Chapitre 11 - Intégrales à paramètres

1 Limites et continuité

1.1 Rappel sur le théorème de convergence dominée

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur un même intervalle I et soit f une fonction continue par morceaux sur I.
Si :

- (f_n) converge simplement vers f ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

(hypothèse de domination indépendamment de n)

alors :

- f et les f_n sont intégrables sur I et
- $\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$.

1.2 Limite à paramètre continue

Proposition

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in A$ ou éventuellement au bord de A.
Soient $f : A \times I \to \mathbb{K}$ et $\ell : I \to \mathbb{K}$.
Si :

- pour tout $t \in I$ fixé, $f(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$ fixé, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

(hypothèse de domination indépendamment de x)

alors :

- ℓ est intégrable sur I et
- $\int_I f(x,t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \ell(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration : ***Ne pas rentrer dans le détails.*** *Expliquer l'utilisation de la caractérisation séquentielle.* □

Exemple : Calculer :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t-\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t.$$

1.3 Continuité

Proposition

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in A$ ou éventuellement au bord de A.
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$.
Si :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
- pour tout $x \in A$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I, \ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

(hypothèse de domination indépendamment de x)

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que sa transformée de Fourier $\hat{f} : x \mapsto \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Remarque : comme toujours avec la continuité, on peut travailler sur tout segment de I.
Exemple : Montrer que :

$$x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{2 - \mathrm{i}tx}{t^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{t^3}{3}+xt\right)}\mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbb{R}$ en travaillant sur les segments de la forme $[-a,a]$.

2 Dérivabilité

2.1 Dérivée d'ordre 1

Proposition

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in A$ ou éventuellement au bord de A.
Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$.
Si :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur A.
- pour tout $x \in A$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I, \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

(hypothèse de domination indépendamment de x)

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et $\mathcal{C}^1$ sur A et vérifie :

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Exemple : On pose $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$ et de ses dérivées. En déduire que $f + g^2$ est constante.
2. Calculer la constante sus-mentionnée.
3. En prenons la limite $x \to +\infty$, en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$.

2.2 Généralisation à un ordre quelconque

Proposition

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in A$ ou éventuellement au bord de A. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$.
Si :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^k$ sur A.
- pour tout $x \in A$ fixé, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ sont intégrable sur I pour $i \in [\![0, k-1]\!]$;
- pour tout $x \in A$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

(hypothèse de domination indépendamment de x)

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et $\mathcal{C}^k$ sur A et vérifie :

$$\forall i \in [\![1, k]\!],\ g^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Exemple : Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \sin(tx)\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.