

CORRECTION DS 4 - SÉRIES ENTIÈRES, POLYNÔMES ANNULATEURS

Exercice 1 - CCINP ITC 2023 (extrait de la partie 3)

Analyse de la base de données de caractères

1.

```
1 SELECT id FROM FONTES WHERE nom = "Zurich"
AND style = "romain" AND taille >= 10 AND taille <= 16;
```

2.

```
1 SELECT fichier FROM CARACTERES JOIN SYMBOLES
ON CARACTERES.id_symbole = SYMBOLES.id
WHERE label = "A";
```

3.

```
1 SELECT label, COUNT(*) FROM CARACTERES JOIN SYMBOLES JOIN FONTES
ON id_symbole = SYMBOLES.id AND id_fonte = FONTES.id
WHERE nom = "Zurich" AND style = "romain" AND taille >= 10 AND taille <= 16
GROUP BY label;
```

Exercice 2 - CCINP PC 2019 (exercice 2) - Étude d'une équation différentielle

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

1. f est définie par une série entière, donc sur son intervalle ouvert de convergence, f est $\mathcal{C}^\infty$ et donc $\mathcal{C}^2$. De plus, pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

et les développements de f' et f'' ont même rayon de convergence que celui de f (c'est-à-dire r).

2. Soit $x \in]-r, r[$. On a :

$$\begin{aligned} & x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) \\ = & x^2(1-x) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ = & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ = & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ = & \sum_{n=3}^{+\infty} (n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - n a_n - (n-1)a_{n-1} + a_n) x^n \\ & + a_0 x^0 + a_1 x - 1a_1 x^1 + a_2 x^2 - (2-1)a_{2-1} x^2 - 2a_2 x^2 + 2(2-1)a_2 x^2 \\ = & \sum_{n=3}^{+\infty} ([n(n-1) - n + 1] a_n - [(n-1)(n-2) + (n-1)] a_{n-1}) x^n + a_0 + (a_2 - a_1) x^2 \end{aligned}$$

Or :

$$n(n-1) - n + 1 = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$$

et :

$$(n-1)(n-2) + (n-1) = (n-1)(n-2+1) = (n-1)^2.$$

De plus, pour $n = 2$, on a : $(n-1)^2 = (2-1)^2 = 1$. Donc, en posant $b_n = (n-1)^2$, on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

3. On a :

$$\begin{aligned} & f \text{ est solution de } (H) \text{ sur }]-r, r[\\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-r, r[, \quad x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-r, r[, \quad a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, \quad b_n(a_n - a_{n-1}) = 0 \end{cases} \quad (\text{par unicité des coefficients de la série entière}) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, \quad a_n - a_{n-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{car } b_n \neq 0 \text{ pour tout } n \geq 2) \\ \Leftrightarrow & \boxed{\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = a_n \end{cases}}. \end{aligned}$$

4. D'après le résultat précédent, si f est solution de (H) sur $]-r, r[$ alors :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = a_n \end{cases}$$

Posons $\lambda = a_1$, on a alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \lambda$. Ainsi pour tout $x \in]-r, r[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = 0 + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x^n.$$

Or $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ est une série entière de rayon de convergence 1. Donc le rayon de convergence est au moins 1 (en fait exactement 1 si $\lambda \neq 0$). Donc $r \geq 1$.

De plus :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \lambda \frac{x}{1-x}.$$

5. Soit $g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$. g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ par opérations sur les fonctions usuelles. De plus pour $x \in]-1, 1[$:

$$g'(x) = \frac{\lambda}{1-x} + \frac{\lambda x}{(1-x)^2} = \frac{\lambda}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad g''(x) = \frac{2\lambda}{(1-x)^3}.$$

Donc pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} x^2(1-x)g''(x) - x(1+x)g'(x) + g(x) &= x^2(1-x) \frac{2\lambda}{(1-x)^3} - x(1+x) \frac{\lambda}{(1-x)^2} + \frac{\lambda x}{1-x} \\ &= \lambda \frac{2x^2 - x(1+x) + x(1-x)}{(1-x)^2} = \lambda \frac{2x^2 - x - x^2 + x - x^2}{(1-x)^2} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{g \text{ est solution de } (H) \text{ sur }]-1, 1[}$.

De plus, comme les coefficients de (H) sont bien définis et continus sur $] -1, 1[$ (et ne s'annule pas pour le coefficient de y''), le problème suivant :

$$\begin{cases} x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= \lambda \end{cases}$$

est un problème de Cauchy qui admet une unique solution.

g est une solution de ce problème. f définie par $a_0 = 0$ et $a_n = \lambda$ pour $n \geq 1$, en est également une (d'après la question 2, puisque le rayon de convergence de f est supérieur à 1). Donc pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$g(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n.$$

Donc g est développable en série entière.

Partie II - Solutions de (E) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

6. Sur I , x ne s'annule pas. Donc z est $\mathcal{C}^2$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^2$.

De plus, on a :

$$z'(x) = -\frac{1}{x^2}y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y'(x)$$

et :

$$z''(x) = \frac{2}{x^3}y(x) - \frac{2}{x^2}y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y''(x).$$

Remarque : Pourquoi pose-t-on ce z particulier ? Remarquez que $z(x) = \frac{y(x)}{1-x}$. Le dénominateur est le résultat trouvé à la partie précédente. En fait, on est en train de poser :

$$y(x) = z(x) \frac{x}{1-x}$$

où le λ a été remplacé par $z(x)$. C'est une variante de la variation de la constante !

7. On a :

$$\begin{aligned} & z \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } I \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad xz''(x) + z'(x) = 2x \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad x \left(\frac{2}{x^3}y(x) - \frac{2}{x^2}y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y''(x) \right) + \left(-\frac{1}{x^2}y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y'(x) \right) = 2x \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad (1-x)y''(x) + \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x} - 1 \right)y'(x) + \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)y(x) = 2x \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad x^2(1-x)y''(x) + (-x-x^2)y'(x) + y(x) = 2x^3 \text{ (car } x \neq 0) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 2x^3 \\ \Leftrightarrow & y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I. \end{aligned}$$

8. z est solution de (E_1) si et seulement si z' est solution de (E_2) : $xf' + f = 2x$. Pour $x \neq 0$, cela revient à $f' + \frac{f}{x} = 2$ qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\ln$ (aussi bien sur $]0, 1[$ que sur $]1, +\infty[$) et donc les solutions de l'équation homogène (H_2) : $f' + \frac{f}{x} = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \exp(-\ln(x))$.

Trouvons désormais une solution particulière de (E_2) . La formule de l'énoncé nous pousse à chercher une solution de la forme $x \mapsto \alpha x$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $f_0(x) = \alpha x$. z_0 est clairement dérivable et $f_0(x) = \alpha$. On a :

$$f_0 \text{ solution de } (E_2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0'(x) + \frac{f_0(x)}{x} = 2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha + \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Donc $f_0 : x \mapsto x$ est une solution de (E_2) . Donc les solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x} + x$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Puisque z' est solution de (E_2) , il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

9. Ainsi si y est solution de (E) , alors z est solution de (E_1) et donc $\forall x \in I, z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$. Dans ce cas, on en déduit qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, z(x) = \lambda \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu.$$

Puis pour tout $x \in I$, on a :

$$\forall x \in I, y(x) = \frac{x}{1-x} \left(\lambda \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu \right)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Malheureusement, vu comment le sujet est rédigé, il nous faut également faire la réciproque. On peut minimiser le travail de la façon suivante. Si y est de la forme précédente, alors z est de la forme $z(x) = \lambda \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu$ puis $z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$.

Or on a montré que toutes les fonctions de cette forme sont solutions de (E_2) . Or si z' est solution de (E_2) alors z est solution de (E_1) . Et donc, d'après la question 7, y est solution de (E) .

Remarque : en fait, il y a équivalence à chaque étape, mais le sujet nous a demandé des implications, ce qui oblige à faire le sens réciproque. L'alternative est de simplement réinjecter la formule obtenue dans (E) .

Partie III - Solutions de (E) sur $]0, +\infty[$

10. C'est un problème de recollement.

Commençons par le sens direct. Soit y une solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Alors y est solution de (E) sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Donc il existe $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in]0, 1[, y(x) = \frac{x}{1-x} \left(\lambda_1 \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu_1 \right)$$

et :

$$\forall x \in]1, +\infty[, y(x) = \frac{x}{1-x} \left(\lambda_2 \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu_2 \right).$$

On cherche des solutions au moins continues¹. Donc étudions ce qu'il se passe pour ces deux expressions au voisinage de 1.

On a $\frac{x}{1-x} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-x}$. Donc pour avoir une chance de définir y en ayant la continuité en 1, il faudra

$$\left(\lambda_1 \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu_1 \right) \rightarrow 0$$

(et pareil pour l'autre formule). Cela n'arrive que si :

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi nécessairement $\mu_1 = \mu_2 = -\frac{1}{2}$.

1. En fait, le minimum exigible est d'avoir y dérivable sur $]0, +\infty[$. On peut techniquement se passer de deux fois dérivable en 1, car le coefficient devant $y''(x)$ s'annule en 1. Le caractère $\mathcal{C}^1$ quant à lui n'est pas clair à ce stade.

On aimerait que f soit dérivable. Or d'après le théorème de la limite de la dérivée, si ℓ est définie sur $]0, 1[$, admet une limite en 1 et sa dérivée admet une limite finie en 1, alors le prolongement par continuité de ℓ est en fait $\mathcal{C}^1$ et la dérivée en 1 est la limite de la dérivée. Dès lors que f' a une limite, on a même que f est dérivable en 1 si et seulement si cette limite est finie.

Dans notre cas, cela signifie que si y' admet une limite en 1, alors y est en fait dérivable (et même $\mathcal{C}^1$) si et seulement si la limite est finie et $y'(1)$ est cette limite.

Maintenant que la formule de y est un peu nettoyée, utilisons un DL au voisinage de 1 :

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1+(x-1)}{-(x-1)} \left(\lambda_1 \ln(1+(x-1)) + \frac{(x-1)(2+(x-1))}{2} \right) \\ &= \frac{1+(x-1)}{-(x-1)} \left(\lambda_1 \left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o_{x \rightarrow 1^-}((x-1)^2) \right) + \frac{(x-1)(2+(x-1))}{2} \right) \\ &= -(1+(x-1)) \left(\lambda_1 \left(1 - \frac{x-1}{2} + o_{x \rightarrow 1^-}(x-1) \right) + 1 + \frac{x-1}{2} \right) \\ &= -(1+\lambda_1) + \left(-(1+\lambda_1) + \frac{\lambda_1-1}{2} \right) (x-1) + o_{x \rightarrow 1^-}(x-1) \\ &= -(1+\lambda_1) - \left(\frac{3+\lambda_1}{2} \right) (x-1) + o_{x \rightarrow 1^-}(x-1). \end{aligned}$$

et de même sur $]1, +\infty[$. Pour avoir f dérivable, il faut donc $\frac{3+\lambda_1}{2} = \frac{3+\lambda_2}{2}$.

On en déduit enfin :

Si y est solution de E alors $y(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} \left(\lambda \ln(x) + \frac{x^2-1}{2} \right) & \text{si } x \neq 1 \\ -(1+\lambda) & \text{si } x = 1 \end{cases}$
--

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si y est définie par :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} \left(\lambda \ln(x) + \frac{x^2-1}{2} \right) & \text{si } x \neq 1 \\ -(1+\lambda) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

alors y est solution de (E) sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. De plus, Avec les mêmes calculs que précédemment, on trouve pour $x \neq 1$:

$$y(x) = -(1+\lambda) - \left(\frac{3+\lambda}{2} \right) (x-1) + o_{x \rightarrow 1}(x-1).$$

Ainsi y est bien continue en 1. De plus, puisque y admet un DL en 1, y est dérivable en 1 et sa dérivée en 1 vaut :

$$y'(1) = -\frac{3+\lambda}{2}.$$

Enfin, l'équation (E) en 1 donne :

$$1^2(1-1)y''(1) - 1(1+1)y'(1) + y(1) = 2 \times 1^3$$

c'est-à-dire :

$$-2 \times \left(-\frac{3+\lambda}{2} \right) - (1+\lambda) = 2$$

ce qui est vrai ! Donc y satisfait (E) également en 1.

Donc y est bien solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 - CCINP PC 2023 (exercice 1) - Endomorphisme cyclique

Partie I - Étude d'un premier exemple

1. f est clairement linéaire et de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donc un endomorphisme.

On a :

$$f(v) = f(1, 0) = (4, 1).$$

La famille $(v, f(v)) = ((1, 0), (4, 1))$ est donc échelonnée et donc libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^2$, c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

Donc f est effectivement cyclique.

2. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice de f est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(M) &\Leftrightarrow \det(\lambda I_2 - M) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \{2, 3\}. \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(f) = \{2, 3\}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} &f(x, y) = 2(x, y) \\ \Leftrightarrow &(4x - 2y, x + y) = (2x, 2y) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 4x - 2y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &x = y \\ \Leftrightarrow &(x, y) \in \text{Vect}((1, 1)). \end{aligned}$$

Donc $E_2(f) = \text{Vect}((1, 1))$. Comme $(1, 1)$ est non nul, ce vecteur forme une famille libre et donc une base de $E_2(f)$.

De même, on trouve $E_3(f) = \text{Vect}((2, 1))$ et donc $((2, 1))$ est une base de $E_3(f)$.

3. Donc oui, il existe $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$. Par exemple $w = (1, 1)$. Puisque $f(w)$ est proportionnel à w , la famille $(w, f(w))$ est liée dans ce cas.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

4. On a $g^2 = g + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ si et seulement si M vérifie la même relation $M^2 = M + 2I_3$. Calculons :

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= M + 2I_3. \end{aligned}$$

5. M est symétrique réelle donc diagonalisable.

Comme $X^2 - X - 2$ est un polynôme annulateur de M (et de g). Or ce polynôme a une valeur propre évidente qui est -1 . Donc $X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$.

D'où $\boxed{\text{Sp}(M) \subset \{-1, 2\}}$.

Comme M est diagonalisable, M admet au moins une valeur propre. De plus, si M avait une unique valeur propre λ , comme M est diagonalisable, M serait semblable à λI_3 . On aurait donc avec P inversible :

$$M = P(\lambda I_3)P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_3.$$

Or M n'est pas une matrice scalaire, donc M admet au moins deux valeurs propres.

D'où, par considération sur les cardinaux, $\boxed{\text{Sp}(M) = \{-1, 2\}}$.

6. Soit $w \in \mathbb{R}^3$. Montrons que la famille $(w, g(w), g^2(w))$ n'est pas une base.

On a d'après ce qui précède :

$$g^2(w) = g(w) + 2w.$$

Donc la famille $(w, g(w), g^2(w))$ est liée et donc n'est pas une base.

Ainsi, $\boxed{g \text{ n'est pas cyclique.}}$

Partie III - Étude d'un troisième exemple

7. Commençons par remarquer que Δ est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(X + 1) - (P + \lambda Q)(X) \\ &= P(X + 1) + \lambda Q(X + 1) - P(X) - \lambda Q(X) \\ &= P(X + 1) - P(X) + \lambda(Q(X + 1) - Q(X)) \\ &= \Delta(P) + \lambda \Delta(Q). \end{aligned}$$

Donc Δ est effectivement une application linéaire.

Par définition Δ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Il reste à prouver que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Comme $(X + 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i 1^{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i$, on a $\deg((X + 1)^k) = k$. Ainsi si P est de degré $k \leq n$, $P(X + 1)$ est une somme de polynôme de degré au plus k . Et donc $\deg(P(X + 1)) \leq n$.

Puis par somme :

$$\deg(\Delta(P)) \leq \max(\deg(P(X + 1)), \deg(P)) \leq n.$$

Ainsi on a bien $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ et $\boxed{\Delta \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

8. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$\Delta(X^k) = (X + 1)^k - X^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i - X^k = \boxed{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i}.$$

Si $k = 0$, on a $\boxed{\Delta(X^0) = \Delta(1) = 1 - 1 = 0}$.

9. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non constant. On peut donc écrire :

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$$

où $d = \deg P \geq 1$ (et donc $a_d \neq 0$). Par linéarité, on obtient :

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^d a_k \Delta(X^k) = \sum_{k=1}^d a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \right) = \sum_{k=1}^d \sum_{i=0}^{k-1} a_k \binom{k}{i} X^i.$$

C'est une somme triangulaire avec $0 \leq i < k \leq d$. On peut la réordonner ainsi :

$$\Delta(P) = \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{k=i+1}^d a_k \binom{k}{i} X^i = \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{k=i+1}^d a_k \binom{k}{i} \right) X^i.$$

Le coefficient de X^{d-1} est :

$$\sum_{k=d}^d a_k \binom{k}{d-1} = a_d \binom{d}{d-1} = da_d \neq 0.$$

Donc $\deg(\Delta(P)) = d - 1 = \deg(P) - 1$.

10. Soit $P = X^n$. D'après ce qui précède, on a par descente finie : $\deg(\Delta^k(P)) = n - k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

La famille $(X^n, \Delta(X^n), \Delta^2(X^n), \dots, \Delta^n(X^n))$ est échelonnée et donc libre.

Comme la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est $n + 1$ et est égal au cardinal de la famille, cette famille est une base.

Ainsi Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

11. Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation** : pour $p = 1$, on a :

$$\begin{aligned} h(v) &= h(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 h(v_1) + \dots + \alpha_n h(v_n) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n. \end{aligned}$$

Donc la propriété est bien initialisée.

- **Hérédité** : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$. On calcule :

$$\begin{aligned} h^{p+1}(v) &= h(h^p(v)) \\ &= h(\alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n) \\ &= \alpha_1 \lambda_1^p h(v_1) + \dots + \alpha_n \lambda_n^p h(v_n) \\ &= \alpha_1 \lambda_1^p \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p \lambda_n v_n \\ &= \alpha_1 \lambda_1^{p+1} v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^{p+1} v_n. \end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

On a bien pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$.

12. Le déterminant de la famille est simplement le déterminant de la matrice de la famille dans la base indiquée.

On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2 \lambda_2 & \dots & \alpha_2 \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n & \dots & \alpha_n \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2 \lambda_2 & \dots & \alpha_2 \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n & \dots & \alpha_n \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \alpha_1 \cdots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

par multilinéarité de $\det$. Puis on reconnaît un déterminant de Vandermonde. Ainsi :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

13. Remarquons que la famille $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si sa matrice est inversible c'est-à-dire si et seulement si son déterminant est non nul.

Ainsi, si h est cyclique, il existe un vecteur v qui engendre une base $\mathcal{F}$ de déterminant non nul. En particulier le déterminant de Vandermonde est non nul $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$.

Donc toutes les valeurs propres de h sont distinctes.

Réciproquement, si toutes les valeurs propres de h sont distinctes, posons $v = v_1 + \dots + v_n$ (c'est-à-dire $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$). On a alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0.$$

Donc $\mathcal{F}$ est une base de E . Ainsi $(v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ est une base et donc h est cyclique.

Exercice 4 - Mines-Ponts Maths 2 PC 2017 (extrait - partie 1) - Méthode de Laplace

Exponentielle tronquée

1. On peut réécrire :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!}.$$

Donc $R_n(x)$ est le reste de la série exponentielle évaluée en (nx) . La série exponentielle converge pour tout paramètre réel, donc son reste aussi et donc $R_n(x)$ existe.

En outre, on a :

$$T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k x^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = \exp(nx).$$

2. La fonction $t \mapsto e^{nt}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier $\mathcal{C}^{n+1}$. On notant $f : t \mapsto e^{nt}$, on a pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(t) = n^k e^{nt}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} n^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt} dt \\ &= T_n(x) + \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^{nt} dt \end{aligned}$$

Faisons maintenant le changement de variable $u = x - t$ dans l'intégrale. C'est une intégrale sur un segment, il n'y a donc pas de questions de convergence. En outre, c'est un changement de variable affine de coefficient directeur non nul, le changement est donc licite.

Ainsi :

$$f(x) = T_n(x) + \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^0 u^n e^{n(x-u)} (1) du = T_n(x) + e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du.$$

3. Comme $y > 0$, a_n ne s'annule jamais. De plus :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2} y^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{n+1} y^n} = y \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1}.$$

Or :

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} = \exp \left((n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$$

et :

$$(n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1) \frac{1}{n} \sim 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

où l'équivalent est valide car $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

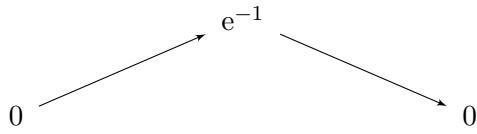
Comme la fonction exp est continue en 1, on en déduit : $\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^1$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ye.$$

Ainsi, si $y < 1$, on a $ye < 1$ et même $|ye| < 1$ par positivité de y . Ainsi d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge (et même absolument). En particulier, elle ne diverge pas grossièrement, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

4. Étudions la fonction $g : u \mapsto ue^{-u}$. g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a : $g'(u) = e^{-u} - ue^{-u} = (1-u)e^{-u}$. Donc le signe de $g'(u)$ est donné par la signe de $1-u$.

u	0	1	$+\infty$
$g'(u)$	+	0	-
$g(u)$			

Puisque g est même strictement croissante sur $[0, 1[$, on a pour tout $u \in [0, x]$ (avec $x \in [0, 1[$) :

$$0 \leq g(u) \leq \underbrace{g(x)}_{=M} < e^{-1}.$$

On en déduit que pour tout $u \in [0, x]$, $g(u)^n \in [0, M^n[$. Ainsi par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^x (ue^{-u})^n du < xM^n.$$

Et donc :

$$0 \leq e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du < e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} xM^n.$$

On en déduit :

$$0 \leq \frac{R_n(x)}{e^{nx}} \leq \frac{n^{n+1}}{n!} xM^n.$$

Or $\frac{n^{n+1}}{n!} M^n$ est la formule de a_n avec $y = M$ (et on a bien $0 \leq M < e^{-1}$). Donc : $\frac{n^{n+1}}{n!} M^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

Comme x est fixé, on a bien $\frac{n^{n+1}}{n!} xM^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

Par encadrement, on a $\frac{R_n(x)}{e^{nx}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, c'est-à-dire :

$$R_n(x) = o(e^{nx}).$$

Et comme $T_n(x) + R_n(x) = e^{nx}$, on a :

$$T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} + o(e^{nx}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Commençons par remarquer que : $h_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc h est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

Il reste à vérifier si h_n est intégrable en $+\infty$. On a pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$h_n(t) = t^n e^{-t} = \underbrace{t^n e^{-t/2}}_{\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0} e^{-t/2} = o_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t/2}).$$

Or $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable en $+\infty$ (car $1/2 > 0$). Donc par critère de négligeabilité, h_n est également intégrable en $+\infty$.

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est bien définie et converge.

Montrons maintenant par récurrence que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$ et $A \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_0^A e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^A = 1 - e^{-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1.$$

D'où $\boxed{\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = 1 = 0!}$.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$. Montrons que $\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = (n+1)!$.
Posons pour $t \in \mathbb{R}_+$, $u(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $v(t) = e^{-t}$. u et v ainsi définies sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus :

$$u(t)v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

par croissance comparée. Pour l'autre borne, les fonctions sont définies (on a $u(0)v(0) = 0$).

Donc, on peut faire une intégration par parties.

Les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{t^n}_{=u'(t)} \underbrace{e^{-t}}_{=v(t)} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{t^{n+1}}{n+1}}_{=u(t)} \times \underbrace{(-e^{-t})}_{=-v(t)} dt$$

ont même nature. En l'occurrence, on a déjà vu que ces intégrales convergent.

Ainsi, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \underbrace{t^n}_{=u'(t)} \underbrace{e^{-t}}_{=v(t)} dt &= \left[\underbrace{\frac{t^{n+1}}{n+1}}_{=u(t)} \underbrace{e^{-t}}_{=v(t)} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{t^{n+1}}{n+1}}_{=u(t)} \times \underbrace{(-e^{-t})}_{=-v(t)} dt \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Donc avec l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (n+1)n! = (n+1)!}.$$

Donc la propriété est héréditaire.

Ainsi, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!}.$$

6. Pour tout $x > 0$, on a :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k x^k}{k!} = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} - e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du = e^{nx} \left(1 - \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du \right).$$

Vu ce qu'on a et vu le résultat attendu par le sujet, cela nous pousse à calculer $\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du$.

On peut réécrire : $\int_0^{+\infty} u^n e^{-nu} du$. Faisons le changement de variable $t = nu$. En tant que changement de variable affine (avec $n \neq 0$ puisque $n \geq 1$ dans cette question), ce changement est bien $\mathcal{C}^1$, bijectif et strictement monotone (croissante en l'occurrence). Ainsi les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{-nu} du \text{ et } \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \frac{1}{n} dt$$

ont même nature et en cas de convergence, elles sont égales. Or, la seconde intégrale peut se réécrire :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

qui est l'intégrale convergente étudiée dans la question précédente. Ainsi : $\int_0^{+\infty} u^n e^{-nu} du = \frac{n!}{n^{n+1}}$. Et donc :

$$\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du = 1.$$

En réinjectant dans notre première expression, on trouve :

$$\begin{aligned} T_n(x) &= e^{nx} \left(1 - \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du \right) = e^{nx} \left(\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du - \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du \right) \\ &= \boxed{e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du.} \end{aligned}$$

7. Vue la question précédente, le but de cette question est de montrer que, à x fixé, on a :

$$\frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Commençons par remarquer, comme le suggère l'énoncé, que pour $u \geq x > 1$, on a $ue^{-u} \leq xe^{-x}$ par décroissance sur la fonction g étudiée à la question 4 sur $]1, +\infty[$ et donc pour tout $u \geq x > 1$:

$$0 \leq (ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}.$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale (et sous réserve de convergence) :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du \leq \int_x^{+\infty} (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u} du \leq (xe^{-x})^{n-1} \int_x^{+\infty} ue^{-u} du.$$

Or comme ue^{-u} est toujours positif, on a $\int_0^x ue^{-u} du \geq 0$ et donc $\int_x^{+\infty} ue^{-u} du \leq \int_0^{+\infty} ue^{-u} du$.

Et comme $\int_0^{+\infty} ue^{-u} du = 1! = 1$, cela prouve au passage la convergence. Et on a :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du \leq (xe^{-x})^{n-1}.$$

Puis d'après l'étude de g , pour $x > 1$, on a $0 \leq xe^{-x} \leq M$ avec e^{-1} et donc :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du \leq M^{n-1}.$$

On a donc :

$$0 \leq \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du < \underbrace{\frac{n^{n+1}}{n!} M^{n-1}}_{=M\left(\frac{n^{n+1}}{n!} M^n\right)}.$$

On a montré que $\frac{n^{n+1}}{n!} M^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ dans la question 3. Ainsi, par encadrement :

$$\boxed{\frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{T_n(x) = o_{n \rightarrow +\infty}(e^{nx}).}$$