de Q par χ_A : il existe deux polynômes S et R avec

- $\deg(R) \leq 1$ (car $\deg(\chi_A) = 2$), donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec

$$R = aX + b,$$

- et

$$Q = \chi_A \times S + R.$$

En évaluant en A, on a donc :

$$M = Q(A) = S(A) \times \underbrace{\chi_A(A)}_{=0_2} + R(A) = R(A) = aA + bI_3 \in \text{Vect}(I_3, A).$$

Donc

$$\mathbb{R}[A] \subset \text{Vect}(I_3, A).$$

◇ L'inclusion réciproque provient de ce que I_2 et A sont dans $\mathbb{R}[A]$. Donc on a bien

$$\mathbb{R}[A] = \text{Vect}(I_3, A),$$

autrement dit, (I_2, A) est une famille génératrice de $\mathbb{R}[A]$.
◇ Comme de plus on a vu que la famille (I_2, A) est une famille libre, on peut conclure que c'est une base de $\mathbb{R}[A]$, de cardinal 2, donc

$$\boxed{\dim\big(\mathbb{R}[A]\big) = 2}.$$

(c) Si X est solution de

$$X^2 + X = A,$$

le polynôme

$$Q(Y) = (Y^2 + Y - 2)(Y^2 + Y - 6)$$

annule X, car

$$Q(X) = (X^2 + X - 2I_2)(X^2 + X - 6I_2) = (A - 2I_2)(A - 6I_2) = \chi_A(A) = 0_2.$$

Or

$$(Y^2 + Y - 2) = (Y + 2)(Y - 1) \qquad \text{et} \qquad Y^2 + Y - 6 = (Y + 3)(Y - 2),$$

donc le polynôme

$$Q(Y) = (Y - 1)(Y + 2)(Y + 3)(Y - 2)$$

est scindé à racines simples. Donc la matrice X est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de Q, autrement dit,

$$\text{Sp}(X) \subset \{-3, -2, 1, 2\}.$$

Remarque. Pour décrire le polynôme Q, on a introduit la lettre Y au lieu de la lettre X classiquement utilisée, car dans cette question, X désigne déjà autre chose.

Exercice 3. On sait $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$, donc il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec

$$\chi_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

(avec $a_n = 1$ car on sait χ_A est unitaire). Alors le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_A(A) = 0_n$, soit

$$0_n = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{n} a_k A^k,$$

ou encore

$$a_0 I_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k A^k = A \times \left(\sum_{k=1}^{n} -a_k A^{k-1} \right)$$

(*l'expression de droite existe bien, car pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $k-1 \in \mathbb{N}$).
Comme la matrice A est inversible, 0 n'est pas valeur propre de A, donc 0 n'est pas racine de χ_A, donc $a_0 \neq 0$. Donc

$$I_n = A \times \left(\sum_{k=1}^{n} -\frac{a_k}{a_0} A^{k-1} \right),$$

et donc en multipliant par A^{-1} à gauche, on a

$$A^{-1} = \sum_{k=1}^{n} -\frac{a_k}{a_0} A^{k-1}.$$

Donc $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} -\frac{a_k}{a_0} X^{k-1}$ convient (c'est bien un polynôme car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k-1 \in \mathbb{N}$).

Exercice 4. 1) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, alors $e_i \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id})$ par définition. Or, v commute avec u par hypothèse, et v commute avec Id (sans hypothèse), donc v commute avec $u - \lambda_i \mathrm{Id}$:

$$v \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}) = v \circ u - \lambda_i v \circ \mathrm{Id} = u \circ v - \lambda_i \mathrm{Id} \circ v = (u - \lambda_i \mathrm{Id}) \circ v.$$

Remarque. On peut aussi dire : $u - \lambda_i \mathrm{Id}$ est un polynôme en u, v commute avec u, donc v commute avec $u - \lambda_i \mathrm{Id}$.

Par conséquent, v laisse stable le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id})$ (cours), donc

$$v(e_i) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}).$$

Or, u est un endomorphisme de E avec $n = \dim(E)$, et u a n valeurs propres deux à deux distinctes, donc chaque espace propre est de dimension 1.
Comme

- $e_i \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}) = E_{\lambda_i}(u)$,
- et que $e_i \neq \vec{0}$ (car B est libre, donc ne contient pas le vecteur nul)
- et que $\dim\big(E_{\lambda_i}(u)\big) = 1$,

on peut en conclure que (e_i) est une base de $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id})$.
Comme $v(e_i) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id})$, on en déduit qu'il existe $\mu_i \in \mathbb{K}$ avec

$$v(e_i) = \mu_i e_i.$$

2) Les λ_i pour $i \in [\![1, n]\!]$ sont deux à deux différents, donc les polynômes interpolateurs de Lagrange $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ associés, définis pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ par

$$L_i = \prod_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

forment une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, et les coordonnées d'un polynôme P quelconque dans cette base est

$$\big(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)\big).$$

Donc, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(\lambda_i) = \mu_i$ (les coordonnées dans une base caractérisent le vecteur), à savoir

$$P = \sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i.$$

3) • Notons $w = P(u)$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, comme $u(e_i) = \lambda_i e_i$, on a

$$w(e_i) = P(u)(e_i) = P(\lambda_i)e_i = \mu_i e_i = v(e_i).$$

Comme $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on a alors

$$w = v \qquad \text{sur une base de } E.$$

Comme v et w sont linéaires, on en déduit bien que

$$w = v.$$

- Réciproquement, si $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, alors $P(u)$ est un endomorphisme de E qui commute avec u (cours).
- On a donc montré que le commutant de u était $\big\{P(u),\ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\big\}$.

Remarque. Ce résultat n'est vrai que pour un endomorphisme u qui a autant de valeurs propres deux à deux distinctes que la dimension de l'espace de départ.

Exercice 5. $P = X^3 - 3X - 4$ est un polynôme annulateur de A. Donc toute valeur propre (réelle ou complexe) de A est racine de P (cours).
Notons

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 3x - 4 \in \mathbb{R}.$$

Alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1),$$

d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que,

- pour tout $x \in]-\infty, 1]$,
$$f(x) \leq -2 < 0,$$
- et la fonction f étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$, la fonction f induit une bijection de $[1, +\infty[$ sur
$$[f(1), \lim_{+\infty} f[= [-6, +\infty[.$$
Comme $0 \in [-6, +\infty[$, on en déduit qu'il existe un unique $\alpha \in [1, +\infty[$ avec
$$f(\alpha) = 0.$$

Donc P a une unique racine réelle α, et $\alpha \geq 1 > 0$. Comme $\deg(P) = 3$, deux cas sont possibles :

- soit $P = (X - \alpha)^3$,
- soit $P = (X-\alpha)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaire et n'ayant pas de racine réelle, donc s'écrivant $Q = (X-\beta)(X-\overline{\beta})$ pour un certain $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

• Dans le premier cas, on en déduit que A n'a qu'une seule valeur propre complexe, α, qui est donc de multiplicité n, et donc
$$\det(A) = \alpha^n > 0.$$

• Dans le deuxième cas, si A a β comme valeur propre, alors β est racine de χ_A. Or, χ_A est un polynôme **réel** car $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\overline{\beta}$ est aussi racine de χ_A, avec même multiplicité comme racine de χ_A que β. Idem si c'est $\overline{\beta}$ qui est racine de P.
En notant alors p la multiplicité de α comme racine de χ_A (qui peut être éventuellement nulle) et q celle de β (donc de $\overline{\beta}$ aussi), on a alors, puisque $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\alpha, \beta, \overline{\beta}\}$, que
$$\det(A) = \alpha^p \beta^q \overline{\beta}^q = \alpha^p |\beta|^{2q} > 0$$
(puisque $\alpha > 0$ et $|\beta| > 0$ puisque $\beta \neq 0$).
Dans tous les cas, on a bien
$$\det(A) > 0.$$

Exercice 6. $A^n = I_n$, donc le polynôme
$$X^n - 1$$
est un polynôme annulateur de A. Or,
$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k),$$
en notant $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ (cf. cours sur les racines de l'unité et sur la factorisation de polynômes). Donc
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{\omega^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$
Supposons alors qu'il existe $j \in [\![0, n-1]\!]$ tel que ω^j ne soit pas valeur propre de A, alors la matrice $A - \omega^j I_n$ est inversible. Or, de la factorisation de $X^n - 1$, on a
$$0_n = A^n - I_n = \prod_{k=0}^{n-1}(A - \omega^k I_n) = (A - \omega^j I_n) \times \prod_{\substack{k \in [\![0,n-1]\!] \\ k \neq j}} (A - \omega^k I_n)$$
(*rappelons que les polynômes en A commutent entre eux*). En multipliant alors à gauche par $(A - \omega^j)^{-1}$, on en déduit
$$0_n = (A - \omega^j I_n)^{-1} \times 0_n = (A - \omega^j I_n)^{-1} \times (A - \omega^j I_n) \times \prod_{\substack{k \in [\![0,n-1]\!] \\ k \neq j}} (A - \omega^k I_n) = \prod_{\substack{k \in [\![0,n-1]\!] \\ k \neq j}} (A - \omega^k I_n).$$
Donc le polynôme
$$Q = \prod_{\substack{k \in [\![0,n-1]\!] \\ k \neq j}} (X - \omega^k)$$
est un polynôme annulateur de A. De plus, il est de degré $n-1$ (car produit de $n-1$ polynômes de degré 1, les $X - \omega^k$), donc il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ avec
$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$
Enfin, on a alors
$$0_n = Q(A) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k,$$
et comme l'énoncé donne que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre, on en déduit $a_k = 0$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit Q est le polynôme nul, contradiction (le polynôme nul n'est pas de degré $n-1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$).
Donc, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\omega^j \in \mathrm{Sp}(A)$. Par double inclusion, on a alors
$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{\omega^k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

De plus, les complexes ω^j pour $j \in [\![0, n-1]\!]$ sont deux à deux distincts (*cours de PCSI ?*), donc A a n valeurs propres deux à deux différentes. Comme A est de taille n, on en déduit que A est diagonalisable (*ce qui n'est pas surprenant, puisque $X^n - 1$ est un polynôme scindé à racines simples qui annule A*) **et que les espaces propres de A sont tous de dimension** 1. Donc chaque valeur propre de A est de multiplicité 1. Par conséquent,

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \times \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{0}{1-\omega} = 0$$

(en reconnaissant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison ω avec $\omega \neq 1$ car $n \geq 2$).

Exercice 7. Le polynôme

$$P = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1) = X(X - j)(X - \overline{j})$$

est un polynôme annulateur de A. Donc toute valeur propre (réelle ou complexe) de A est racine de P (cours), soit

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, j, \overline{j}\}.$$

Si A a j comme valeur propre, alors j est racine de χ_A. Or, χ_A est un polynôme **réel** car $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\overline{j}$ est aussi racine de χ_A, avec même multiplicité comme racine de χ_A que j. Idem si c'est $\overline{j}$ qui est racine de P.
En notant alors p la multiplicité de 0 comme racine de χ_A (qui peut être éventuellement nulle) et q celle de j (donc de $\overline{j}$ aussi), on a alors, puisque $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, j, \overline{j}\}$, que

$$\mathrm{tr}(A) = p \times 0 + qj + q\overline{j} = q \cdot 2\mathrm{Re}(j) = -q$$

(car $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$).
Donc

$$\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$$

(et même $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}^-$).

Exercice 8. A et B sont semblables, donc il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$Q^{-1}AQ = B.$$

Alors (cours, mais sinon c'est une récurrence directe), pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Q^{-1}A^kQ = B^k.$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k.$$

Alors

$$Q^{-1}P(A)Q = Q^{-1} \times \left(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\right) \times Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^{-1}A^kQ = \sum_{k=0}^{p} a_k B^k = P(B).$$

Donc les matrices $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.

Exercice 9. • A est diagonalisable, donc il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D une matrice diagonale avec $Q^{-1}AQ = D$, et les coefficients de D sont des valeurs propres de A.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Q^{-1}A^kQ = D^k$$

(c'est du cours, mais on peut le montrer rapidement par récurrence). Puis, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, si on écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors

$$Q^{-1}P(A)Q = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\right)Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^{-1}A^kQ = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = P(D).$$

Notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors

$$P(D) = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Donc $P(A)$ est semblable à $P(D)$ qui est une matrice diagonale, donc est une matrice diagonalisable.

• Supposons $n \geq 2$. Soit $A = E_{1,n}$ (la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui sur la première ligne et dernière colonne), alors

$$A^2 = 0_n$$

(car $n \geq 2$), donc A^2 est diagonalisable.
Mais A n'est pas diagonalisable. En effet, A est triangulaire, avec que des 0 sur la diagonale, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Si on avait A diagonalisable, il existerait P une matrice inversible et D une matrice diagonale avec $P^{-1}AP = D$, et les coefficients diagonaux de D seraient des valeurs propres de A, donc seraient nuls. Donc on aurait

$$D = 0_n, \qquad \text{puis} \qquad A = PDP^{-1} = P \times 0_n \times P^{-1} = 0_n,$$

ce qui est faux.
Donc la réciproque est fausse pour $P = X^2$.

Remarque. Pour certains P, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la réciproque est vraie (cf. DM ? où on le voit pour $P = X^k$, avec k impair).

Exercice 10. Première méthode : • Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors il existe $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $AY = \lambda Y$ et $Y \neq 0_{n,1}$. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k Y = \lambda Y$ (d'ailleurs, c'est du cours). Donc, si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors

$$P(A)Y = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k Y = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k Y = P(\lambda)Y.$$

Comme $Y \neq 0_{n,1}$, on en déduit que

$$P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\big(P(A)\big).$$

D'où l'inclusion

$$\big\{P(\lambda),\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\big\} \subset \mathrm{Sp}\big(P(A)\big).$$

• Réciproquement, soit $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$, grâce au théorème de D'Alembert-Gauss, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$ (en notant $p = \deg(P)$) avec

$$P(X) - \mu = \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)$$

(car P non constant, donc $\deg(P) \geq 1 > \deg(\mu)$, donc $\deg\big(P - \mu\big) = \det(P) = p$). Si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_k \notin \mathrm{Sp}(A)$, alors la matrice $A - \alpha_k I_n$ est inversible, et donc par produit,

$$P(A) - \mu I_n = \prod_{k=1}^{p} (A - \alpha_k I_n)$$

est inversible (comme produit de matrices inversibles). Mais $\mu \in \mathrm{Sp}\big(P(A)\big)$, donc la matrice

$$P(A) - \mu I_n$$

n'est pas inversible, contradiction. Donc il existe $k \in [\![1, n]\!]$ avec $\alpha_k \in \mathrm{Sp}(A)$, et par définition

$$P(\alpha_k) - \mu = 0, \qquad \text{soit} \qquad \mu = P(\alpha_k).$$

D'où l'inclusion

$$\mathrm{Sp}\big(P(A)\big) \subset \big\{P(\lambda),\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\big\}.$$

- Par double inclusion, on a bien l'égalité

$$\mathrm{Sp}\big(P(A)\big) = \big\{P(\lambda),\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\big\}.$$

Deuxième méthode : il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec $T = Q^{-1}AQ$ triangulaire, et les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on a $T^k = Q^{-1}A^kQ$. Donc, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors

$$P(T) = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^{-1}A^kQ = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\right)Q = Q^{-1}P(A)Q.$$

Donc $P(A)$ est semblable à $P(T)$, donc ces deux matrices ont même valeurs propres.

Or, si $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \star & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

puis par somme,

$$P(T) = \sum_{k=0}^{p} a_k T^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\lambda_1^k & \star & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & \star & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\mathrm{Sp}\big(P(A)\big) = \mathrm{Sp}\big(P(T)\big) = \big\{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)\big\} \qquad \text{où} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

Exercice 11. • χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (théorème de D'Alembert-Gauss), donc A est trigonalisable : il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et T une matrice triangulaire avec

$$Q^{-1}AQ = T.$$

En particulier, A et T sont semblables, donc

$$\chi_A = \chi_T.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Q^{-1}A^kQ = T^k$$

(c'est du cours, mais on peut le montrer rapidement par récurrence). Puis, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, si on écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors

$$Q^{-1}P(A)Q = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\right)Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^{-1}A^kQ = \sum_{k=0}^{p} a_k T^k = P(T).$$

Donc $P(A)$ et $P(T)$ sont semblables, donc
$$\chi_{P(A)} = \chi_{P(T)}.$$

- Notons $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} \left(X - \lambda_i\right),$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

(les coefficients $\star$ dépendent de k...).
Alors, toujours en écrivant $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, on a

$$P(T) = \sum_{k=0}^{p} a_k T^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda_1^k & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & P(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

et comme $P(T)$ est une matrice triangulaire, on en déduit

$$\chi_{P(A)} = \chi_{P(T)} = \prod_{i=1}^{n} \left(X - P(\lambda_i)\right).$$

Exercice 12. Notons $Q = P - \lambda$, alors comme P est non constant, Q est aussi non constant. Donc le théorème de D'Alembert-Gauss donne (si on note $p = \deg(Q)$) qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ (les racines de Q, comptées avec multiplicité) et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ (le coefficient dominant de Q) avec

$$Q = \alpha(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p).$$

Si, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, λ_i n'est pas valeur propre de A, donc si la matrice $A - \lambda_i I_n$ est inversible, alors par produit de matrices inversibles et par produit avec un scalaire non nul, la matrice

$$P(A) - \lambda I_n = Q(A) = \alpha(A - \lambda_1 I_n) \dots (A - \lambda_p I_n)$$

est inversible, donc λ n'est pas valeur propre de $P(A)$.
En contraposant, si λ est une valeur propre de A, il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que la racine λ_i de Q soit valeur propre de A. Il existe donc $\mu \in \mathbb{C}$ avec $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$ et

$$0 = Q(\mu) = P(\mu) - \lambda, \qquad \text{soit} \qquad P(\mu) = \lambda$$

($\mu = \lambda_i$ convient).

Exercice 13. 1) $A^3 = A^2$, donc
$$P = X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$$
est un polynôme annulateur de A. Donc les valeurs propres de A sont des racines de P, donc

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1\}.$$

Notons p la multiplicité de 0 comme racine de χ_A ($p = 0$ si 0 n'est pas racine de χ_A), et q celle de 1 (idem). Alors on a

$$p + q = \deg(\chi_A) = n,$$

car 0 et 1 sont les seules racines possibles de χ_A.
De plus, toujours car $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$, on a

$$\mathrm{tr}(A) = p \times 0 + q \times 1 = q.$$

Comme on suppose $\mathrm{tr}(A) = n$, on a alors

$$q = n, \qquad \text{et donc} \qquad p = 0.$$

Donc 0 n'est pas valeur propre de A (car sa multiplicité p est nulle), et 1 est valeur propre de multiplicité n. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\}}.$$

2) De plus, comme 1 est la seule racine de χ_A, qui est un polynôme unitaire de degré n, on en déduit

$$\boxed{\chi_A = (X - 1)^n}.$$

3) Enfin, 0 n'est pas valeur propre de A, donc la matrice A est inversible. Donc, en multipliant l'égalité $A^3 = A^2$ par $(A^{-1})^2$, on obtient

$$\boxed{A = I_n}.$$

Exercice 14. Si A est inversible, alors

$$A^2 = A - 2I_5,$$

soit $P(A) = 0_5$ avec

$$P = X^2 - X + 2.$$

Mais P n'a pas de racines réelles, donc A n'a pas de valeurs propres réelles.
Mais A est de taille 5, donc χ_A est de degré 5, impair. Donc

$$\lim_{-\infty} \chi_A = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{+\infty} \chi_A = +\infty.$$

Comme χ_A est continue, le théorème des valeurs intermédiaires donne que χ_A s'annule sur $\mathbb{R}$, donc que A a une valeur propre réelle. Contradiction.
Donc A n'est pas inversible.

Exercice 15. Le polynôme

$$P = (X + 2)X(X - 1)$$

est un polynôme annulateur de A, donc

$$(A + 2I_n)A(A - I_n) = 0_n.$$

Comme -2 n'est pas valeur propre de A, la matrice

$$A - (-2)I_n = A + 2I_n$$

est inversible. En multipliant à gauche par $(A + 2I_n)^{-1}$ l'égalité précédente, on a alors

$$A(A - I_n) = 0_n, \qquad \text{soit} \qquad A^2 - A = 0_n, \qquad \text{soit} \qquad A^2 = A.$$

Donc A est la matrice d'un projecteur.

Exercice 16. • Supposons $P(A) = 0_n$, autrement dit P est un polynôme annulateur de A. Alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $P(\lambda) = 0$ (c'est du cours).
• Supposons, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $P(\lambda) = 0$.
A est diagonalisable, donc il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D une matrice diagonale avec $Q^{-1}AQ = D$, et les coefficients de D sont des valeurs propres de A.
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Q^{-1}A^kQ = D^k$$

(c'est du cours, mais on peut le montrer rapidement par récurrence). Puis, pour $P \in \mathbb{K}[X]$, si on écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors

$$Q^{-1}P(A)Q = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\right)Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^{-1}A^kQ = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = P(D).$$

Notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors

$$P(D) = \sum_{k=0}^{p} a_k D^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Puis, comme pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)$, par hypothèse on a $P(\lambda_i) = 0$, et donc

$$P(D) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} = 0_n.$$

Enfin,

$$P(A) = QP(D)Q^{-1} = Q \times 0_n \times Q^{-1} = 0_n.$$

• Par double implication, on a bien l'équivalence demandée.

Exercice 17. 1) On a

$$MN \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \det(MN) \neq 0 \Leftrightarrow \det(M)\times\det(N) \neq 0 \Leftrightarrow \Big(\det(M) \neq 0 \text{ et } \det(N) \neq 0\Big) \Leftrightarrow \Big(M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ et } N \in \mathrm{GL}$$

2) Soient λ_1, …, λ_n les valeurs propres de A, répétées autant de fois que leur multiplicité, de sorte que

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i).$$

On a donc

$$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{n}(B - \lambda_i I_n).$$

D'après la première question (et une récurrence immédiate), $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $B - \lambda_i I_n$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\lambda_i \notin \mathrm{Sp}(B).$$

Ceci revient bien à dire que

$$\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$$

(puisque $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$).

Exercice 18. Notons α le coefficient dominant de Q.
Ce n'est pas dit dans l'énoncé, mais on suppose Q non nul (donc $\alpha \neq 0$). Alors Q est un polynôme non constant. Soit $p = \deg(Q)$, alors
$$p \geq 1 \qquad \text{et} \qquad \deg(Q') = p - 1,$$
et le coefficient dominant de Q' est $p\alpha$. Par le théorème de D'Alembert-Gauss, il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$ avec
$$Q' = p\alpha(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_{p-1}).$$
Puis, pour tout $i \in [\![1, p-1]\!]$, si la matrice $A - \lambda_i I_n$ n'est pas inversible, alors λ_i est une valeur propre de A, donc une racine de Q puisque Q est un polynôme annulateur de A. Mais λ_i est aussi racine de Q', et donc λ_i serait racine au moins double de Q, ce qui contredit l'énoncé. Donc la matrice $A - \lambda_i I_n$ est inversible.
Alors, par produit de matrices inversibles et d'un complexe non nul, la matrice
$$Q'(A) = p\alpha(A - \lambda_1 I_n) \times \dots \times (A - \lambda_{p-1} I_n)$$
est inversible.

Exercice 19. • Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et supposons λ racine de P. Il existe alors $Q \in \mathbb{C}[X]$ avec
$$P = (X - \lambda)Q, \qquad \text{puis} \qquad P(A) = (A - \lambda I_n)Q(A).$$
Comme $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, et donc
$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$
Alors
$$\det\big(P(A)\big) = \det(A - \lambda I_n)\det\big(Q(A)\big) = 0 \times \det\big(Q(A)\big) = 0,$$
et donc la matrice $P(A)$ n'est pas inversible.
En contraposant, on a alors montré : si $P(A)$ est inversible, alors aucune racine de P n'est valeur propre de A.
• Supposons P non constant.
Supposons qu'aucune racine de P n'est valeur propre de A. Par le théorème de D'Alembert-Gauss, si on note α le coefficient dominant de P (non nul car P est non nul) et $p = \deg(P)$, alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ tel que
$$P = \alpha \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i).$$
Soit $i \in [\![1, p]\!]$, alors λ_i est racine de P, et donc par hypothèse n'est pas valeur propre de A, donc la matrice $A - \lambda_i I_n$ est inversible. Alors, par produit de matrices inversibles et d'un complexe non nul, la matrice
$$P(A) = \alpha \prod_{i=1}^{p} (A - \lambda_i I_n)$$
est inversible.
Si P est constant non nul égal à α, alors
$$P(A) = \alpha I_n$$
est bien inversible.
Si P est nul, alors il ne vérifie pas que « aucune racine de P n'est valeur propre de A ». En effet, comme on considère les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$, il en existe, et cette valeur est racine du polynôme nul...
Par disjonction des cas, on a bien montré : si aucune racine de P n'est valeur propre de A, alors $P(A)$ est inversible.

Exercice 20. Supposons P non constant (le seul polynôme constant annulateur d'une matrice est le polynôme nul, qui vérifie bien l'égalité voulue), et notons $p = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$.
Il existe alors $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tel que
$$P = a_0 + \dots + a_p X^p.$$
Supposons $a_0 = P(0) \neq 0$. Alors
$$0_n = P(N) \qquad \text{se réécrit} \qquad N \times \frac{1}{-a_0}(a_1 I_n + \dots + a_p N^{p-1}) = I_n,$$

donc la matrice N est inversible (d'inverse $\frac{1}{-a_0}(a_1 I_n + \cdots + a_p N^{p-1})$), et donc par produit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N^k aussi. Mais il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0_n$ car N est nilpotente, contradiction. Donc

$$P(0) = 0.$$

Exercice 21. 1) • Si N est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que X^p soit un polynôme annulateur de N. Donc les valeurs propres de N sont des racines de X^p, donc

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(N) \subset \{0\}.$$

Par conséquent, χ_N n'a qu'une seule racine complexe possible : 0. Comme $\deg(\chi_N) = n$ et χ_N est unitaire, et que le théorème de D'Alembert-Gauss donne χ_N scindé dans $\mathbb{C}[X]$, on en déduit

$$\chi_N = X^n.$$

• Si $\chi_N = X^n$, le théorème de Cayley-Hamilton donne alors

$$N^n = 0_n,$$

et comme $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit bien que la matrice N est nilpotente.
• Par double implication, on a bien montré l'équivalence voulue.
2a) • Si la matrice N est nilpotente, alors la question précédente donne

$$\chi_N = X^n,$$

et le théorème de Cayley-Hamilton donne alors

$$N^n = 0_n.$$

• La réciproque est directe.
2b) • Si N est nilpotente, alors la question précédente donne

$$\chi_N = X^n,$$

donc χ_N est scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Donc N est trigonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, et est donc semblable à une matrice triangulaire T. Les coefficients de T sont alors des racines de

$$\chi_T = \chi_N = X^n,$$

donc sont nuls. Donc T est une matrice triangulaire stricte.
• Si N est semblable à une matrice triangulaire stricte T, alors

$$\chi_N = \chi_T,$$

et comme T est triangulaire,

$$\chi_T = \prod_{k=1}^{n} (X - t_{k,k}),$$

et comme T est triangulaire stricte, $t_{k,k} = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Donc

$$\chi_N = \chi_T = \prod_{k=1}^{n} X = X^n.$$

Donc N est nilpotente par la question 1.
3a) Par la question 2b, comme N est nilpotente, on sait que N est semblable à une matrice triangulaire stricte T. Il existe donc une matrice inversible P avec

$$P^{-1}NP = T = \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$I_n + N = I_n + PTP^{-1} = P \times \big(I_n + T\big) \times P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

et donc

$$\det(I_n + N) = \det(P) \det \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & 1 \end{pmatrix} \det\left(P^{-1}\right) = \det(P) \times 1^n \times \det(P)^{-1} = 1 \neq 0.$$

Donc la matrice $I_n + N$ est inversible.
3b) *Faisons l'analogie avec les réels : pour $x \in]-1,1[$, on sait*

$$(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

On ne peut pas remplacer x par N car la somme est infinie. Mais, si on imagine qu'on peut le faire, que se passe-t-il ? Comme N est nilpotente, on a $N^k = 0_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq n$, et donc on aurait

$$(I_n + N)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} N^k.$$

On va montrer que c'est correct.
Posons donc

$$M = \sum_{k=0}^{n-1} N^k.$$

Alors

$$(I_n + N) \times M = (I_n + N) \sum_{k=0}^{n-1} N^k = \sum_{k=0}^{n-1} N^k - \sum_{k=0}^{n-1} N^{k+1} \underset{p=k+1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} N^k - \sum_{p=1}^{n} N^k = N^0 - N^n = I_n - N^n = I_n,$$

car N est nilpotente, donc $N^n = 0_n$.
Donc

$$\boxed{(I_n + N)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} N^k}.$$

Exercice 22. Calcul préliminaire : par récurrence directe sur $k \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}.$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^{p+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k.$$

Alors

$$P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k A^k & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k B^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}.$$

• Si M est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples Q annulateur de M, soit

$$Q(M) = 0.$$

Donc, par le calcul préliminaire, on a

$$Q(A) = 0 \qquad \text{et} \qquad Q(B) = 0,$$

donc il existe un polynôme scindé à racines simples Q annulateur de A, donc A est diagonalisable, et de même pour B.
• Si A et B sont diagonalisables, il existe P et Q polynômes scindés à racines simples avec $P(A) = 0$ et $Q(B) = 0$. Notons $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble des racines de P et Q réunies (et comme c'est un ensemble, si une racine est commune à P et Q, on ne la met qu'une seule fois) [1]. Ainsi si on note

$$R = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i),$$

on a

$$P|R \qquad \text{et} \qquad Q|R$$

(car P et Q sont à racines simples, et chaque racine de P et Q sont racines de R), donc il existe T_1 et $T_2 \in \mathbb{C}[X]$ avec

$$R = T_1 \times P \qquad \text{et} \qquad R = T_2 \times Q,$$

puis

$$R(A) = T_1(A) \times P(A) = T_1(A) \times 0 = 0, \qquad R(B) = T_2(B) \times Q(B) = T_2(B) \times 0 = 0.$$

Donc R est un polynôme annulateur de A et B, donc de M (par le calcul préliminaire), et est scindé à racines simples par construction. Donc la matrice M est diagonalisable.
• Par double implication, on a bien montré l'équivalence souhaitée.

Exercice 23. 1) • Notons, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$P_k = X^k.$$

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$P_k(\phi_A)(M) = A^k M$$

pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Initialisation : pour $k = 0$, $P_0 = X^0 = 1$, donc

$$P_0(\phi_A) = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$$

vérifie, pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$P_0(\phi_A)(M) = M = I_n M = A^0 M.$$

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que, pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on ait

$$P_k(\phi_A)(M) = A^k M.$$

Comme $P_{k+1} = P_k \times P_1$, on a alors pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$P_{k+1}(\phi_A)(M) = P_k(\phi_A) \circ P_1(\phi_A)(M) = P_k(\phi_A)\big(P_1(\phi_A)(M)\big) \underset{\text{H.R.}}{=} A^k \times \big(P_1(\phi_A)(M)\big) = A^k \times (AM) = A^{k+1} M,$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$P_k(\phi_A)(M) = A^k M.$$

• Soit ensuite $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors il existe $d \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k P_k.$$

1. Rappelons qu'un ensemble est, par définition, formé que d'éléments deux à deux différents.

Par conséquent, pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$P(\phi_A)(M) = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k P_k(\phi_A)\right)(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k P_k(\phi_A)(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k M = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right) M = P(A)M.$$

2) • Supposons A diagonalisable, alors il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples tel que

$$P(A) = 0_n.$$

Donc, pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$P(\phi_A)M = P(A)M = 0_n \times M = 0_n.$$

Donc

$$P(\phi_A) = 0$$

(l'endomorphisme nul de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$). Donc P est un polynôme annulateur de ϕ_A, P est scindé à racines simples, donc ϕ_A est diagonalisable.

• Réciproquement, supposons ϕ_A diagonalisable, alors il existe P polynôme annulateur de ϕ_A avec P scindé à racines simples, donc pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$0_n = P(\phi_A)(M) = P(A)M.$$

En prenant $M = I_n$, on a alors

$$P(A) = 0_n.$$

Donc P est un polynôme annulateur de A, P est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

• Par double implication, on a bien l'équivalence voulue.

Exercice 24. 1a) Le polynôme

$$X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

est un polynôme annulateur de A, n'a que 1 comme racine, donc

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}.$$

Comme A a au moins une racine complexe (car χ_A étant de degré n avec $n \geq 1$, le théorème de D'Alembert-Gauss assure que χ_A a au moins une racine complexe), on en déduit

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\}}.$$

1b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculons le reste de la division euclidienne de X^p par $(X-1)^2$. La division euclidienne donne : il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, $R \in \mathbb{R}[X]$ avec

$$\deg(R) < \deg\left((X-1)^2\right) = 2$$

tel que

$$X^p = (X-1)^2 \times Q + R.$$

Comme $\deg(R) < 2$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec

$$R = aX + b, \qquad \text{et donc on a} \qquad X^p = (X-1)^2 \times Q + aX + b.$$

En évaluant cette égalité en 1, on a alors

$$1 = 1^p = 0 \times Q(1) + a \times 1 + b = a + b.$$

Pour exploiter le fait que $(X-1)^2$ admet 1 comme racine double, dérivons l'égalité polynomiale précédente : pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$pX^{p-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + a,$$

et évalué en 1 on obtient

$$p = 0 \times Q(1) + 0 \times Q'(1) + a = a.$$

Donc
$$a = p \qquad \text{et} \qquad b = 1 - p,$$
ce qui donne
$$X^p = (X-1)^2 Q + pX + 1 - p.$$
En évaluant en A, cela donne
$$A^p = (A - I_n)^2 Q(A) + pA + (1-p)I_n = \boxed{pA + (1-p)I_n},$$
car $(A - I_n)^2 = 0_n$.

Remarque. On peut vérifier directement que cette formule reste valable pour $p = 0$.

Autre méthode : posons $N = A - I_n$, alors $N^2 = 0_n$ (donc $N^k = 0_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$), puis les matrices N et I_n commutent, donc la formule du binôme de Newton donne : pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$A^p = (I_n + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k = I_n + pN + \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} 0_n = I_n + pN.$$

Remarque. En toute rigueur, cette formule n'est valable que pour $p \geq 2$. On vérifie directement qu'elle reste vraie pour $p = 0$ et $p = 1$.

Enfin, comme $N = A - I_n$, on a alors
$$A^p = I_n + p(A - I_n) = \boxed{pA + (1-p)I_n}.$$

2) On suppose $n \geq 2$ (sinon c'est faux, car pour $n = 1$, toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonale, donc diagonalisable).
On prend $A = I_n + E_{1,n}$. Alors
$$A^2 - 2A + I_n = (A - I_n)^2 = (E_{1,n})^2 = 0_n$$
(la dernière égalité n'est vraie que pour $n \geq 2$).
Il reste à voir que A n'est pas diagonalisable. Or, A est triangulaire, n'a que des 1 sur la diagonale, donc
$$\mathrm{Sp}(A) = \{1\}.$$
Si A était diagonalisable, il existerait $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ serait diagonale, et les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ seraient des valeurs propres de A, donc vaudraient 1.
On aurait donc
$$P^{-1}AP = I_n, \qquad \text{soit} \qquad A = PI_nP^{-1} = I_n,$$
ce qui est faux (car $E_{1,n} \neq 0_n$).
Donc la matrice A n'est pas diagonalisable.
Cette matrice A convient donc.

Exercice 25. 1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$\chi_{2M}(\lambda) = \det(\lambda I_n - 2M) = \det(2I_n)\det\left(\frac{\lambda}{2} I_n - M\right) = 2^n \chi_M\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

2) Comme M et $2M$ sont semblables, elles ont mêmes valeurs propres. Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, si $\chi_M(\lambda) = 0$, alors
$$0 = \chi_{2M}(\lambda) = 2^n \chi_M\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$
Donc si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, alors $\frac{\lambda}{2}$ aussi. Puis, par récurrence directe, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\frac{\lambda}{2^k} \in \mathrm{Sp}(M).$$
Mais si $\lambda \neq 0$, cela fait une infinité de valeurs propres deux à deux différentes, ce qui est impossible (M a au plus n valeurs propres).

Donc
$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{0\}.$$
Et comme M a au moins une valeur propre complexe, on a
$$\mathrm{Sp}(M) = \{0\}.$$
Donc
$$\chi_M = X^n,$$
et le théorème de Cayley-Hamilton conclut :
$$M^n = 0_n.$$
Donc la matrice M est nilpotente.

Exercice 26. Faisons une disjonction de cas :

- Si 0 est valeur propre de f, alors f a trois valeurs propres différentes, et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc l'endomorphisme f est diagonalisable.
- Si 0 n'est pas valeur propre de f, alors f est injectif, donc bijectif (car endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie), et donc en composant l'égalité $f^2 = f^4$ par $(f^{-1})^2$, on obtient
$$\mathrm{Id} = f^2 \circ (f^{-1})^2 = f^4 \circ (f^{-1})^2 = f^2.$$
Donc l'endomorphisme f est une symétrie, donc est diagonalisable.

Dans tous les cas, l'endomorphisme f est diagonalisable.

Exercice 27. 1) Après calculs,
$$\chi_A = X^3 - 4X^2 + 6X - 4.$$
Les valeurs propres sont alors
$$2, \qquad 1+i \qquad \text{et} \qquad 1-i.$$
2) Si A était diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, A aurait toutes ses valeurs propres réelles, ce qui n'est pas le cas, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.
Puis, A est de taille 3, a trois valeurs propres deux à deux différentes dans $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$.
3) Le théorème de Cayley-Hamilton donne
$$A^3 - 4A^2 + 6A - 4I_3 = 0_3,$$
donc pour $n \in \mathbb{N}$, en multipliant par A^n,
$$A^{n+3} - 4A^{n+2} + 6A^{n+1} - 4A^n = 0_3,$$
puis en prenant la trace, et par linéarité de la trace, on trouve
$$t_{n+3} - 4t_{n+2} + 6t_{n+1} - 4t_n = 0.$$
4) • A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ et a trois valeurs propres simples, 2, $1+i$ et $1-i$. Donc il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ inversible avec
$$D := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix},$$
et par récurrence directe, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (1+i)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-i)^n \end{pmatrix} = D^n = P^{-1}A^nP.$$
Or, deux matrices semblables ont même trace, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$t_n = \mathrm{tr}(A^n) = \mathrm{tr}(D^n) = 2^n + (1-i)^n + (1+i)^n.$$

Or
$$|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}, \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{1\pm i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
et donc
$$\left(\frac{1\pm i}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{soit} \qquad t_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n.$$

- Par conséquent, la série entière
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} t_n x^n$$
a même rayon de convergence que la série entière
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (2x)^n$$
qui est une série géométrique de raison $2x$, qui converge donc si et seulement si $|2x| < 1$, et qui a donc pour rayon
$$\boxed{\frac{1}{2}}.$$

- Notons alors
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n x^n$$
pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. On a (toutes les séries convergeant bien pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$) :
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \big(t_{n+3} - 4t_{n+2} + 6t_{n+1} - 4t_n\big)x^{n+3} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} t_{n+3}x^{n+3} - 4x\sum_{n=0}^{+\infty} t_{n+2}x^{n+2} + 6x^2\sum_{n=0}^{+\infty} t_{n+1}x^{n+1} - 4x^3\sum_{n=0}^{+\infty} t_n x^n \\ &= \big(S(x) - t_0 - t_1x - t_2x^2\big) - 4x\big(S(x) - t_0 - t_1x\big) + 6x^2\big(S(x) - t_0\big) - 4x^3S(x) \end{aligned}$$
Donc
$$(1 - 4x + 6x^2 - 4x^3)S(x) = t_0 + (t_1 - 4t_0)x + (t_2 - 4t_1 + 6t_0)x^2,$$
et comme
$$t_0 = \operatorname{tr}(I_3) = 3, \qquad t_1 = \operatorname{tr}(A) = 4 \qquad \text{et} \qquad t_2 = \operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} -4 & \star & \star \\ \star & 0 & \star \\ \star & \star & 8 \end{pmatrix}\right) = 4,$$
on a
$$\boxed{S(x) = \frac{3 - 8x + 6x^2}{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3}}.$$

Exercice 28. **1)** Si A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale avec
$$P^{-1}AP = D.$$
Donc
$$P^{-1}A^2P = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = D^2,$$
et D^2 reste une matrice diagonale. Donc A^2 est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, puisque semblable à une matrice diagonale.

2) La matrice proposée est $E_{1,n}$ (matrice de la base canonique). On a
$$E_{1,n}^2 = 0_n$$
(car $n \geq 2$), donc $E_{1,n}^2$ est diagonalisable (et même diagonale).

Mais $E_{1,n}$ est triangulaire, n'a que des 0 sur la diagonale, donc

$$\mathrm{Sp}(E_{1,n}) = \{0\}.$$

Puis, si $E_{1,n}$ est diagonalisable, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale avec

$$E_{1,n} = PDP^{-1}.$$

De plus, les coefficients diagonaux de D sont des valeurs propres de $E_{1,n}$, donc nuls, donc $D = 0_n$. Donc

$$E_{1,n} = P \times 0_n \times P^{-1} = 0_n,$$

ce qui est faux !
Donc $E_{1,n}^2$ est diagonalisable alors que $E_{1,n}$ le n'est pas. Donc la réciproque est fausse.
3) Une matrice est diagonalisable si et seulement si elle a un polynôme annulateur scindé à racines simples.
4) • Supposons A^2 diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe donc un polynôme P scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (que l'on peut supposer unitaire) à racines simples annulateur de A^2. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ deux à deux distincts tel que

$$P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$$

soit annulateur de A^2, autrement dit

$$\prod_{k=1}^{p} (A^2 - \lambda_k I_n) = 0_n.$$

• Si l'un des λ_k est nul, par exemple si $\lambda_p = 0$ (quitte à renuméroter), alors on a

$$A^2 \prod_{k=1}^{p-1} (A^2 - \lambda_k I_n) = 0_n,$$

et comme A est inversible, en multipliant par $(A^{-1})^2$, on a alors

$$\prod_{k=1}^{p-1} (A^2 - \lambda_k I_n) = 0_n.$$

On peut donc supposer les α_k tous non nuls.
• Alors on peut les écrire sous forme polaire : pour tout $k \in [\![1, p]\!]$,

$$\lambda_k = \rho_k e^{i\theta_k}$$

avec $\rho_k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_k \in \mathbb{R}$, et si on note

$$\alpha_k = \sqrt{\rho_k} e^{i\frac{\theta_k}{2}},$$

on a

$$X^2 - \lambda_k = (X - \alpha_k)(X + \alpha_k), \qquad \text{soit} \qquad 0_n = \prod_{k=1}^{p} (A^2 - \lambda_k I_n) = \prod_{k=1}^{p} (A - \alpha_k I_n)(A + \alpha_k I_n).$$

Alors le polynôme

$$Q = \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)(X + \alpha_k)$$

est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (*ce n'est pas une grosse surprise, puisque tout polynôme non constant est scindé dans* $\mathbb{C}[X]$*...*) et annulateur de A. De plus, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$,

$$-\alpha_k = \alpha_k \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_k = \alpha_k^2 = 0,$$

ce qui est faux. Et, pour $(k, \ell) \in [\![1, p]\!]^2$,

$$\pm\alpha_k = \pm\alpha_\ell \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_k = (\pm\alpha_k)^2 = (\pm\alpha_\ell)^2 = \lambda_\ell \qquad \Rightarrow \qquad k = \ell,$$

et dans ce cas, on a vu $-\alpha_k = \alpha_k$ est impossible. Donc les racines de Q sont simples.
Donc la matrice A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
5) • Si A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale avec

$$P^{-1}AP = D.$$

Donc

$$P^{-1}A^2P = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = D^2.$$

Puis, comme P et P^{-1} sont inversibles, multiplier par P ou P^{-1} ne change pas le rang. Donc

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\big(P^{-1}AP\big) = \mathrm{rg}(D), \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(A^2) = \mathrm{rg}(P^{-1}A^2P) = \mathrm{rg}(D^2).$$

Enfin, comme D est diagonale, le rang de D vaut le nombre de coefficient non nuls sur la diagonale. De même, comme D^2 est diagonale, le rang de D^2 vaut le nombre de coefficient non nuls sur la diagonale. Or, ce nombre est le même (car pour $i \in [\![1, n]\!]$, $(D^2)_{i,i} = (D_{i,i})^2$, donc $(D^2)_{i,i} = 0 \Leftrightarrow D_{i,i} = 0$), donc

$$\mathrm{rg}(D) = \mathrm{rg}(D^2).$$

Donc

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2),$$

puis par le théorème du rang (appliqué à A puis à A^2),

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = n - \mathrm{rg}(A) = n - \mathrm{rg}(A^2) = \dim\big(\mathrm{Ker}(A^2)\big).$$

• Enfin, pour $X \in \mathrm{Ker}(A)$, on a $AX = 0_{n,1}$, donc

$$A^2X = A \times AX = A \times 0_{n,1} = 0_{n,1},$$

donc $X \in \mathrm{Ker}(A^2)$. On a donc l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2).$$

• On a donc une inclusion et l'égalité des dimensions, ce qui permet de conclure :

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2).$$

Exercice 29. **1)** • Montrons $A^kB = BA^k$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
Initialisation : pour $k = 0$, $A^0 = I_n$, et I_n commute bien avec B.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $A^kB = BA^k$. Alors

$$A^{k+1}B = A \times (A^kB) \underset{\text{H.R.}}{=} A \times (BA^k) = (AB) \times A^k.$$

Or, l'énoncé donne que A et B commutent, donc que $AB = BA$. Donc

$$A^{k+1}B = (AB) \times A^k = (BA) \times A^k = BA^{k+1}.$$

D'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien

$$A^kB = BA^k.$$

• Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kBA^{k-1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

Initialisation : pour $k = 1$,

$$M^1 = 1 = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} A^1 & BA^{1-1} \\ 0 & A^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BA^0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

car $A^0 = I$. On a bien l'égalité voulue.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kBA^{k-1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$. Alors

$$M^{k+1} = M^k \times M = \begin{pmatrix} A^k & kBA^{k-1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^k \times A + 0 & A^k \times B + kBA^{k-1} \times A \\ 0+0 & 0 + A^k \times A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & BA^k + kBA^k \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix}$$

en utilisant l'égalité du début de la question. Puis, en regroupant, on a bien

$$M^{k+1} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & BA^k + kBA^k \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)BA^k \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix},$$

d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{M^k = \begin{pmatrix} A^k & kBA^{k-1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix}}.$$

Remarque. Et pour $k = 0$, $M^0 = I$ (la matrice identité), donc $M^0 = \begin{pmatrix} A^0 & 0 \\ 0 & A^0 \end{pmatrix}$.

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors

$$P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k = a_0 M^0 + \sum_{k=1}^{n} a_k M^k = a_0 \begin{pmatrix} A^0 & 0 \\ 0 & A^0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n} a_k \begin{pmatrix} A^k & kBA^{k-1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

En effectuant les combinaisons linéaires, on a alors

$$P(M) = \begin{pmatrix} a_0 A^0 + \sum_{k=1}^{n} a_k A^k & 0 + \sum_{k=1}^{n} a_k kBA^{k-1} \\ 0 & a_0 A^0 + \sum_{k=1}^{n} a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} a_k A^k & B \sum_{k=1}^{n} a_k k A^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & BP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

3) Q est un polynôme non constant, donc Q' n'est pas nul.
Écrivons

$$Q' = \alpha \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_i)$$

(c'est possible par le théorème de D'Alembert-Gauss, car on travaille dans $\mathbb{C}$) avec $\alpha \neq 0$.
Comme Q est à racines simples, et que pour $i \in [\![1, p]\!]$, λ_i est racine de Q', on a λ_i qui n'est pas racine de Q. Or, Q est un polynôme annulateur de A, donc $\mathrm{Sp}(A)$ est inclus dans les racines de Q. Donc, pour $i \in [\![1, p]\!]$, λ_i n'est pas valeur propre de A, soit la matrice $A - \lambda_i \mathrm{Id}$ est inversible.
Alors

$$Q'(A) = \alpha \prod_{k=1}^{p} (A - \lambda_i \mathrm{Id})$$

est inversible comme produit de matrices inversibles et d'un complexe non nul.
4) Si M est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples Q annulateur de M, donc par la question 2, on a aussi

$$Q(A) = 0 \qquad \text{et} \qquad BQ'(A) = 0.$$

La question 3 donne que $Q'(A)$ est inversible, donc $BQ'(A) = 0$ donne

$$B = 0 \times Q'(A)^{-1} = 0.$$

Enfin, Q est un polynôme scindé à racines simples annulateur de A, donc A est diagonalisable.
5) Supposons $B = 0$ et A diagonalisable. Alors il existe un polynôme scindé à racines simples Q annulateur de A, donc par la question 2, on a aussi $P(M) = 0$, donc Q est un polynôme scindé à racines simples annulateur de M, donc M est diagonalisable.

Exercice 30. Les polynômes

$$P = X^4 - X^3 - X^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad Q = (X-1)(X-2)$$

sont des polynômes annulateurs de A, donc $\mathrm{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P et dans l'ensemble des racines de Q, donc dans l'intersection de ces deux ensembles.
Or, les racines de Q sont 1 et 2, et 1 est racine de P mais pas 2 (car $P(2) = 5 \neq 0$), donc

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}.$$

Alors 2 n'est pas valeur propre de A, donc $A - 2I_n$ est inversible. Mais

$$0_n = Q(A) = (A - I_n)(A - 2I_n),$$

donc en multipliant par $(A - 2I_n)^{-1}$, on a

$$A - I_n = (A - I_n)(A - 2I_n)(A - 2I_n)^{-1} = Q(A) \times (A - 2I_n)^{-1} = 0_n \times (A - 2I_n)^{-1} = 0_n,$$

et donc

$$\boxed{A = I_n}.$$

Réciproquement, I_n vérifie bien les deux égalités de l'énoncé.

Exercice 31. **1)** On a

$$M \times (-M - I_n) = I_n,$$

donc la matrice M est inversible et

$$M^{-1} = -M - I_n.$$

2) Le polynôme $X^2 + X + 1$ est un polynôme annulateur de M, admet j et $j^2 = \overline{j}$ comme racines, donc

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{j, j^2\}.$$

De plus, toute matrice complexe a au moins une valeur propre complexe (car son polynôme caractéristique a au moins une racine complexe, par le théorème de D'Alembert-Gauss), donc

$$j \in \mathrm{Sp}(M) \qquad \text{ou} \qquad j^2 \in \mathrm{Sp}(M).$$

Si $j \in \mathrm{Sp}(M)$, alors j est racine de χ_M. Mais M est à coefficients réels, donc $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$. Donc j racine de χ_M donne $\overline{j} = j^2$ racine de χ_M.
Si $j^2 \in \mathrm{Sp}(M)$, alors j^2 est racine de χ_M. Mais M est à coefficients réels, donc $\chi_M \in \mathbb{R}[X]$. Donc j^2 racine de χ_M donne $\overline{j^2} = j$ racine de χ_M.
Dans tous les cas, j et j^2 sont racines de χ_M, donc dans $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. Donc, par double inclusion,

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{j, j^2\}.$$

3) Le polynôme

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$$

est un polynôme annulateur de M, scindé à racines simples (car $j \neq j^2$) dans $\mathbb{C}$, donc M est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
M n'a pas de valeur propre réelle, donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
4) • j et j^2 sont les valeurs propres de M, donc les racines de χ_M. Comme χ_M est à coefficients réels, $j^2 = \overline{j}$ est racine de χ_M de même multiplicité que j. Si on note p cette multiplicité, on a donc

$$p + p = \deg(\chi_M) = n,$$

donc n est pair.
• De plus, on a

$$\mathrm{tr}(M) = pj + pj^2 = \boxed{-p} \qquad \text{et} \qquad \det(M) = j^p (j^2)^p = (j^3)^p = \boxed{1}$$

(car $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$).

5) On a $M^2 + M + I_n = 0_n$ et $M = A^2$, donc
$$A^4 + A^2 + I_n = 0_n.$$
Donc le polynôme
$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - j)(X^2 - j^2) = (X^2 - j)(X - j)(X + j)$$
est un polynôme annulateur de A. Il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (comme tout polynôme non constant, par le théorème de D'Alembert-Gauss), et est à racines simples (le discriminant de $X^2 - j$ n'est pas nul, donc ses deux racines sont simples, et ses racines ne sont ni j ni $-j$), donc A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
Si A était diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existerait $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec
$$P^{-1}AP = D.$$
Alors on aurait
$$P^{-1}MP = P^{-1}A^2P = (P^{-1}AP)^2 = D^2$$
avec D^2 diagonale (comme carré d'une matrice diagonale) et à coefficients réels (car D l'est), donc M serait semblable à une matrice diagonale dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, donc serait diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui est faux. Donc
$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathrm{M}_n(\mathbb{R})}.$$

6) Le polynôme
$$(X^2 - j)(X - j)(X + j)$$
est un polynôme annulateur de A. Comme $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, ce polynôme admet j, $-j$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{3}}$ comme racines, soit
$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Donc
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$
De plus, comme
$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
et que A est à coefficients réels (donc $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$), alors
$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
ont même multiplicité r comme racine de χ_A (*avec éventuellement* $r = 0$ *si ces nombres ne sont pas racines*).
De même, comme
$$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
et que A est à coefficients réels (donc $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$), alors
$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
ont même multiplicité s comme racine de χ_A (*avec éventuellement* $r = 0$ *si ces nombres ne sont pas racines*).
Comme ces 4 nombres sont les seules racines possibles de χ_A, on a alors
$$r + r + s + s = \deg(\chi_A) = n, \qquad \text{soit} \qquad r + s = \frac{n}{2}.$$
De plus, comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}[X]$, et que les 4 nombres précédents sont les seules racines possibles de χ_A dans $\mathbb{C}$, on a alors
$$r\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + r\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + s\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + s\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathrm{tr}(A),$$
soit
$$s - r = \mathrm{tr}(A).$$
Donc
$$\mathrm{tr}(A) = \frac{n}{2} - 2r$$
et comme $2r$ est un entier pair, on en déduit que $\mathrm{tr}(A)$ a même parité que $\frac{n}{2}$.