

CORRECTION DM 4 - SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 1 - E3A PC 2020 (Exercice 3)

1. Procédons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation** : On a bien $a_0 = 1 \in]0, 1]$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k \in]0, 1]$.

Ainsi pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $0 < a_k \leq 1$ puis :

$$0 < \frac{a_k}{n-k+2} \leq \frac{1}{n-k+2} \quad (\text{car } n-k+2 \geq 2 > 0)$$

En resommant, on obtient :

$$0 < \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+2}$$

et enfin :

$$0 < \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+2}$$

Or pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\frac{1}{n-k+2} \leq \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+2} \leq \underbrace{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}}.$$

Ainsi :

$$0 < a_{n+1} \leq \frac{1}{2} \leq 1.$$

Donc la propriété est bien héréditaire.

Par principe de récurrence (forte), on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \in]0, 1]$.

2. On vient de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in]0, 1]$. Donc $a_n = O(1)$. Or le rayon de convergence de $\sum x^n$ est 1.

Donc par critère de domination, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur à 1.

3. (a) On a $\frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n}$. Donc $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ ont même rayon de convergence. Puis comme $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} n \times \frac{x^n}{n}$ ont même rayon de convergence, on en déduit :

$$\boxed{R\left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}\right) = R\left(\sum_{n \geq 0} x^n\right) = 1.}$$

(b) On vient de voir que $R\left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}\right) = 1$. Donc la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ diverge grossièrement pour $|x| > 1$. En revanche, elle converge absolument pour $|x| < 1$.

Ainsi, à ce stade, les domaines possibles sont $] -1, 1[$, $[-1, 1[$, $] -1, 1]$ et $[-1, 1]$. Il nous reste donc à déterminer l'éventuelle convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ en 1 et en -1 .

En 1, on a : $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2}$ qui est aux premiers termes près la série harmonique et donc diverge.

En -1 , on a : $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+2}$. Cela ressemble à une série alternée. Et effectivement :

- $(-1)^n \times \frac{(-1)^n}{n+2}$ est de signe constant ;

- $\frac{(-1)^n}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
- $\left| \frac{(-1)^n}{n+2} \right| = \frac{1}{n+2}$ définit une suite décroissance.

Donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+2}$ converge.

Donc le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$ est $[-1, 1[$.

- (c) Notons R_a le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, R le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ et R_w celui de la série produit de Cauchy.

On a toujours : $R_w \geq \min(R, R_a)$. Or $R = 1$ et $R_a \geq 1$. Donc $\min(R, R_a) = 1$. Et ainsi :

$$\boxed{R_w \geq 1.}$$

De plus, par définition du produit de Cauchy, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{(n-k)+2}$. Ainsi :

$$\boxed{w_n = \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{(n-k)+2} = (n+1)a_{n+1}.$$

- (d) f est définie par une série entière. f est donc dérivable sur son intervalle de convergence ouvert. De plus pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n'=0}^{+\infty} a_{n'+1} (n'+1) x^{n'} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n.$$

Or pour tout $x \in]-1, 1[$ (car $1 = \min(R, R_a)$), on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right).$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$

4. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$, on a pour tout $x \in [0, 1[$, $a_n x^n \geq 0$ et en particulier pour $n = 0$, on a $a_0 x^0 = 1 > 0$. Donc pour tout $x \in [0, 1[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n > 0$$

et donc $\ln(f(x))$ est bien défini. Posons g définie sur $[0, 1[$ par $g(x) = \ln(f(x))$.

Puisque f est dérivable sur $] -1, 1[$, elle l'est en particulier sur $[0, 1[$ et par composition g l'est aussi. On a donc :

$$g'(x) = f'(x) \times \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x)}{f(x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$ est une série entière de rayon de convergence $R = 1$. Donc elle est continue sur $] -1, 1[$ (et donc g est continue sur $[0, 1[$) et admet une primitive. En particulier, en tant que série entière, on peut trouver la primitive qui s'annule en 0 en intégrant terme à terme et on trouve :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+1)}.$$

Ainsi, on a :

$$g(x) = g(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+1)}.$$

De plus : $g(0) = \ln(f(0)) = \ln(1) = 0$. Et donc pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\boxed{\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+1)}.$$

5. Commençons par calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+1)}$ pour tout $x \in [0, 1[$.

Soit $x \in [0, 1[$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+2} \right).$$

Les séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2}$ ont le même rayon de convergence qui vaut 1. Donc pour tout $x \in [0, 1[$, elles convergent et on peut séparer la somme en deux :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2}.$$

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la série de Taylor de $x \mapsto \ln(1-x)$ au signe près. On a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

En outre, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x} \times \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1.$$

Et en 0, cette série entière vaut 0. Remarquons que $\frac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$ et donc que la formule précédente tend vers 0. Ce n'est pas étonnant puisque la série entière est continue en 0.

Ainsi pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+1)} = -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1.$$

et pour $x = 0$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+1)} = -\ln(1-0) - 0 = 0.$$

Ainsi, on obtient pour tout $x \in]0, 1[$:

$$f(x) = \exp \left(1 + \ln(1-x) \frac{1-x}{x} \right) = e(1-x)^{\frac{1-x}{x}}.$$

et $f(0) = \exp(0) = 1$.

6. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$ est la série entière qui définit f évaluée en $\frac{1}{2}$. Puisque le rayon de convergence de cette série est 1, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$ converge (et même absolument).

On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = e(1-1/2)^{\frac{1-1/2}{1/2}} = \frac{e}{2}.$$