

DS 4 - SÉRIES ENTIÈRES, POLYNÔMES ANNULATEURS

Mercredi 17/12/2025 - 3h

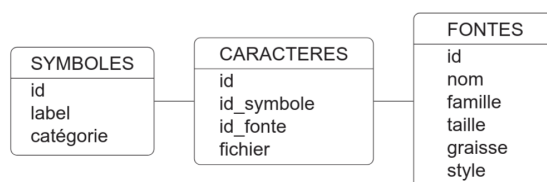
Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou surlignez vos résultats.
4. Rendre les exercices sur copies séparées et mettre son nom sur **chaque** copie.
5. Rendre les copies les unes dans les autres **dans l'ordre des exercices**.

Exercice 1 - CCINP ITC 2023 (extrait de la partie 3)

Analyse de la base de données de caractères

La base de données contient des informations sur chaque caractère selon le type de fonte, la taille, la graisse... Trois tables sont utilisées.



La table **SYMBOLES** contient les attributs suivants :

- **id** : identifiant d'un symbole (entier), clé primaire ;
- **label** : nom du symbole ("A", "a", "1", "é", "!", ...) (chaîne de caractères) ;
- **catégorie** : parmi majuscule, minuscule, chiffre, spécial (dont accent) (chaîne de caractères).

La table **CARACTERES** contient les attributs suivants :

- **id** : identifiant d'un caractère (entier), clé primaire ;
- **id_symbole** : identifiant du nom du symbole (entier) ;
- **id_fonte** : identifiant du type de fonte (entier) ;
- **fichier** : nom du fichier image correspondant (chaîne de caractères).

La table **FONTES** contient les attributs suivants :

- **id** : identifiant d'une fonte (entier), clé primaire ;
 - **nom** : nom de la fonte ("Arial", "Times new roman", "Calibri", "Zurich", ...) (chaîne de caractères) ;
 - **famille** : nom de la famille dont fait partie la fonte ("humane", "garalde", "réale", "didone", "scripte", ...) (chaîne de caractères) ;
 - **taille** : dimension en hauteur des caractères en pixels (entier) ;
 - **graisse** : type de graisse ("léger", "normal", "gras", "noir", ...) (chaîne de caractères) ;
 - **style** : type de style ("romain", "italique", "ombré", "décoratif", ...) (chaîne de caractères).
1. Écrire une requête SQL permettant d'extraire les identifiants des fontes dont le nom est "Zurich", de style "romain" et dont la taille est comprise entre 10 et 16 pixels.
 2. Écrire une requête SQL permettant d'extraire tous les noms de fichiers des caractères qui correspondent au symbole de label "A".
 3. Écrire une requête SQL permettant d'indiquer le nombre de caractères correspondant à la fonte "Zurich", de style "romain" et dont la taille est comprise entre 10 et 16 pixels groupés selon les labels des symboles.

Exercice 2 - CCINP PC 2019 (exercice 2) - Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \quad (E)$$

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \quad (H)$$

On fixe une suite de nombre réel $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.
- Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n \geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

- Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $] -r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire que si f est solution de (H) sur $] -r, r[$ alors $r \geq 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

- Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction :

$$g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$$

est solution de (H) sur $] -1, 1[$ et développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1 \right) y(x).$$

- Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I , puis exprimer z' et z'' avec y , y' et y'' .
- Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \quad (E_1)$$

- Montrer que si z est solution de (E_1) sur I , alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I .

Partie III - Solutions de (E) sur $]0, +\infty[$

10. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 - CCINP PC 2023 (exercice 1) - Endomorphisme cyclique**Présentation générale**

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \text{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ soit une base de l'espace vectoriel E .

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y).$$

1. En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et donner une base de chaque sous-espace propre de f .
3. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

4. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
5. Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
6. L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

Par exemple, on a $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$.

7. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
8. Soit $k \in [0, n]$. Calculer $\Delta(X^k)$ sous une forme développée.
9. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
10. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k .

Soit $v \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E , il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

11. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n.$$

12. Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ dans la base $\mathcal{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

13. Conclure que h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

Exercice 4 - Mines-Ponts Maths 2 PC 2017 (extrait - partie 1) - Méthode de Laplace

Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k x^k}{k!} \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

- Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?
- En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n , la relation :

$$R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose :

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

- On suppose dans cette question que $x \in]0, 1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ admet, sur $[0, x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \quad \text{puis que} \quad T_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{nx}.$$

- Démontrer la relation $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour tout entier naturel.

- Pour tout entier $n \geq 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du.$$

- En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$ pour $u \geq x$.