# DS 3 - Intégrales généralisées, réduction

Samedi 29/11/2025 - 4h

**Calculatrice interdite**

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.

## Exercice 1 - ITC - Mines-Ponts Informatique 2021 (extrait de la partie 1)

Lors de la préparation d'une randonnée, une accompagnatrice doit prendre en compte les exigences des participants. Elle dispose d'informations rassemblées dans deux tables d'une base de données :

- la table `Rando` décrit les randonnées possibles - la clef primaire entière **rid**, son nom, le niveau de difficulté du parcours (entier entre 1 et 5), le dénivelé (en mètres), la durée moyenne (en minutes) :

| rid | rnom | diff | deniv | duree |
|---|---|---|---|---|
| 1 | La belle des champs | 1 | 20 | 30 |
| 2 | Lac de Castellane | 4 | 650 | 150 |
| 3 | Le tour du mont | 2 | 200 | 120 |
| 4 | Les crêtes de la mort | 5 | 1200 | 360 |
| 5 | Yukon Ho ! | 3 | 700 | 210 |
| ... | ... | ... | ... | ... |

- la table `Participant` décrit les randonneurs - la clef primaire entière **pid**, le nom du randonneur, son année de naissance, le niveau de difficulté maximum de ses randonnées :

| pid | pnom | ne | diff_max |
|---|---|---|---|
| 1 | Calvin | 2014 | 2 |
| 2 | Hobbes | 2015 | 2 |
| 3 | Susie | 2014 | 2 |
| 4 | Rosalyn | 2001 | 4 |
| ... | ... | ... | ... |

Donner une requête SQL sur cette base pour :

1. Compter le nombre de participants nés entre 1999 et 2003 inclus.
2. Calculer la durée moyenne des randonnées pour chaque niveau de difficulté.
3. Extraire le nom des participants pour lesquels la randonnée n°42 est trop difficile.
4. Extraire les clés primaires des randonnées qui ont un ou des homonymes (nom identique et clé primaire distincte), sans redondance.

## Exercice 2 - E3A 2021 (exercice 1)

1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.
2. (a) Démontrer que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

*On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.*

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction : $\varphi : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

   Calculer $\varphi(1)$.

4. (a) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

   (b) En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right)$, déterminer la valeur de la somme :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)},$$

   après en avoir justifié l'existence.

## Exercice 3 - E3A 2021 (exercice 2)

**Question de cours**

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty, -1]$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F_1$ la fonction qui à tout $x$ de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

   Justifier que $F_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Justifier que la fonction $F$ qui à tout $x$ de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

---

Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on note $E_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $e_k$ la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ la base canonique de $E_n$.

On note $D$ l'endomorphisme dérivation de $E_n$ et Id l'endomorphisme identité de $E_n$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k \mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$.

4. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur $E_n$ une application linéaire $L$ en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t.$$

5. Soit $g \in E_n$ tel que que $g = L(f)$.

   Montrer que $g$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.

6. En déduire $\mathrm{Ker}(L)$.

7. (a) Calculer $L(e_0)$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)$.

   (c) En déduire que $L$ est un endomorphisme de $E_n$.

8. Prouver que $L$ est un automorphisme de $E_n$.

9. **Recherche de sous-espaces propres de $L$**

   Soient $\lambda$ une valeur propre de $f$ est $f$ un vecteur propre associé.

   (a) Justifier que $\lambda \neq 0$.

(b) Montrer que $f$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$ $(\star)$.
(c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\star)$.
(d) Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle $(\star)$.
(e) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme $L$ et déterminer les vecteurs propres associés. L'endomorphisme $L$ est-il diagonalisable ?

10. Comparer $L^{-1}$ et $D + \mathrm{Id}$.
11. Déterminer la matrice $M$ de $L^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$.
12. Déterminer les valeurs propres de $L^{-1}$. Retrouver alors les valeurs propres de $L$.

## Exercice 4 - CCINP 2022 (exercice 3 - la constante d'Euler)

**Présentation générale**
Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

**Partie I - Construction de la constante d'Euler**
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \Delta_n = u_n - u_{n-1}.$$

1. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a}{n^2}$.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \Delta_n$ est convergente.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

**Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler**
Dans la question 3, on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers un nombre réel que l'on note $\gamma$ dans la suite de cet exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de $\gamma$ sous la forme d'une intégrale.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction $f_n : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in ]0,+\infty[,\ f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geqslant n \end{cases}.$$

**Propriétés de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.**
Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ valable pour tout $x \in ]-1,+\infty[$.

4. Soit $t \in ]0,+\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on a :
$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).$$
5. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que pour tout $t \in ]0,+\infty[$, on a $|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$.
7. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

**Convergence d'une suite d'intégrales.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u)\mathrm{d}u.$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

8. Montrer que l'intégrale $I_n$ est convergente.
9. Déduire des résultats de la sous-partie précédente que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

10. Montrer que l'intégrale $J_n$ est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u.$$

est convergente. En déduire que l'intégrale $J_n$ est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

11. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n.$$

12. Déduire des questions précédentes que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

## Exercice 5 - CCINP PC 2024 (exercice 1) - racine cubique d'une matrice

**Présentation générale**

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.
On dit qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que $B$ est une racine cubique de $A$.

**Partie I - Étude d'un exemple**

Dans cette partie, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice $A$.

1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$ avec :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$
2. Montrer qu'une matrice $B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de $A$ si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de $D$.
3. Soit $\Delta \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de $D$. Montrer que les matrices $D$ et $\Delta$ commutent, puis en déduire que la matrice $\Delta$ est diagonale.
4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de $D$, puis l'ensemble des racines cubiques de $A$. On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de $P$ et de $\Delta$.

**Partie II - Dans un plan euclidien**

Dans cette partie, on considère un plan euclidien orienté $E$ muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}$. On fixe également un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et on note :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

5. Quelle est la nature de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M$ ?

6. En déduire une racine cubique de la matrice $M$.
7. Soit $N \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de déterminant $-1$. Montrer que $N$ admet une racine cubique.

**Partie III - Racines cubiques et diagonalisation**

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres **deux à deux distinctes** de la matrice $A$.

**Existence d'une racine cubique polynomiale**

8. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R}).$$

9. Déduire de la question précédente que la matrice $A$ admet une racine cubique. On pourra remarquer que $A$ est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme $H_p(\lambda)$ avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{R}$.

**Réduction d'une racine cubique**

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice $A$ est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} \left(X^3 - \lambda_k\right).$$

10. Montrer que les nombres $\lambda_1$, ..., $\lambda_d$ sont non nuls.
11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^\star$ que l'on écrit sous la forme $\lambda = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.
12. En déduire que le polynôme $Q$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
13. **Pour les** $5/2$ **:** Déduire des questions précédentes que si $B$ est une racine cubique de $A$, alors la matrice $B$ est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.