Correction DS 3 - Intégrales généralisées, réduction

Exercice 1 - ITC - Mines-Ponts Informatique 2021 (extrait de la partie 1)

1. On utilise **COUNT** pour compter les enregistrer et on filtre **avant** les aggrégats avec **WHERE**.

```sql
SELECT COUNT(*) FROM Participant WHERE ne >= 1999 AND ne <= 2003;
```

2. On utilise **AVG** pour le calcul de moyenne. On utilise **GROUP BY** pour que le calcul se fasse par niveau de difficulté.

```sql
SELECT AVG(duree) FROM Rando GROUP BY diff;
```

3. Celle-ci est plus compliqué. Il y a plusieurs moyens de s'y prendre. Il me semble que le plus simple est d'imbriquer deux commandes **SELECT**. La première va renvoyer le nom des participants en filtrant et la seconde intervient dans le filtre pour récupérer la difficulté de la randonnée 42. Cela donne :

```sql
SELECT pnom FROM Participant
WHERE diff_max < (SELECT diff FROM Rando WHERE rid = 42);
```

4. On peut utiliser une combinaison de **COUNT** et **GROUP BY** avec un filtrage des aggrégats **HAVING**. L'idée est de compter pour chaque nom combien d'enregistrements correspondent puis de filtrer ceux qui en ont plus de 2. Cela donne :

```sql
SELECT rnom FROM Rando GROUP BY rnom HAVING COUNT(*) >= 2;
```

Malheureusement, cela nous donne les noms et non les clés. On peut alors chaîner :

```sql
SELECT DISTINCT pid FROM Rando
WHERE rnom IN (SELECT rnom FROM Rando GROUP BY rnom HAVING COUNT(*) >= 2);
```

Une autre solution est d'utiliser une jointure mais non-conventionnelle puisqu'elle n'utilise pas de clefs. On peut mettre en correspondance les lignes qui ont même nom mais `rid` différents.

```sql
SELECT DISTINCT R1.rid AS rid
FROM Rando AS R1 JOIN Rando AS R2 ON R1.rnom = R2.rnom AND R1.rid <> R2.rid;
```

Comme c'est auto-jointure, on fixe des noms avec **AS** pour distinguer les tables. Le résultat de la jointure est l'ensemble des paires partageant le même nom mais pas le même identifiant.

Exercice 2 - E3A 2021 (exercice 1)

1. Posons pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. On a :
   - (u_n) est de signe alterné (puisque $(-1)^{n+1}u_n$ est toujours positif) ;
   - $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
   - $|u_n| = \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série décroissante.

   Ainsi, d'après le théorème spécial des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge.}}$

2. (a) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^{2n}(1-x)$.
   On pourrait passer par la convergence normale, mais cela n'est pas vrai sur $[0,1]$ et demanderait une analyse minitieuse pour rendre la méthode rigoureuse. C'est l'occasion d'utiliser le théorème de convergence dominée (version série !).
   On a :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bien définie et continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$ et donc en particulier $\boxed{\text{intégrable sur } [0,1[}$ (on verra pourquoi on enlève la borne dans quelques lignes).
- pour $x \in [0,1[$ fixé, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \\ &= (1-x)\frac{1}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

où on remarque que la série converge en tant que série géométrique de raison x avec $|x|<1$.
En revanche si $x=1$, on a $f_n(x)=0$ et donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) = 0 \neq \frac{1}{1+1}.$$

Donc $\boxed{\text{la série } \sum f_n \text{ converge simplement vers } S : x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ sur } [0,1[}$ (ouvert en 1 !).
- De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x^{2n}-x^{2n+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{x^{2n+2}}}{2n+2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.\end{aligned}$$

L'intégrale est *techniquement* impropre en 1, mais puisque tout est prolongeable par continuité, cela revient à une simple intégrale de Riemann sur $[0,1]$ comme on en a l'habitude.
Or $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4n^2}$. Par critère d'équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2}$ ont même nature.
Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2}$ est une série de Riemann (à un facteur près) convergente (car $2>1$).
Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x \text{ converge.}}$

D'après le théorème d'intégration terme à terme :
- $S : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est intégrable sur $[0,1[$ (mais on le savait déjà).
- et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}.}$$

(b) On remarque à présent que :

$$\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2}.$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

D'où finalement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).}$$

3. **Remarque :** c'est une série entière. Et clairement, le rapport de jury attend une réponse utilisant cela. Mais, comme ce n'est pas dans la liste des chapitres pour ce DS, voici une réponse alternative.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Si $|x| > 1$, alors $(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ diverge et en particulier ne tend pas vers 0. Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ diverge pour $|x| > 1$.
   - Si $|x| < 1$, on a :

$$\begin{aligned}\left|(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right| &= \frac{|x|^n}{n} \\ &= \underbrace{\frac{|x|^{\frac{n}{2}}}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} |x|^{\frac{n}{2}} \text{ (par croissance comparée)} \\ &= \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right).\end{aligned}$$

   Or $\sum |x|^{\frac{n}{2}}$ converge en tant que série géométrique de raison de module inférieur strictement à 1.
   Par critère de négligeabilité, la série $\sum \left|(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right|$ converge et donc $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ converge absolument, donc converge.
   - Si $x = 1$, on retombe sur la série de la première question et donc la série converge.
   - Si $x = -1$, alors la série est à un facteur près la série harmonique et donc diverge.

   Donc $\boxed{\varphi \text{ est définie sur }]-1, 1].}$

   De plus, on a $\boxed{\varphi(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2).}$

4. (a) $x \mapsto \frac{1-x}{1+x^2}$ est définie et continue sur $[0, 1]$ et donc intégrable sur $[0, 1]$. Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ est bien définie.
   On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \arctan(1) - \frac{1}{2}\ln(2) \\ &= \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.}\end{aligned}$$

   (b) Commençons par remarquer que :

$$(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = (-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

d'après les calculs précédents. Donc sous réserve de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}}_{=S}.$$

De plus, il y a bien convergence puisque :

$$\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\right| = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}.$$

Donc par critère d'équivalence pour des séries à termes positifs, $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\right|$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}$ ont même nature. Or $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}$ est une série de Riemann (à un facteur près) convergente (car $2>1$). Donc $\boxed{S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \text{ converge absolument}}$ et donc converge et :

$$\boxed{S=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right).}$$

Il reste à calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right)$ d'une seconde manière pour obtenir la valeur de S. Utilisons une nouvelle fois le théorème d'intégration terme à terme :

- La fonction $f_n : x\mapsto (-1)^n x^{2n}(1-x)$ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable sur $[0,1]$.
- Soit $x\in[0,1[$ fixé. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n.$$

  Or $|-x^2|<1$ et donc la série converge. On a de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(1-x) = (1-x)\frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1-x}{1+x^2}.$$

  Et si $x=1$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(1-x)=0=\frac{1-x}{1+x^2}$.
  D'où $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers $x\mapsto\frac{1-x}{1+x^2}$ sur $[0,1]$.
- On a déjà montré que $\sum\int_0^1|f_n(x)|\mathrm{d}x$ converge.

Donc :

$$S=\int_0^1\left((1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Or $\int_0^1\frac{1-x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln(2)}{2}$ et donc :

$$\boxed{S=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln(2)}{2}.}$$

Exercice 3 - E3A 2021 (exercice 2)

Question de cours

1. Posons F une primitive de f (F existe puisque f est continue sur $\mathbb{R}$). F est fonc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$F_1(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x)-F(a).$$

Donc F_1 est à son tour $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_1'(x) = F'(x) = f(x).$$

Remarque : on peut aussi utiliser la version du théorème fondamental de l'analyse qui dit que $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.
La formulation du sujet semble indiquer qu'on demande une démonstration. Mais le rapport du jury semble dire le contraire...
En tout cas, voici pour rappel une démonstration explicite.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}^\star$. On a :

$$\frac{F_1(x+h) - F_1(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$$

où la dernière expression est obtenue par relation de Chasles. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue en x.
Soit donc maintenant $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour $t \in [x-\eta, x+\eta]$, $|f(t) - f(x)| \leqslant \epsilon$ que l'on peut encore écrire $f(x) - \epsilon \leqslant f(t) \leqslant f(x) + \epsilon$.
Pour $0 < h \leqslant \eta$, on a alors par croissance de l'intégrale :

$$\underbrace{\int_x^{x+h} (f(x) - \epsilon)\mathrm{d}t}_{=h(f(x)-\epsilon)} \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_x^{x+h} (f(x) + \epsilon)\mathrm{d}t}_{=h(f(x)+\epsilon)}.$$

De même, pour $-\eta \leqslant h < 0$, on obtient :

$$h(f(x) + \epsilon) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \leqslant h(f(x) - \epsilon).$$

Dans tous les cas, on obtient :

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - f(x)\right| \leqslant \epsilon.$$

On a donc la définition de :

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[h\to 0]{} f(x).$$

D'où F_1 est dérivable en x et $F_1'(x) = f(x)$. De plus, comme f est $\mathcal{C}^0$, F_1 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

F est bien définie puisque f est intégrable au voisinage de $-\infty$ et continue sur $\mathbb{R}$.
Comme $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$ est une constante, par opération sur les fonctions F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{F'(x) = 0 + f(x) = f(x).}$$

---

3. La fonction $f_k : t \mapsto t^k \mathrm{e}^t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f_k est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Il reste donc à montrer que f_k est intégrable au voisinage de $-\infty$.
Or :

$$t^k\mathrm{e}^t = \underbrace{t^k\mathrm{e}^{t/2}}_{\xrightarrow[t\to-\infty]{} 0 \text{ par croissance comparée}} \mathrm{e}^{t/2} = \underset{t\to-\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{t/2}).$$

Par parité, $t \mapsto \mathrm{e}^{t/2}$ est intégrable en $-\infty$ si et seulement si $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ est intégrable en $+\infty$. Or $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ est intégrable en $+\infty$ puisque $\frac{1}{2} > 0$.
Donc par critère de négligeabilité, f_k est intégrable en $-\infty$.
Donc $\boxed{f_k \text{ est bien intégrable sur }]-\infty, -1].}$

4. On ne cherche à montrer dans cette question que la linéarité de L.
Soient f et $\tilde{f}$ deux fonctions de E_n. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$L(f+\lambda\tilde{f})(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}(f+\lambda\tilde{f})(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$
L'intégrale est bien définie car $f_1+\lambda f_2$ est une combinaison linéaire de fonctions f_k intégrables sur $]-\infty,-1]$.
Puis :
$$L(f+\lambda\tilde{f})(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}(f(t)+\lambda\tilde{f}(t))\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}(f(t)\mathrm{e}^t+\lambda\tilde{f}(t)\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t.$$
Comme toutes les intégrales convergent, on a par linéarité de l'intégrale :
$$L(f+\lambda\tilde{f})(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \lambda\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}\tilde{f}(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = L(f)(x)+\lambda L(\tilde{f})(x).$$
Comme c'est valide pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$L(f+\lambda\tilde{f}) = L(f)+\lambda L(\tilde{f}).$$
Ainsi $\boxed{L \text{ est bien une application linéaire.}}$

5. Soit $g \in E_n$. On suppose $g = L(f)$ avec $f \in E_n$. Montrons que g est solution de $y'+y = f(x)$.
On a vu que l'application $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^x$.
Ainsi, par produit, g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{e}^x = -g(x)+f(x).$$
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{g'(x)+g(x) = f(x).}$$
Ainsi $\boxed{g \text{ est bien solution de } y'+y = f(x).}$

6. **Remarque :** à la question précédente, on a supposé $g \in E_n$, mais cette hypothèse n'intervient pas. En fait c'est sans doute même une erreur du sujet, puisque on ne vient au fait que L est un endomorphisme qu'à la question 7. Mais, du coup, le calcul précédent reste valide y compris sans supposer que g soit polynomiale.
Soit $f \in \ker(L)$. On a $L(f) = 0$. Or on a montré que $L(f)$ est solution de $y'+y = f(x)$. Donc en réinjectant, on obtient :
$$0+0 = f(x).$$
Et donc $\boxed{f = 0.}$
Donc $\boxed{\mathrm{Ker} L = \{0_{E_n}\}}$ et donc L est injective.

7. (a) On a $e_0(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc :
$$L(e_0)(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}1\times\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$
Or pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a :
$$\int_{A}^{x}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t\right]_A^x = \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^A \xrightarrow[A\to-\infty]{} \mathrm{e}^x.$$
D'où :
$$L(e_0)(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x = 1 = e_0(x).$$
C'est-à-dire :
$$\boxed{L(e_0) = e_0.}$$

(b) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e_{k+1}(t) = t^{k+1}$. Ainsi :

$$L(e_{k+1})(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^{k+1}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t.$$

Travaillons à $x \in \mathbb{R}$ fixé.
Posons $u(t) = t^{k+1}$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$. u et v sont $\mathcal{C}^1$ et définies sur $]-\infty, x]$. De plus :

$$u(t)v(t) = t^{k+1}\mathrm{e}^t \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0.$$

En x, l'intégrale n'est pas généralisée. On a $u(x)v(x) = x^{k+1}\mathrm{e}^x$.
Donc on peut faire une intégration par partie et les intégrales suivantes ont même nature :

$$\int_{-\infty}^{x} \underbrace{t^{k+1}}_{=u(t)} \underbrace{\mathrm{e}^t}_{=v'(t)} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{x} \underbrace{(k+1)t^k}_{=u'(t)} \underbrace{\mathrm{e}^t}_{=v(t)} \mathrm{d}t.$$

On a vu que ces intégrales convergent. On peut même donc affirmer :

$$\int_{-\infty}^{x} \underbrace{t^{k+1}}_{=u(t)} \underbrace{\mathrm{e}^t}_{=v'(t)} \mathrm{d}t = \left[\underbrace{t^{k+1}}_{=u(t)} \underbrace{\mathrm{e}^t}_{=v(t)} \right]_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} \underbrace{(k+1)t^k}_{=u'(t)} \underbrace{\mathrm{e}^t}_{=v(t)} \mathrm{d}t = x^{k+1}\mathrm{e}^x - (k+1)\int_{-\infty}^{x} t^k\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} L(e_{k+1})(x) &= \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} t^{k+1}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-x}x^{k+1}\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}(k+1)\int_{-\infty}^{x} t^k\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\ &= x^{k+1} - (k+1)\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} t^k\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\ &= e_{k+1}(x) - (k+1)L(e_k)(x). \end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k).}$$

(c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L(E_n) \subset E_n$.

- **Initialisation :** On a $E_0 = \mathrm{Vect}(e_0)$. Donc $L(E_0) \subset \mathrm{Vect}(L(e_0)) = \mathrm{Vect}(e_0) = E_0$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $L(E_n) \subset E_n$. Montrons que $L(E_{n+1}) \subset E_{n+1}$.
  Soit $f \in E_{n+1}$. $(e_0, \ldots, e_{n+1})$ est une base de E_{n+1}. Donc écrivons :

  $$f = \lambda_0 e_0 + \ldots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1}e_{n+1}.$$

  On a $\lambda_0 e_0 + \ldots + \lambda_n e_n \in E_n$. On peut donc écrire :

  $$f = g + \lambda_{n+1}e_{n+1},$$

  avec $g \in E_n$. On a :

  $$L(f) = \underbrace{L(g)}_{\in E_n} + \lambda_{n+1} \underbrace{L(e_{k+1})}_{=e_{k+1}} \in E_{n+1}.$$

Donc par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L(E_n) \subset E_n$. Et donc L est un endomorphisme sur E_n.

8. L est un endomorphisme de E_n. On a montré que $\mathrm{Ker}(L) = \{0_{E_n}\}$. Donc L est injectif. Comme E_n est de dimension finie, par égalité des dimension, $\boxed{L \text{ est un automorphisme de } E_n.}$
9. **Recherche des sous-espaces propres de L.**

(a) Soit f un vecteur propre de L pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $\lambda = 0$, alors $L(f) = 0 \times f = 0$ et donc $f \in \operatorname{Ker}(L)$. Comme $\operatorname{Ker}(L) = \{0\}$, on en déduit $f = 0$ ce qui est impossible pour un vecteur propre.
Donc $\boxed{\lambda \neq 0.}$

(b) On a montré que $L(f)$ est solution de $y' + y = f(x)$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$L(f)'(x) + L(f)(x) = f(x).$$

Or f est vecteur propre de L. On a en particulier $L(f) = \lambda f$. Donc :

$$\lambda f'(x) + \lambda f(x) = f(x).$$

Puis :

$$\lambda f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0.$$

Et donc $\boxed{f \text{ est solution de } \lambda y' + (\lambda - 1) y = 0.}$

(c) Comme y est non nul, on peut réécrire l'équation :

$$y' = \frac{1-\lambda}{\lambda} y.$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ (dérivables) de cette équation sont les fonctions $x \mapsto A e^{\frac{1-\lambda}{\lambda} x}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

(d) **Remarque :** On sent facilement que l'exponentielle va poser problème. Et effectivement, sauf pour $\lambda = 1$ qui donne une fonction constante, il n'y a pas de solutions polynomiales non nulles. Il reste à le prouver proprement.
Si $\frac{1-\lambda}{\lambda} \neq 0$, et si P est un polynôme solution de $y' = \frac{1-\lambda}{\lambda} y$ alors :

$$\deg P' = \deg P.$$

Or si $\deg P \neq -\infty$, alors $\deg P' < \deg P$. Donc nécessairement, $\deg P = -\infty$ et $P = 0$.
Donc $\boxed{\text{si } \lambda \neq 1, \text{ les seules solutions polynomiales sont les fonctions nulles.}}$
Si $\frac{1-\lambda}{\lambda} = 0$, et si P est un polynôme solution de $y' = \frac{1-\lambda}{\lambda} y$ alors :

$$P' = 0.$$

C'est équivalent à dire que P est constant.
Ainsi $\boxed{\text{si } \lambda = 1, \text{ les seules solutions polynomiales sont les fonctions constantes}}$ (et donc proportionnelles à e_0).

(e) On vient de montrer que $\operatorname{Sp}(L) = \{1\}$. De plus $E_1(L) = \operatorname{Vect}(e_0)$.
L'endomorphisme L n'est pas diagonalisable en général. Plus précisément :
- Si $n = 0$, alors $E_0 = \operatorname{Vect}(e_0) = E_1(L)$ et donc L est diagonalisable.
- Si $n > 0$, alors $E_n \neq \operatorname{Vect}(e_0)$ et donc $\oplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(L)} E_\lambda(L) \neq E_n$ donc L n'est pas diagonalisable.

10. On a :

$$(D + \operatorname{Id}) \circ L(f) = L(f)' + L(f).$$

Or $L(f)$ est solution de $y' + y = f(x)$. Donc :

$$(D + \operatorname{Id}) \circ L(f) = f = \operatorname{Id}(f).$$

On peut encore écrire : $(D + \operatorname{Id}) \circ L = \operatorname{Id}$.
Or on sait que L est inversible. En composant à droite par L^{-1}, on obtient :

$$\boxed{D + \operatorname{Id} = L^{-1}.}$$

11. Commençons par remarquer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$D(e_k)(x) = e_k'(x) = kt^{k-1} = ke_{k-1}$$
et $D(e_0) = 0$.
Ainsi, on a :
$$(D + \mathrm{Id})(e_k) = e_k + ke_{k-1}$$
si $k > 0$ et $(D + \mathrm{Id})(e_0) = e_0$.
Donc la matrice de $D + \mathrm{Id}$ dans la base $\mathcal{B}$, qui est la matrice de L^{-1} est :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. On a $\mathrm{Sp}(L^{-1}) = \mathrm{Sp}(M)$. Or comme M est triangulaire supérieure, on peut lire son spectre sur la diagonale. On a : $\mathrm{Sp}(M) = \{1\}$. Ainsi :
$$\boxed{\mathrm{Sp}(L^{-1}) = \{1\}.}$$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. On a :
$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(L^{-1}) &\Leftrightarrow \det(\lambda \mathrm{Id} - L^{-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(\lambda \mathrm{Id} - L^{-1}) \det(\frac{1}{\lambda} L) = 0 \\ &\quad\ \text{(puisque } \det(L) \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \det(L - \frac{1}{\lambda}\mathrm{Id}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(L). \end{aligned}$$
Comme 0 n'est dans le spectre ni de L, ni de L^{-1}, on a :
$$\boxed{\mathrm{Sp}(L) = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(L^{-1})\} = \left\{\frac{1}{1}\right\} = \{1\}.}$$

Exercice 4 - CCINP 2022 (exercice 3 - la constante d'Euler)

Partie I - Construction de la constante d'Euler

1. Soit $n \geqslant 2$. Calculons :
$$\begin{aligned} \Delta_n &= u_n - u_{n-1} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$
Or $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$. Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a :
$$\Delta_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$
Donc $\boxed{a = \frac{1}{2} \text{ convient.}}$

2. La série $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2n^2}\right)$ est, à un facteur près, une série de Riemann convergente (car $2>1$).
Au voisinage de $+\infty$, $-\frac{1}{2n^2}$ est strictement négatif et donc par équivalence Δ_n aussi.
Ainsi par critère d'équivalence de séries à termes de signe constant (on peut se ramener au cas positif en multipliant par -1), la série $\sum_{n=2}^{+\infty}\Delta_n$ est de même nature que la série $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2n^2}\right)$.
Ainsi $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\Delta_n \text{ converge.}}$
3. Pour tout $n\geqslant 2$, on a $\Delta_n=u_n-u_{n-1}$. Donc pour $N\geqslant 2$, on a :
$$\sum_{n=2}^{N}\Delta_n=\sum_{n=2}^{N}(u_n-u_{n-1})=u_N-u_1.\ \text{(somme télescopique)}$$
On peut donc écrire :
$$u_N=\underbrace{u_1}_{\text{constante}}+\underbrace{\sum_{n=2}^{N}\Delta_n}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{}\ell}$$
où $\ell\in\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{(u_n)_n \text{ converge}}$ (vers $u_1+\ell$).

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler
Propriétés de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

4. Soit $t\in]0,+\infty[$ fixé. Notons n_0 un entier tel que $n_0>t$ par exemple $n_0=\lfloor t\rfloor+1$ convient. Pour tout $n\geqslant n_0$, on a donc $n\geqslant n_0>t$. Ainsi :
$$\boxed{f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t).}$$
5. Pour tout $t>0$, on a :
$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right).$$
Or $\ln(1-x)=-x+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x)$. Comme $\frac{t}{n}\to0$ lorsque $n\to+\infty$ (t fixé), on a :
$$n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)=-n\times\frac{t}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(n\times\frac{1}{n}\right)=-t+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-t.$$
Donc par continuité de exp en t, on a :
$$\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-t}$$
toujours à t fixé.
Ainsi :
$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-t}\ln(t).$$
Comme la suite de terme général $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t)$ coïncide avec la suite $(f_n(t))$ à partir du rang n_0, on a donc :
$$\boxed{f_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-t}\ln(t)}$$
c'est-à-dire $\boxed{(f_n) \text{ converge simplement vers la fonction } t\mapsto\mathrm{e}^{-t}\ln(t) \text{ sur }]0,+\infty[.}$
6. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Soit $t\in]0,+\infty[$. Commençons par remarquer que si $t\geqslant n$, alors $f_n(t)=0$ et donc on a bien :
$$|f_n(t)|\leqslant\mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|.$$
Concentrons-nous maintenant sur le cas $t<n$.
Dans ce cas, on a :
$$|f_n(t)|=\left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t)\right|=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)|\ln(t)|.$$

Cherchons donc à majorer l'exponentielle. Comme l'exponentielle est croissante, cela revient à majorer son argument. D'après l'énoncé, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$. Comme $0 < t < n$, on a $0 < \frac{t}{n} < 1$ puis $-1 < -\frac{t}{n} < 0$. Donc l'inégalité s'applique pour $x = -\frac{t}{n}$.
Ainsi, on a $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}$. Puis $n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) < -t$ et donc :

$$\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

par croissance de exp (sur $\mathbb{R}$). D'où finalement :

$$\boxed{|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|}$$

puisque $|\ln(t)|$ est positif.

7. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ donc intégrable sur tout segment de $]0,+\infty[$. Il reste à vérifier si elle est intégrable en 0 et en $+\infty$.
Étude en $+\infty$:
On a :
$$\mathrm{e}^{-t}\ln(t) = \mathrm{e}^{-t/2} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-t/2}\ln(t)}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{}0 \text{ par croissance comparée}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-t/2}).$$
Or $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ est intégrable en $+\infty$ (car $\frac{1}{2} > 0$).
Donc par critère de négligeabilité, $\boxed{t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t) \text{ est intégrable en } +\infty \text{ également.}}$
Étude en $+\infty$:
On a $\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \neq 0$ et donc $\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$. Ainsi :
$$\mathrm{e}^{-t}\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t).$$
Or $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0.
Donc par critère d'équivalence, $\boxed{t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t) \text{ est intégrable en 0 également.}}$
Ainsi, $\boxed{t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

Convergence d'une suite d'intégrales.

8. Comme le remarque l'énoncé, l'intégrale I_n qui est *a priori* sur $]0,+\infty[$ est en fait sur $]0,n[$ puisque $f_n(t) = 0$ si $t \geqslant n$. Intéressons-nous donc à cette intégrale-là.
La fonction f_n est définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ donc intégrable sur tout segment de $]0,+\infty[$. Il reste à vérifier l'intégrabilité en 0 et en éventuellement en $+\infty$ (mais comme la fonction est nulle à partir de n, cela ne pose pas de difficultés particulières).
On a montré que $|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$. Or $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Donc par critère de comparaison, **la fonction f_n est également intégrable sur $]0,+\infty[$.**
Ainsi $\boxed{I_n \text{ est bien convergente.}}$
9. C'est une application de théorème de convergence dominée. On a :
   - f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^\star$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   - $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$ avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   - (f_n) converge simplement vers $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

   D'après le théorème de convergence dominée, on a :
$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.$$
   Techniquement, le théorème nous donne aussi la convergence des intégrales, mais on l'a déjà vérifié les questions précédentes.
   Ainsi, on a bien :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.}$$

10. Posons $f(u) = \frac{u^{n+1}-1}{n+1}$ et $g(u) = \ln(1-u)$. f et g sont bien définies et $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$. En 1, on a de plus :

$$f(u)g(u) = \frac{1}{n+1} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} u^k\right)}_{\xrightarrow[u\to 1]{} n+1} \underbrace{(u-1)\ln(1-u)}_{\xrightarrow[u\to 1]{} 0 \text{ par croissance comparée}} \xrightarrow[u\to 1]{} 0.$$

Par intégration par parties, les intégrales suivantes, ont même nature :

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{u^{n+1}-1}{n+1}}_{=f(u)} \times \underbrace{\frac{1}{u-1}}_{=g'(u)} \mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \int_0^1 \underbrace{u^n}_{=f'(u)} \times \underbrace{\ln(1-u)}_{=g(u)} \mathrm{d}u.$$

La deuxième intégrale est J_n. Et la première est, à un facteur près, $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u$.

Donc, on a bien $\boxed{J_n \text{ converge si et seulement si } \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u \text{ converge.}}$

Or pour tout $u \in [0,1[$:

$$\frac{u^{n+1}-1}{u-1} = \sum_{k=0}^{n} u^k$$

et est donc polynomiale et donc prolongeable par continuité sur $[0,1]$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u$ converge.

Ainsi $\boxed{J_n \text{ converge.}}$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} J_n &= \left[\frac{u^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-u)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{n+1} \times \frac{1}{u-1}\mathrm{d}u \\ &= 0 + 0 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u \\ &= \boxed{-\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u.} \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u &= -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k\right)\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 u^k \mathrm{d}u \text{ (somme finie)} \\ &= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= \boxed{-\frac{1}{n+1}\sum_{k'=1}^{n+1}\frac{1}{k'}.} \text{ (avec } k' = k+1) \end{aligned}$$

11. Faisons le changement de variable $u = 1 - \frac{t}{n}$.
La fonction $\varphi : t \mapsto 1 - \frac{t}{n}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,n]$, strictement décroissante et bijective (à image dans $[0,1[$). Donc le changement de variable est licite.
On a $\mathrm{d}u = -\frac{1}{n}\mathrm{d}t$. Donc les intégrales suivantes ont même nature :

$$\int_0^1 u^n \ln(1-u)\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\mathrm{d}t}{n}.$$

Or $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln\left(\frac{t}{n}\right) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n (\ln(t)-\ln(n))$. Comme $t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(n)$ est continue sur $[0,n]$, la convergence de $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\mathrm{d}t}{n}$ revient à celle de I_n.
Donc toutes les intégrales convergent. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\mathrm{d}t}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left(\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(n)\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(I_n - \ln(n)\left[(-n)\times\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(I_n - \frac{n}{n+1}\ln(n)\right)
\end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n.}$$

12. On sait déjà que :

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

Étudions le second membre de l'égalité de la question précédente.
On a :

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n &= \frac{n}{n+1}\ln(n) - \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \\
&= \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right) \\
&= \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}\left(-\underbrace{u_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\gamma} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\gamma.
\end{aligned}$$

Par unicité de la limite, on a donc :

$$\boxed{\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.}$$

Exercice 5 - CCINP PC 2024 (exercice 1) - racine cubique d'une matrice

Partie I - Étude d'un exemple

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \det(\lambda I_2 - A) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda-4 & 12 \\ 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda-4)(\lambda-5) - 12 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-8) = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 8\}$. Comme A est une matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ avec 2 valeurs propres distinctes, A est diagonalisable. Ainsi, il existe bien $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

avec $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.}$

2. Soit $B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} B \text{ est une racine cubique de } A &\Leftrightarrow B^3 = A \\ &\Leftrightarrow B^3 = PDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}B^3P = D \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}BP)^3 = D \\ &\Leftrightarrow \Delta \text{ est une racine cubique de } D. \end{aligned}$$

3. Soit Δ une racine cubique de D. On a :

$$\Delta D = \Delta\Delta^3 = \Delta^4 = \Delta^3\Delta = D\Delta.$$

Donc $\boxed{\Delta \text{ et } D \text{ commutent.}}$

Écrivons maintenant $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} \Delta D = D\Delta &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8b = b \\ c = 8c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.} \end{aligned}$$

Donc on a bien $\boxed{\Delta \text{ diagonale.}}$

4. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \Delta \text{ racine cubique de } D &\Leftrightarrow \Delta^3 = D \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 1 \\ d^3 = 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ d = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des racines cubiques de A est :

$$\boxed{\left\{ P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \right\}.}$$

Partie II - Dans un plan euclidien

5. M est une matrice de rotation (c'est une matrice de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$). Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, u est un endomorphisme de $\mathrm{SO}(E)$.

Donc $\boxed{u \text{ est une rotation du plan euclidien.}}$

6. Si on note :
$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$
alors $M = R(\theta)$. On a :
$$R(\theta/3)^3 = R(\theta/3)R(\theta/3)R(\theta/3) = R(\theta/3+\theta/3+\theta/3) = R(\theta) = M.$$
Donc $\boxed{R(\theta/3) \text{ est une racine cubique de } M.}$

7. Soit $N \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ avec $\det(N) = -1$. On peut donc écrire :
$$N = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$
avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a donc $N = N^\top$. D'où $N = N^{-1}$ puisque N est orthogonale. Ainsi :
$$N^2 = NN^\top = NN^{-1} = I_2.$$
Dit autrement et plus simplement : N est une symétrie (orthogonale en l'occurence).
Puis $N^3 = N$. Donc $\boxed{N \text{ a bien une racine cubique.}}$

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation
Existence d'une racine cubique polynomiale

8. Comme tout réel admet une racine cubique et comme $H_p(\lambda)$ est diagonale, on a :
$$H_p(\sqrt[3]{\lambda})^3 = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt[3]{\lambda} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = H_p(\lambda).$$
Ainsi $\boxed{H_p(\sqrt[3]{\lambda}) \text{ est une racine cubique de } H_p(\lambda).}$

9. Comme A est diagonalisable, on peut écrire :
$$\begin{aligned} A &= P \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix} & & & \\ \hline & \begin{matrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & \begin{matrix} \lambda_d & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{matrix} \end{array}\right) P^{-1} \\ &= P \left(\begin{array}{c|c|c|c} H_{p_1}(\lambda_1) & & & \\ \hline & H_{p_2}(\lambda_2) & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & H_{p_d}(\lambda_d) \end{array}\right) P^{-1} \end{aligned}$$
où les p_i les multiplicités des valeurs propres λ_i.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\left[P\begin{pmatrix} H_{p_1}(\sqrt[3]{\lambda_1}) & & & \\ & H_{p_2}(\sqrt[3]{\lambda_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_{p_d}(\sqrt[3]{\lambda_d})\end{pmatrix}P^{-1}\right]^3 &= P\begin{pmatrix} H_{p_1}(\sqrt[3]{\lambda_1})^3 & & & \\ & H_{p_2}(\sqrt[3]{\lambda_2})^3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_{p_d}(\sqrt[3]{\lambda_d})^3\end{pmatrix}P \\ &= A.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{P\begin{pmatrix} H_{p_1}(\sqrt[3]{\lambda_1}) & & & \\ & H_{p_2}(\sqrt[3]{\lambda_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_{p_d}(\sqrt[3]{\lambda_d})\end{pmatrix}P^{-1} \text{ est une racine cubique de } A.}$

Réduction d'une racine cubique

10. On a $0 \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \chi_A(0) = 0 \Leftrightarrow \det(0\mathrm{In} - A) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$.
Or A est inversible. Donc $\boxed{0 \notin \mathrm{Sp}(A).}$
11. On a :
$$z^3 = \lambda \Leftrightarrow z^3 = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta}{3}}}\right)^3 = 1.$$
Or il y a exactement 3 racines cubiques de l'unité.
D'où, $\boxed{\text{il y a exactement trois racines cubiques (complexes) de } \lambda.}$
12. D'après ce qui précède, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$z^3 = \lambda \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[3]{\lambda}}\right)^3 = 1$$
Notons $1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2$ les trois racines cubiques de l'unité. On a donc :
$$z^3 = \lambda \Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt[3]{\lambda}} \in \{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\} \Leftrightarrow z \in \{\sqrt[3]{\lambda}, \sqrt[3]{\lambda}\mathrm{j}, \sqrt[3]{\lambda}\mathrm{j}^2\}.$$
Maintenant remarquons que :
$$(X^3 - \lambda) = (X - \sqrt[3]{\lambda})(X - \sqrt[3]{\lambda}\mathrm{j})(X - \sqrt[3]{\lambda}\mathrm{j}^2).$$
Ainsi :
$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d}(X - \sqrt[3]{\lambda_k})(X - \sqrt[3]{\lambda_k}\mathrm{j})(X - \sqrt[3]{\lambda_k}\mathrm{j}^2).$$
Toutes les racines sont distinctes. En effet, soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de A.
Soit $|\lambda| \neq |\mu|$. Dans ce cas, on a aussi $|\sqrt[3]{\lambda}| \neq |\sqrt[3]{\mu}|$.
Soit $|\lambda| = |\mu|$. Dans ce cas, puisque les valeurs propres sont distinctes, on a $\lambda = -\mu$. Notons α la racine cubique du module commun. Les racines qui apparaissent alors sont :
$$\left\{\alpha, -\alpha, \alpha\mathrm{j}, -\alpha\mathrm{j}, \alpha\mathrm{j}^2, -\alpha\mathrm{j}^2\right\} = \{\alpha z, z \in \mathrm{U}_6\}$$
qui contient bien 6 éléments distincts.
Donc $\boxed{Q \text{ est scindé à racines simples sur } \mathbb{C}.}$
13. **Pour les 5/2 :** Soit B une racine cubique de A. On a donc $B^3 = A$. On a alors :
$$Q(B) = \prod_{k=1}^{d}(B^3 - \lambda_k I_3) = \prod_{k=1}^{d}(A - \lambda_k I_3)$$
Or puisque A est diagonalisable, on a $R(X) = \prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de A. Donc :
$$Q(B) = R(B^3) = R(A) = 0.$$
Donc Q est un polynôme annulateur de B à racines simples dans $\mathbb{C}$. Donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable dans } \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).}$