

TD10 - ESPACES PROBABILISÉS

Exercice 1. L'urne U , au contenu évolutif, contient au départ 1 boule blanche et $n - 1$ boules noires ($n \geq 2$). On effectue des tirages successifs de la façon suivante :

- si au k -ième tirage on tire la boule blanche, on s'arrête, on a gagné ;
- si au k -ième tirage on tire une boule noire, alors on remet la boule noire dans l'urne, on ajoute une boule noire en plus dans l'urne U et on procède au $(k + 1)$ -ième tirage.

On note B_k [resp. N_k] les événements « on a effectué $(k - 1)$ tirages sans obtenir la boule blanche, et le k -ième tirage apporte la boule blanche [resp. une boule noire] ». Calculer les probabilités des événements (après les avoir « renommés ») :

$$B_k \quad ; \quad N_k \quad ; \quad \bigcup_{h \leq k} B_h \quad ; \quad \overline{B_k \cup N_k} \quad ; \quad \bigcup_{h \geq 1} N_h \quad ; \quad \bigcup_{h \geq 1} B_h \quad ; \quad \bigcap_{h \geq 1} N_h.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est p , avec $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers Face ne soit jamais suivi de Pile ?

Exercice 3. Une urne contient $n - 1$ boules blanches et 1 boule noire. On tire les n boules de l'urne de façon successive sans remise. Calculer la probabilité p_k que la boule noire soit tirée au k -ième tirage.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n .

1. On tire successivement deux boules dans l'urne. Quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée ait un numéro supérieur ou égal à celui de la première boule
 - (a) lorsque le tirage est avec remise ;
 - (b) lorsque le tirage est sans remise.

Indication : on pourra introduire pour $1 \leq k \leq n$, l'évènement A_k : « la deuxième boule tirée porte le numéro k » et utiliser la famille d'évènements $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$.

2. On tire successivement p boules dans l'urne.
 - (a) Quelle est la probabilité pour que la p -ième boule tirée ait un numéro supérieur ou égal aux numéros des $(p - 1)$ - premières boules tirées lorsque le tirage est sans remise ? *Indication : on pourra introduire pour $1 \leq k \leq n$, l'évènement A_k : « la p -ième boule tirée porte le numéro k » et utiliser la famille d'évènements $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$.*
 - (b) Montrer par récurrence sur n que pour tout (n, p) d'entiers tels que $0 < p \leq n$, $\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$. En déduire une expression simple de la probabilité cherchée.

Exercice 5. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On retire en une fois de cette urne une poignée aléatoire de p boules ($1 \leq p \leq N$).

1. Soit $k \in \llbracket p, N \rrbracket$. Calculer la probabilité de l'évènement B_k : « le plus grand numéro de la poignée est k ».
2. En déduire la formule : $\sum_{k=p}^N \binom{k-1}{p-1} = \binom{N}{p}$.

Exercice 6. n joueurs (avec $n \geq 2$) vont successivement tenter une expérience où la probabilité d'insuccès est p (avec $0 < p < 1$). Si le premier joueur perd, la partie s'arrête. S'il gagne, le deuxième joueur tente sa chance. S'il perd, la partie s'arrête. S'il gagne, le troisième joueur tente sa chance... Si le n -ième joueur tente sa chance et perd, la partie s'arrête, et s'il gagne le premier joueur tente sa chance pour la deuxième fois etc... La partie s'arrête dès qu'un joueur perd.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Quelle est la probabilité pour que le k -ième joueur perde lors de sa i -ème tentative ?
2. Quelle est la probabilité pour que le k -ième joueur perde la partie ?

Exercice 7. Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu de dé (supposé parfaitement équilibré). A commence la partie et lance le dé. S'il obtient 1 ou 2, A est déclaré vainqueur et la partie s'arrête. Sinon, B prend la main et jette le dé : s'il obtient 3, 4 ou 5, il a gagné et la partie s'arrête. Sinon, A prend la main et on recommence dans les mêmes conditions...

1. Soit n un entier naturel non nul. Calculer les probabilités des événements : A_{2n-1} : « A gagne au $(2n-1)$ -ième lancer » et B_{2n} : « B gagne au $2n$ -ième lancer ».
2. Quelles sont les probabilités des événements G_A : « A gagne », G_B : « B gagne » et H : « la partie ne s'arrête pas ».

Exercice 8. Une urne contient initialement une boule blanche et une noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : si la boule blanche est tirée, le jeu s'arrête, et si une boule noire est tirée, la boule tirée est remise dans l'urne et l'on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, autant de boule noire que l'urne contenait de boules à l'étape précédente. Soit A_n l'évènement « le n -ième tirage amène pour la première fois la boule blanche ».

1. Montrer que $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$, en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
3. A-t-on $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$? Interpréter ce résultat.

Exercice 9. Soit A , B , C trois événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, avec $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(C) > 0$ et $B \cap C = \emptyset$. Exprimer $\mathbb{P}_{B \cup C}(A)$ à l'aide de $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}_B(A)$, et $\mathbb{P}_C(A)$.

Exercice 10. Une maladie rare touche un individu sur 100 000. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour 0.5% des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est alors la probabilité qu'il soit effectivement malade ? Ce test vous paraît-il fiable ? Et si le test est négatif, que doit-on en penser ?

Exercice 11. Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'évènements, B un évènement avec $\mathbb{P}_{E_n}(B) \leq \frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{3}$.

Exercice 12. On considère $n+1$ urnes $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$. Pour $0 \leq k \leq n$, l'urne $\mathcal{U}_k$ contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, puis on tire successivement deux boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches, si le tirage se fait avec remise ?
2. Même question si le tirage se fait sans remise.

Exercice 13. Une cellule se déplace entre trois points distincts A , B et C . A chaque étape, elle quitte sa position et gagne indifféremment (c'est à dire avec la même probabilité, $\frac{1}{2}$) l'un des deux autres points. On note a_n , b_n et c_n les probabilités qu'elle se trouve en A , B et C à l'issue de la n -ième étape. On suppose la cellule en A initialement.

1. Donner les valeurs de a_0 , b_0 et c_0 .
2. Exprimer a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
3. En déduire les expressions de a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Exercice 14. On a une urne U qui contient une boule blanche et une boule noire, et une urne V qui contient une boule noire et deux boules blanches. On tire successivement une boule avec remise dans l'une des deux urnes en respectant le protocole suivant : on commence par tirer dans U , si on tire une boule blanche on effectue le tirage suivant dans la même urne, sinon on change d'urne.

1. Calculer la probabilité de tirer dans l'urne U au n -ième tirage.
2. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au n -ième tirage.

Exercice 15. Soit deux événements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,4$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ dans les cas suivants :

1. A et B sont incompatibles ;
2. la réalisation de B entraîne celle de A ;

3. A et B sont indépendants (pour $\mathbb{P}$);
4. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants (pour $\mathbb{P}$).

Exercice 16. Soit $p \in]0, 1[$ un réel. Une personne effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie (*on considère qu'elle ne s'arrête pas après avoir gagné ou perdu*). Elle a une probabilité p d'obtenir Pile et une probabilité $q = 1 - p$ d'obtenir Face.

- la personne gagne la première fois qu'elle obtient deux Pile de plus que de Face, à condition de ne pas avoir perdu avant ;
 - la personne perd la première fois qu'elle obtient deux Face de plus que de Pile, à condition de ne pas avoir gagné avant .
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'évènement O_n : « en $2n$ coups, la personne n'a ni gagné, ni perdu, et à l'issue du $2n$ -ième lancers, elle a obtenu autant de Pile que de Face ».
 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dédurre de la question précédente la probabilité que la partie dure strictement plus de $2n$ coups.
 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité que la personne gagne au $2n$ -ième lancer.
 4. Calculer la probabilité que la personne gagne.

Exercice 17. On effectue des tirages successifs sans remise dans une urne U . L'urne U contient une boule blanche, trois boules noires et r boules rouges. Si on a tiré la boule blanche, on a gagné. Si on a tiré une boule noire, on a perdu. Et si on a tiré une boule rouge, on retire une autre boule (la partie se termine donc en moins de $r + 4$ coups, car il n'y a pas remise).

1. Si p_r désigne la probabilité de gagner lorsque l'urne contient r boules rouges, calculer p_0 et p_1 .
2. Démontrer l'égalité : pour $r \in \mathbb{N}^*$, $p_r = \frac{1}{r+4} + \frac{r}{r+4}p_{r-1}$. En déduire la valeur de p_r en fonction de r .

Exercice 18. Un joueur lance une pièce qui donne « pile » avec la probabilité p , et « face » avec la probabilité $q = 1 - p$. Le joueur veut réaliser l'évènement suivant : « obtenir 2 fois pile à la suite », et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n : « le deuxième pile de la première série de deux piles consécutifs a été obtenu lors du n -ième lancer ». On note B_n l'évènement « on a obtenu au moins une fois 2 piles à la suite au cours des n premiers lancers ».

1. (a) Déterminer les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 .
(b) Calculer $\mathbb{P}(B_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Démontrer que la suite (B_n) est une suite croissante d'évènements.
2. (a) Démontrer, pour $n \geq 2$, que $\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=2}^n p_k$ et, pour $n \geq 1$, que $p_{n+3} = \mathbb{P}(E_{n+3}) = (1 - \mathbb{P}(B_n))qp^2$.
(b) En déduire que $p_{n+2} - p_{n+3} = qp^2p_n$ si $n \geq 1$.
3. (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ des suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui vérifient la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+3} - u_{n+2} + qp^2u_n = 0$$

est muni d'une structure d'espace vectoriel.

- (b) Démontrer que la suite (r^n) appartient à $\mathcal{U}$ si et seulement si $r^3 - r^2 = p^3 - p^2$ ou $r = 0$. Démontrer que cette équation possède trois racines réelles.
- (c) On choisit d'étudier le cas $p = \frac{3}{7}$: démontrer que les racines de cette équation sont $r = \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$ et $-\frac{2}{7}$. En déduire pour cette valeur de p une base de $\mathcal{U}$.

- (d) On donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 9 & 36 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{9}{20} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$. Déterminer p_n en fonction de n .

Exercice 19 (CCP RMS 2016 - exo 2). On considère deux urnes. La première contient 4 boules noires et 2 blanches, la deuxième 2 noires et 4 blanches. On choisit une urne au hasard, on tire successivement 3 boules sans remise. Donner la probabilité de tirer une troisième boule noire sachant que l'on a déjà tiré 2 boules noires avant.

Solutions

Exercice 1. ★ Pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$, $B_k = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$, et par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_k) &= \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) \dots \mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-2}}(N_{k-1})\mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} \times \dots \times \frac{n-1+k-2}{n+k-2} \times \frac{1}{n+k-1} = \boxed{\frac{n-1}{(n+k-2)(n+k-1)}}\end{aligned}$$

Ce qui est important ici, c'est de bien comprendre les probabilités conditionnelles à calculer : $\mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_i}(N_{i+1})$ est la probabilité « sachant $N_1 \cap \dots \cap N_i$ », donc « sachant que l'on a tiré aux i premiers tirages que des boules noires, et donc **qu'il y a un tirage numéro $i+1$** », d'avoir une boule noire au tirage numéro $i+1$. Comme on sait $N_1 \cap \dots \cap N_i$, au moment du tirage $i+1$, l'urne contient $n+i$ boules, dont 1 seule blanche, et donc $\mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_i}(N_{i+1}) = \frac{n+i-1}{n+i}$.

★ Pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$, $N_k = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap N_k$, et par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(N_k) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) \dots \mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(N_k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} \times \dots \times \frac{n-1+k-2}{n+k-2} \times \frac{n+k-2}{n+k-1} = \boxed{\frac{n-1}{n+k-1}}.$$

★ Pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$,

$$\bigcup_{h \in \llbracket 1, k \rrbracket} B_h = \text{« on tire une boule blanche (donc le jeu se termine) au plus tard au } k\text{-ième tirage »},$$

et comme les B_h sont deux à deux incompatibles (si on tire une boule blanche, le jeu se termine, donc on ne peut pas tirer une autre boule blanche), on a

$$P\left(\bigcup_{h \in \llbracket 1, k \rrbracket} B_h\right) = \sum_{h=1}^k \mathbb{P}(B_h) = \sum_{h=1}^k \frac{n-1}{(n+h-2)(n+h-1)}$$

Mais cette expression n'est pas satisfaisante, car la somme ne se calcule pas facilement (en fait si, si on décompose en élément simple, et qu'on reconnaît une somme télescopique...). Mais, on peut remarquer $\bigcup_{h \leq k} B_h = N_k$, car le jeu ne se termine pas avant le k -ième tirage si et seulement si aux k premiers tirages, on a eu une boule noire. Donc

$$\boxed{P\left(\bigcup_{h \in \llbracket 1, k \rrbracket} B_h\right) = 1 - \frac{n-1}{n+k-1}} = \frac{k}{n+k-1}.$$

★ Pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}B_k \cup N_k &= \text{« on tire une boule blanche ou une boule noire au tirage numéro } k \text{ »} \\ &= \text{« il y a un tirage numéro } k \text{ »} \\ &= N_{k-1}\end{aligned}$$

et donc

$$\overline{B_k \cup N_k} = \text{« on a tiré la boule blanche au plus tard au } k-1\text{-ième tirage »} = \bigcup_{h \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket} B_h.$$

Donc

$$\boxed{P(\overline{B_k \cup N_k}) = 1 - \frac{n-1}{n+k-2}}.$$

Autre façon :

$$\mathbb{P}(\overline{B_k \cup N_k}) = 1 - \mathbb{P}(B_k \cup N_k) = 1 - (\mathbb{P}(N_k) + \mathbb{P}(B_k) - \mathbb{P}(B_k \cap N_k)) = 1 - \mathbb{P}(N_k) - \mathbb{P}(B_k)$$

car $B_k \cap N_k = \emptyset$, donc $\mathbb{P}(B_k \cap N_k) = 0$. En reportant alors les valeurs :

$$\mathbb{P}(\overline{B_k \cup N_k}) = 1 - \frac{n-1}{n+k-1} - \frac{n-1}{(n+k-2)(n+k-1)} = 1 - (n-1) \frac{n+k-2+1}{(n+k-2)(n+k-1)} = 1 - \frac{n-1}{n+k-2}$$

★ La suite d'évènements $\left(\bigcup_{h \in \llbracket 1, k \rrbracket} N_h\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion, donc $P\left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}^*} N_h\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{h \in \llbracket 1, k \rrbracket} N_h\right)$. Or, $\bigcup_{h \in \llbracket 1, k \rrbracket} N_h = N_1$ pour tout k (car pour tout $h \in \mathbb{N}$ avec $h \geq 2$, $N_h \subset N_1$, puisqu'il y a eu un tirage numéro h , et donc le jeu ne s'est pas terminé au tirage numéro 1). Donc $P\left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}^*} N_h\right) = \mathbb{P}(N_1) = \boxed{\frac{n-1}{n}}$.

Remarque. En fait, on a même $\bigcup_{h \in \llbracket 1, k \rrbracket} N_h = N_1$.

★ Les évènements $(B_h)_{h \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles et forment une famille dénombrable, donc par σ -additivité de $\mathbb{P}$,

$$P\left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}^*} B_h\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_h) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+h-2)(n+h-1)}.$$

On décompose alors en éléments simples : $\frac{n-1}{(n+h-2)(n+h-1)} = \frac{n-1}{n+h-2} - \frac{n-1}{n+h-1}$, on a une série télescopique, et donc

$$P\left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}^*} B_h\right) = 1 - \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+k-1} = \boxed{1}.$$

On peut aussi dire que la suite d'évènements $\left(\bigcup_{h \in \llbracket 1, k \rrbracket} B_h\right)_{k \geq 1}$ est croissante pour l'inclusion, donc

$$P\left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}^*} B_h\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{h \in \llbracket 1, k \rrbracket} B_h\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{n-1}{n+k-1}\right) = \boxed{1}.$$

★ On a

$$\bigcap_{h \in \mathbb{N}^*} N_h = \llcorner \text{on ne tire que des boules noires} \lrcorner.$$

La suite d'évènements $(N_h)_{h \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, donc

$$P\left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}^*} N_h\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(N_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+k-1} = \boxed{0}.$$

Une autre possibilité est de remarquer que

$$\bigcap_{h \in \mathbb{N}^*} N_h = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} B_k}.$$

Exercice 2. Notons E l'évènement considéré. Notons F_i l'évènement « on obtient Face au lancer i » et $\mathbb{P}_i$ l'évènement « on obtient Pile au lancer i » (pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$). On peut se lancer dans une description complète de l'évènement E :

$$E = \bigcup_{i=1}^{n+1} (\mathbb{P}_1 \cap \cdots \cap \mathbb{P}_{i-1} \cap F_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_n)$$

(où par convention le terme $i = 1$ donne $F_1 \cap \cdots \cap F_n$, et le terme $i = n+1$ donne $\mathbb{P}_1 \cap \cdots \cap \mathbb{P}_n$).

Présentons-le autrement : notons, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_i l'évènement « le premier Face est obtenu au lancer i », et B l'évènement « il n'y a pas eu de Face lors des n premiers lancers ». On considère le système complet d'évènement $(A_1, \dots, A_n, B)$ (c'est bien un système complet d'évènement car ils sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, car le **premier** Face ne peut apparaître à deux lancers différents, et $A_i \cap B = \emptyset$ provient de $i \leq n$. Puis, la réunion fait Ω car soit on a Face au cours des n premiers lancers, et donc le premier Face est arrivé au plus tard au n -ième lancer, soit on n'a pas eu Face au cours des n premiers lancers). Alors la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(E) + \mathbb{P}(B) \mathbb{P}_B(E).$$

Puis, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_i = \mathbb{P}_1 \cap \dots \cap \mathbb{P}_{i-1} \cap F_i$, donc (par indépendance des lancers)

$$\mathbb{P}(A_i) = q^{i-1}p, \quad B = \mathbb{P}_1 \cap \dots \cap \mathbb{P}_n,$$

donc $\mathbb{P}(B) = q^n$. Enfin, $\mathbb{P}_B(E) = 1$, et

$$\mathbb{P}_{A_i}(E) = \mathbb{P}(F_{i+1} \cap \dots \cap F_n)$$

(car si le premier Face est arrivé au lancer i , jusqu'au lancer i on n'a pas eu de Pile suivant Face, et le lancer $i+1$ doit nécessairement être un Face, puis le $i+2$ aussi... jusqu'au n -ième), donc $\mathbb{P}_{A_i}(E) = p^{n-i}$ par indépendance des lancers.

Remarque. Il serait plus juste d'écrire la formule des probabilités totales sous la forme

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap E) + \mathbb{P}(B \cap E),$$

et de dire $A_i \cap E = A_i \cap (F_{i+1} \cap \dots \cap F_n)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B \subset E$, et comme A_i ne concerne que les tirages numéro 1 à i , et $(F_{i+1} \cap \dots \cap F_n)$ que les tirages $i+1$ à n , par indépendance des lancers, A_i et $(F_{i+1} \cap \dots \cap F_n)$ sont indépendants, ce qui donne

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(F_{i+1} \cap \dots \cap F_n) + \mathbb{P}(B).$$

On a alors

$$\mathbb{P}(E) = q^n + \sum_{i=1}^n q^{i-1} p p^{n-i} = q^n + \frac{p^{n+1}}{q} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q}{p}\right)^i = q^n + \frac{p^{n+1}}{q} \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - \frac{q}{p}} = q^n + p \frac{p^n - q^n}{p - q} = \boxed{\frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}}.$$

Exercice 3. Par la formule des probabilités composées : soit, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

B_i : « on tire une boule blanche au i -ème tirage »,

alors l'évènement « la boule noire est tirée au k -ième tirage » (pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) s'écrit $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}$ et donc

$$\begin{aligned} p_k = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) &= \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2 \dots \cap B_{k-1}}(\overline{B_k}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2 \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \dots \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}(B_1) \\ &= \frac{1}{n-k+1} \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \dots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} = \boxed{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

En effet, lors du tirage numéro i , on a $n - (i - 1)$ boules dans l'urne (puisqu'on en a déjà tiré $i - 1$), et si on n'a tiré avant que des boules blanches, lors du tirage numéro i il y a $n - i$ boules blanches et 1 noire, d'où (par exemple) $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$.

Exercice 4. 1) $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'évènements, car $A_k \cap A_j = \emptyset$ si $j \neq k$ (une boule n'a qu'un seul numéro) et $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ (car la deuxième boule tirée a un numéro compris entre 1 et n). Notons E l'évènement

qui nous intéresse. Alors la formule des probabilités totales donne $\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(E \cap A_k)$.

1a) Or, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$E \cap A_k = \underbrace{\text{« Le premier tirage amène une boule de numéro } \leq k \text{ »}}_{=B_k} \cap A_k,$$

donc $\mathbb{P}(E \cap A_k) = \mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(A_k)$. Si le tirage est avec remise, les tirages sont indépendants, donc comme B_k concerne le premier tirage, et A_k le second, on a $\mathbb{P}_{B_k}(A_k) = \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}$, et $\mathbb{P}(B_k) = \frac{k}{n}$ (le numéro du tirage dans une urne suit une loi uniforme), et donc

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \boxed{\frac{n+1}{2n}}.$$

1. Avec la convention que, pour $k = 1$, $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k} = \overline{B_1}$. Les formules qui suivent restent valable pour $k = 1$ avec cette convention.

1b) Si le tirage est sans remise, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$E \cap A_k = \underbrace{\llbracket \text{Le premier tirage amène une boule de numéro } < k \rrbracket}_{=B_k} \cap A_k$$

(car si on tire la boule numéro k au deuxième tirage, on n'a pas pu la tirer au premier), puis $\mathbb{P}(E \cap A_k) = \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(A_k)$. Et $E \cap A_1 = \emptyset$, donc $\mathbb{P}(E \cap A_1) = 0$.

Or, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\mathbb{P}_{B_k}(A_k) = \frac{1}{n-1}$, et $\mathbb{P}(B_k) = \frac{k-1}{n}$, et donc

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{n(n-1)} = -0 + \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n(n-1)} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

2a) $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'évènements (idem qu'avant), et si E est l'évènement qui nous intéresse, la formule des probabilités totales donne $\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(E \cap A_k)$. Or, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(E \cap A_k) = A_k \cap \underbrace{\llbracket \text{les } p-1 \text{ premiers tirages ont amenés que des boules avec un numéro au plus } k-1 \rrbracket}_{=B_k}$$

(car il n'y a pas remise, donc pour avoir la boule k au tirage numéro p , on ne l'a pas eu avant). On modélise un tirage de $p-1$ boules sans remise dans une urne contenant les boules 1 à n par une application injective de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'ensemble des telles applications étant alors muni de la probabilité uniforme. Alors, avoir que des numéros au plus $k-1$ revient à ne considérer que les applications injectives de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$. Donc

$$\mathbb{P}(B_k) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+2)}$$

(on rappelle que le nombre d'applications injectives de $\llbracket 1, r \rrbracket$ dans $\llbracket 1, s \rrbracket$ est $s(s-1)\dots(s-r+1)$, sans condition sur r ou s).

On peut remarquer que si $p-1 \geq k$, alors $\mathbb{P}(B_k) = 0$ (car il est impossible de tirer sans remise plus de fois qu'on a de boules autorisées!). Puis $\mathbb{P}_{B_k}(A_k) = \frac{1}{n-p+1}$ (car sachant B_k , au moment du p -ième tirage, il y a $n-(p-1)$ boules dans l'urne, et toutes sont supérieures ou égales à k , et une seule vaut k).

Donc

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{n} \sum_{k=p}^n \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}.$$

Remarque. Une autre façon de calculer cette probabilité : $(A_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'évènements (idem qu'avant), et si E est l'évènement qui nous intéresse, la formule des probabilités totales donne $\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(E)$. Or,

$$\mathbb{P}_{A_k}(E) = \mathbb{P}_{A_k}(\llbracket \text{les } p-1 \text{ premiers tirages ont amenés que des boules avec un numéro au plus } k-1 \rrbracket)$$

(car il n'y a pas remise, donc pour avoir la boule k au tirage numéro p , on ne l'a pas eu avant). On modélise un tirage de $p-1$ boules sans remise dans une urne contenant les boules 1 à n par une application injective de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'ensemble des telles applications étant alors muni de la probabilité uniforme. **Mais ici, la boule numéro k est interdite (car on regarde la probabilité $\mathbb{P}_{A_k}$, donc elle est apparue au tirage numéro p et pas avant), donc on regarde les applications injectives de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ dans un ensemble de cardinal $n-1$ (à savoir $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}$).** Alors, avoir que des numéros au plus $k-1$ revient à ne considérer que les applications injectives de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$. Donc

$$\mathbb{P}_{A_k}(E) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}$$

(on rappelle que le nombre d'applications injectives de $\llbracket 1, r \rrbracket$ dans $\llbracket 1, s \rrbracket$ est $s(s-1)\dots(s-r+1)$).

On peut remarquer que si $p-1 \geq k$, alors $\mathbb{P}_{A_k}(E) = 0$ (car il est impossible de tirer sans remise plus de fois qu'on a de boules autorisées!). Puis, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}$ si $k \leq n$ (il faut qu'il y ait encore des boules dans l'urne, mais aucune n'a plus de chance d'être piochée qu'une autre; si on n'est pas convaincu par ce raisonnement, on peut utiliser les applications injectives de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$: les cas favorables sont celles qui envoient p sur k , il y en a donc

$(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$, on divise par le nombre de cas possibles, $n(n-1)\dots(n-p+1)$, et on retrouve le même résultat). Donc

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{n} \sum_{k=p}^n \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}.$$

2b) Pour faire le lien avec ce qui précède, et si on admet un instant la formule de l'énoncé :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{n} \sum_{k=p}^n \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n-1}{p-1}} = \frac{\binom{n}{p}}{n \binom{n-1}{p-1}} = \boxed{\frac{1}{p}}.$$

La formule de l'énoncé se montre par récurrence sur n à p fixé :

Initialisation : si $n = p$,

$$\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{p-1}{p-1} = 1 = \binom{n}{p},$$

d'où l'initialisation.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p$, supposons $\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k-1}{p-1} = \sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} + \binom{n}{p-1} \stackrel{HR}{=} \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}$$

par la formule de Pascal, d'où l'hérédité.

Conclusion : a $p > 0$ fixé, on a bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p$, $\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

Exercice 5. 1) Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, notons A_k l'évènement « le plus grand numéro de la poignée est au plus k ». Alors pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$A_k = B_k \cup A_{k-1}$$

(avec la convention $A_0 = \emptyset$, pour que l'égalité reste vraie si $k = 1$), et B_k et A_{k-1} sont incompatibles, donc

$$\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1}).$$

Or, pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, A_k est l'évènement

« on retire en une fois de l'urne une poignée aléatoire de p boules parmi les boules numérotées de 1 à k »,

et comme on met la probabilité uniforme sur les poignées (aucune n'est plus probable qu'une autre), alors pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{\binom{k}{p}}{\binom{N}{p}},$$

et donc pour $k \in \llbracket p, N \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(B_k) = \frac{\binom{k}{p}}{\binom{N}{p}} - \frac{\binom{k-1}{p}}{\binom{N}{p}} = \boxed{\frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{N}{p}}}$$

(d'après la formule de Pascal).

Remarque.

1. Normalement, il faut vérifier que si $k = 1$ (ce qui n'arrive que pour $p = 1$), la formule reste vraie (car le calcul de $\mathbb{P}(A_0)$ se fait par une autre formule que celle des $\mathbb{P}(A_k)$ pour $k \geq 1$). Or, si $p = k = 1$, on a $B_1 = A_1$ et $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{1}{1}}{\binom{N}{1}} = \frac{1}{N}$, et on a bien $\frac{\binom{1-1}{1-1}}{\binom{N}{1}} = \frac{1}{N}$: la formule reste vraie.
2. On peut aussi dire directement (pour $p \geq 2$) : une poignée de p boules qui a k comme plus grand élément est formé de la boule k et d'une poignée de $p-1$ boules numérotées de 1 à $k-1$, il y en a donc $\binom{k-1}{p-1}$. Comme il y a $\binom{N}{p}$ poignées possibles, et que l'on suppose l'équiprobabilité sur les poignées, on retrouve $\mathbb{P}(B_k) = \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{N}{p}}$.

2) Comme $(B_k)_{k \in [p, N]}$ est un système complet d'évènements (le plus grand numéro ne peut pas prendre deux valeurs distinctes, donc les B_k sont deux à deux incompatibles, et $\bigcup_{k \in [p, N]} B_k = \Omega$, puisque la poignée a p boules numérotés distinctement entre 1 et N , donc le plus grand numéro est au moins p , et au plus N), on a

$$1 = \sum_{k=p}^N \mathbb{P}(B_k),$$

ce qui donne en remplaçant la formule voulue.

Exercice 6. Soit $k \in [1, n]$.

1) Le joueur k rate sa i -ième tentative si et seulement si tout le monde a gagné $i-1$ tentatives, et les $k-1$ premiers ont gagné encore une fois de plus, et le k -ième perd. Ce n'est pas précisé, mais on va supposer que les essais des joueurs sont indépendants les uns des autres (et je rappelle que le « et » se traduit par des intersections...). La probabilité cherchée est donc $p^{(i-1)n+k-1}q$.

2) Si, pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note E_i l'évènement « le k -ième joueur perd lors de sa i -ème tentative », et E « le k -ième joueur perd », alors $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Or, les E_i sont des évènements deux à deux incompatibles (car dès qu'on perd, le jeu se termine, on ne peut pas perdre à deux moments différents), et donc par σ -additivité de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p^{(i-1)n+k-1}q = qp^{k-1} \sum_{i=1}^{\infty} (p^n)^{i-1} = \boxed{\frac{qp^{k-1}}{1-p^n}}$$

(car la série converge, puisque série géométrique de raison $p \in]-1, 1[$).

Exercice 7. 1) Comme le jeu s'arrête dès qu'un joueur gagne, pour qu'il y ait un $(2n-1)$ -ième lancer, il faut et il suffit que lors des $(2n-2)$ premiers lancers, ni A ni B ne gagne. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$A_{2n-1} = \overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n-3}} \cap \overline{B_{2n-2}} \cap A_{2n-1}$$

(ce qu'on peut dire en disant $A_{2n-1} \subset \overline{A_{2i-1}}$ pour $i \leq n-1$ et $A_{2n-1} \subset \overline{B_{2i}}$ pour $i \leq n-1$).

Par la formule des probabilités composées, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{2n-1}) &= P(\overline{A_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{B_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{2n-4}}}(\overline{A_{2n-3}}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n-3}}}(\overline{B_{2n-2}}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{2n-2}}}(A_{2n-1}) \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \cdots \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \left(\frac{4}{6} \times \frac{3}{6}\right)^{n-1} \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3^n}} \end{aligned}$$

En effet, le lancer de dé numéro i n'influe sur les suivants que pour savoir si le jeu s'est arrêté au lancer i ou non. Or, si on sait $\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2i-3}}$, alors le lancer $2i-2$ a lieu, et lors de ce lancer, le résultat est une variable uniforme qui prend comme valeurs 1 à 6, et comme trois de ces valeurs donnent un échec pour B , on a $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2i-3}}}(\overline{B_{2i-2}}) = \frac{3}{6}$. De même, si on sait $\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{2i-2}}$, alors le lancer $2i-1$ a lieu, et lors de ce lancer, le résultat est une variable uniforme qui prend comme valeurs 1 à 6, et comme quatre de ces valeurs donnent un échec pour A , on a $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{2i-2}}}(\overline{A_{2i-1}}) = \frac{4}{6}$ et $\mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{2i-2}}}(A_{2i-1}) = \frac{2}{6}$.

Remarque. Cette formule reste vraie pour $n = 1$, puisque $\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3^1}$.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on a $B_{2n} = \overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{2n-2}} \cap \overline{A_{2n-1}} \cap B_{2n}$, et

$$\mathbb{P}(B_{2n}) = P(\overline{A_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{B_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{2n-2}}}(\overline{A_{2n-1}}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n-1}}}(B_{2n}) = \left(\frac{4}{6} \times \frac{3}{6}\right)^{n-1} \frac{4}{6} \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{3^n}}.$$

Remarque. Cette formule reste vraie pour $n = 1$, puisque $B_2 = \overline{A_1} \cap B_2$, donc $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap B_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(B_2) = \frac{4}{6} \frac{3}{6} = \frac{1}{3^1}$.

2) $G_A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n-1}$ (union dénombrable), et comme les A_{2n-1} sont deux à deux incompatibles (car, d'après la définition du jeu, on ne peut gagner qu'à un seul lancer), par σ -additivité de $\mathbb{P}$, on a :

$$\mathbb{P}(G_A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

De même, $G_B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{2n}$ (union dénombrable), et comme les B_{2n} sont deux à deux incompatibles, par σ -additivité de $\mathbb{P}$, on a :

$$\mathbb{P}(G_B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Or, $H = \overline{G_A \cup G_B}$, et comme G_A et G_B sont incompatibles (même raison), on a

$$\mathbb{P}(H) = 1 - \mathbb{P}(G_A \cup G_B) = 1 - \mathbb{P}(G_A) - \mathbb{P}(G_B) = \boxed{0}$$

On interprète ceci en disant que le jeu se termine au bout d'un nombre fini de lancers avec probabilité 1 (c'est-à-dire *presque sûrement*).

Exercice 8. 1) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, notons N_i l'évènement « au tirage i on obtient une boule noire ». Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$A_n = N_1 \cap \dots \cap N_{n-1} \cap A_n$$

(en effet, si c'est au n -ième tirage que l'on a la *première* boule blanche, c'est que les $n-1$ tirages précédents n'ont ramené que des boules noires). La formule des probabilités composées donne alors :

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(N_1) \left(\prod_{k=2}^{n-1} \mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(N_k) \right) \mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}}(A_n)$$

(où, si $n = 2$, le produit est vide, donc vaut 1 par convention).

$\mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$, puis pour $k \geq 2$, le fait de savoir $N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}$ assure que le k -ième tirage a lieu (car on n'a pas encore eu de boule blanche), de plus l'urne a doublé de taille $k-1$ fois (donc le nombre de boules dans l'urne est une suite géométrique de raison 2), et comme elle contenait 2 boules pour le premier tirage, pour le k -ième tirage elle va en contenir 2^k (dont $2^k - 1$ noires et 1 blanche). Donc

$$\mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(N_k) = \frac{2^k - 1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{2^n}.$$

D'où l'expression (*en vérifiant à part le cas particulier $n = 2$*).

Remarque. La formule reste vraie pour $n = 1$, avec la convention qu'un produit vide vaut 1, car alors

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} \prod_{k=1}^{1-1} \left(1 - \frac{1}{2^k} \right).$$

2) On a

$$-\ln \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} - \left(-\frac{1}{2^k} \right) = \frac{1}{2^k}$$

car $\frac{1}{2^k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ (et $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$). Or, $\frac{1}{2^k} \geq 0$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et la série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc convergente. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série numérique $\sum_{k \geq 1} -\ln \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)$ converge, et donc la série numérique $\sum_{k \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)$ converge aussi.

Puis, si on note $u_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$), alors $u_n > 0$ pour tout entier $n \geq 2$ (car on fait le produit de nombres > 0), donc $\ln(u_n)$ existe, et

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)$$

est la somme partielle (d'indice $n-1$) de la série précédemment étudiée, qui converge, donc la suite $(\ln(u_n))_{n \geq 2}$ est convergente (vers un réel $\ell = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)$). Comme l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, (u_n) converge aussi (vers un réel > 0 puisque c'est e^ℓ). Or, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{u_n}{2^n}$, donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0}.$$

Remarque.

1. Plus rapide : il est direct que $0 \leq 1 - \frac{1}{2^k} \leq 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donc par multiplication d'inégalités positives, il vient

$$0 \leq \mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, et donc le théorème des gendarmes donne directement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

La méthode précédente (certes plus compliqué) a l'avantage d'aider pour la question suivante.

2. On a même encore plus rapide : les événements A_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont deux à deux incompatibles (on ne peut pas avoir « la première fois » à deux tirages différents), donc par σ -additivité de $\mathbb{P}$, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_n)$ converge, donc son terme général tend vers 0.

3) Notons B l'évènement « la boule blanche est obtenue à l'un des tirages », alors $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, les A_n sont deux à deux incompatibles, donc par σ -additivité de $\mathbb{P}$, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_n)$ converge et $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$. On veut donc savoir si $\mathbb{P}(B) = 1$, ou ce qui revient au même, si $\mathbb{P}(\overline{B}) = 0$. Or, $\overline{B}$ est l'évènement « on obtient une boule noire à chaque tirage », autrement dit

$$\overline{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n.$$

Par continuité décroissante de $\mathbb{P}$, on sait alors :

$$\mathbb{P}(\overline{B}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(N_1 \cap \dots \cap N_n)$$

(car la suite $(N_1 \cap \dots \cap N_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, et l'intersection de tous ses éléments fait $\overline{B}$). Or, comme à la première question, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(N_1 \cap \dots \cap N_n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = u_{n+1}.$$

De plus, on a vu que la suite (u_n) converge vers un réel $L > 0$, donc $\mathbb{P}(\overline{B}) = L > 0$, autrement dit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < 1.$$

Remarque.

1. $\mathbb{P}(A_n) \geq 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \geq \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \in]0, 1[$.
2. Si on veut juste répondre à la question, on a plus rapide : pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on a

$$0 < u_n < 1$$

(comme produit de nombres strictement positifs et strictement plus petit que 1), donc

$$0 < \mathbb{P}(A_n) < \frac{1}{2^n}$$

pour $n \geq 2$, et $0 < \mathbb{P}(A_1) \leq \frac{1}{2}$, ce qui donne en sommant :

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 < \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

3. En fait, la méthode exposée ici est plus précise : on a montré que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1 - e^\ell$, avec $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
Mais en fait, on avait pas besoin de faire aussi compliqué : pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(A_n) = \left(1 - 1 + \frac{1}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = u_n - u_{n+1}$$

et donc la série numérique $\sum_{n \geq 2} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n \geq 2} (u_n - u_{n+1})$ est télescopique...

Interprétons ceci : B est l'évènement « le jeu se termine en un nombre fini d'étapes », et comme il n'est pas de probabilité 1, on sait que la probabilité que le jeu se termine est strictement plus petite que 1. Dis autrement, la probabilité que le jeu ne se termine jamais est strictement positive.

Exercice 9. Remarquons que $B \subset B \cup C$, donc

$$0 < \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(B \cup C),$$

donc la probabilité conditionnelle considérée existe bien. Puis :

$$\mathbb{P}_{B \cup C}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))}{\mathbb{P}(B \cup C)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C))}{\mathbb{P}(B \cup C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(B \cup C)}$$

car $A \cap B$ et $A \cap C$ sont incompatibles, puisque $B \cap C = \emptyset$.

De même, puisque $B \cap C = \emptyset$, on a

$$\mathbb{P}(B \cup C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

Donc, par la formule des probabilités composées, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}_{B \cup C}(A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)} \mathbb{P}_B(A) + \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)} \mathbb{P}_C(A)}.$$

Exercice 10. Notons T l'évènement « le test est positif », M l'évènement « l'individu est malade ». L'énoncé nous donne :

$$\mathbb{P}(M) = \frac{1}{100000} \quad \mathbb{P}_M(T) = \frac{95}{100} \quad \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = \frac{5}{1000}$$

On veut $\mathbb{P}_T(M)$. On va utiliser la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(T \cap M)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(T)}$$

et on calcule ensuite $\mathbb{P}(T)$ à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'évènement $(M, \overline{M})$:

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T) + (1 - \mathbb{P}(M))\mathbb{P}_{\overline{M}}(T).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T) + (1 - \mathbb{P}(M))\mathbb{P}_{\overline{M}}(T)} = \frac{190}{100189} \approx \boxed{0.19\%}$$

Ce test n'est pas du tout fiable pour déterminer si un individu est malade!!!

Par contre, si le test est négatif, et que l'on cherche la probabilité que l'individu soit effectivement sain, on veut (de même) :

$$\mathbb{P}_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T})}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(\overline{T}) + (1 - \mathbb{P}(M))\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T})} = \frac{(1 - \mathbb{P}(M))(1 - \mathbb{P}_{\overline{M}}(T))}{\mathbb{P}(M)(1 - \mathbb{P}_M(T)) + (1 - \mathbb{P}(M))(1 - \mathbb{P}_{\overline{M}}(T))} = \frac{19899801}{19899811} \approx \boxed{99,9999\%}$$

Donc ce test est très utile pour faire une première présélection (tous ceux qui ont un test négatif peuvent être considérés comme sains).

Exercice 11. La formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{E_n}(B) \mathbb{P}(E_n)$$

(avec l'assurance de la convergence de cette série). Puis, $\mathbb{P}_{E_n}(B) \leq \frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mathbb{P}(E_n) \geq 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{E_n}(B) \mathbb{P}(E_n) \leq \frac{1}{3} \mathbb{P}(E_n).$$

Enfin, en sommant, car les séries numériques ci-dessous convergent, on a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{E_n}(B) \mathbb{P}(E_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{3} \times 1,$$

puisque $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'évènements, ce qui assure que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_n)$ converge, de somme 1.

Exercice 12. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons U_k l'évènement « on choisit l'urne numéro k ». « On choisit une urne au hasard » se traduit par

$$P(U_k) = \frac{1}{n+1}$$

pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (car on a $n+1$ urnes, et que l'on met la probabilité uniforme sur l'ensemble des urnes). Notons, pour $i \in \mathbb{N}^*$, B_i l'évènement « obtenir une boule blanche au i -ième tirage ». Alors l'évènement qui nous intéresse est $B_1 \cap B_2$. Si on lui applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(U_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ (c'est bien un système complet d'évènements, car on choisit une seule urne (ce qui assure l'incompatibilité deux à deux), et forcément une qui a un numéro entre 0 et n (donc la réunion est l'évènement certain)) :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \sum_{k=0}^n P(U_k) \mathbb{P}_{U_k}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}_{U_k}(B_1 \cap B_2)$$

1) Si le tirage dans l'urne (*une fois l'urne fixée*) se fait avec remise, alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, B_1 et B_2 sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}_{U_k}$, et donc

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}_{U_k}(B_1) \mathbb{P}_{U_k}(B_2) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)} = \boxed{\frac{2n+1}{6n}}$$

2) Si le tirage dans l'urne se fait sans remise : pour $k = 0$, $\mathbb{P}_{U_k}(B_1 \cap B_2) = 0$ (on ne peut pas tirer sans remise deux boules blanches dans une urne qui n'en contient pas (dis autrement, $U_k \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset$ pour $k = 0$)...), puis on utilise la formule des probabilités composées (car $U_k \cap B_1$ est de probabilité non nulle pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{U_k}(B_1) \mathbb{P}_{U_k \cap B_1}(B_2) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{k-1}{n-1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n-1)n(n+1)} - \frac{n(n+1)}{2(n-1)n(n+1)} = \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Exercice 13. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n l'évènement « la cellule se trouve en A à l'issue de la n -ième étape » (respectivement B_n, C_n).

1) $\boxed{a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0}$ car $A_0 = \Omega$, $B_0 = C_0 = \emptyset$ d'après l'énoncé.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_n, B_n, C_n) (ils sont deux à deux disjoints, car la cellule n'occupe qu'un seul point à un instant donné, et c'est forcément A , B ou C , donc $A_n \cup B_n \cup C_n = \Omega$) :

$$a_{n+1} = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n) = \boxed{0 \times a_n + \frac{1}{2} \times b_n + \frac{1}{2} \times c_n}$$

$$b_{n+1} = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n) = \boxed{\frac{1}{2} \times a_n + 0 \times b_n + \frac{1}{2} \times c_n}$$

$$c_{n+1} = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n) = \boxed{\frac{1}{2} \times a_n + \frac{1}{2} \times b_n + 0 \times c_n}$$

Remarque. En toute rigueur, il ne faut appliquer la formule des probabilités totales écrite ci-dessus que pour $n \geq 2$, car sinon les probabilités conditionnelles ne sont pas définies ($\mathbb{P}(B_0) = \mathbb{P}(C_0) = \mathbb{P}(A_1) = 0$), mais on vérifie directement que les relations trouvées conviennent encore pour $n = 0$ et $n = 1$.

Et pour pousser encore plus loin la rigueur, il faudrait faire ceci en même temps qu'une récurrence sur n donnant (A_n, B_n, C_n) chacun de probabilité non nulle !

3) Rappelons que, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n + c_n = 1$ (car (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements), ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n) = \frac{1}{2}(1 - a_n) = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$$

(et de même, $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$ et $c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}$). Ce sont donc des suites arithmético-géométriques, cherchons le point fixe :

$$\alpha = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{3}\right),$$

donc la suite numérique $(a_n - \frac{1}{3})_{n \in \mathbb{N}}$ (et aussi $(b_n - \frac{1}{3})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n - \frac{1}{3})_{n \in \mathbb{N}}$) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a_0 - \frac{1}{3}\right)$$

(et de même $b_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (b_0 - \frac{1}{3})$ et $c_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (c_0 - \frac{1}{3})$), donc en reportant les valeurs de a_0 , b_0 et c_0 , on trouve

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n} \quad \text{et} \quad \boxed{b_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Autre façon : de la question 2, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}$, mais aussi pour $n \in \mathbb{N}^*$ (en remplaçant n par $n - 1$, ce qui est possible car $n - 1 \geq 0$), $b_n = \frac{a_{n-1} + c_{n-1}}{2}$ et $c_n = \frac{b_{n-1} + a_{n-1}}{2}$, donc en reportant, on trouve

$$2a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + c_{n-1}}{2} + \frac{b_{n-1} + a_{n-1}}{2} = a_{n-1} + \frac{b_{n-1} + c_{n-1}}{2} = a_{n-1} + a_n.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = 0,$$

donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, et son équation caractéristique est $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$, de racines réelles 1 et $-\frac{1}{2}$, donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \lambda 1^n + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

On a par symétrie que les suites numériques $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont aussi des suites linéaires récurrentes d'ordre 2 à coefficients constants ayant encore $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ comme équation caractéristique. Il suffit ensuite de reporter avec les valeurs de a_0 , a_1 , b_0 , b_1 , c_0 , c_1 pour trouver les constantes, et obtenir le même résultat que précédemment.

Autre façon : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, alors en notant, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc il faut calculer A^n , et pour cela, on diagonalise A (c'est possible car elle est symétrique réelle)...

Exercice 14. 1) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n l'évènement « on tire au n -ième tirage dans l'urne U » et $p_n = \mathbb{P}(U_n)$. Les évènements U_n et $\overline{U_n}$ forment un système complet d'évènements, donc par la formule des probabilités totales : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}_{U_n}(U_{n+1})\mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1})\mathbb{P}(\overline{U_n}) = \frac{1}{2} \times p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n) = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}$$

avec $p_1 = 1$ car l'évènement U_1 est certain par hypothèse. La suite numérique $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite arithmético-géométrique, on cherche un point fixe :

$$p = \frac{1}{6}p + \frac{1}{3} \Leftrightarrow p = \frac{2}{5},$$

puis la suite numérique $(p_n - p)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} - p = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{6}p + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}(p_n - p),$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n - p = \frac{1}{6^{n-1}}(p_1 - p), \quad \text{soit} \quad p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{6^{n-1}} \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \boxed{\frac{2}{5} + \frac{1}{6^{n-1}} \frac{3}{5}}.$$

2) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n l'évènement « on tire une boule blanche au n -ième coup ». Alors, par la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(U_n, \overline{U_n})$, on a :

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}_{U_n}(B_n)\mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}_{\overline{U_n}}(B_n)\mathbb{P}(\overline{U_n}) = \frac{1}{2} \times p_n + \frac{2}{3} \times (1 - p_n) = -\frac{1}{6}p_n + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{3}{5} - \frac{1}{10} \frac{1}{6^{n-1}}}$$

Exercice 15. 1) A et B sont incompatibles donne

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1.$$

2) La réalisation de B entraîne celle de A se traduit par $B \subset A$, et donc

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) = 0,6.$$

Remarque. La réalisation de B entraîne celle de A se traduit aussi par $\mathbb{P}_B(A) = 1$, mais c'est moins pratique ici. Ceci dit, on peut tout de même l'utiliser ainsi :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A).$$

3) A et B sont indépendants (pour $\mathbb{P}$) donne $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0,24$. Puis,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,76.$$

4) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants (pour $\mathbb{P}$), donc

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)).$$

Mais les règles sur les ensembles (la loi de Morgan en l'occurrence) donnent $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$. Donc

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) = 0,76.$$

Remarque. Ce n'est pas surprenant, puisque $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants donnent A et B indépendants.

Exercice 16. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, notons F_k l'évènement « obtenir Face au k -ième lancer », et $\mathbb{P}_k$ l'évènement « obtenir Pile au k -ième lancer ».

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements qui décrit l'issue lors des tirages $2n - 1$ et $2n$, $(F_{2n-1} \cap F_{2n}, F_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n}, \mathbb{P}_{2n-1} \cap F_{2n}, \mathbb{P}_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n})$:

$$\mathbb{P}(O_n) = P(F_{2n-1} \cap F_{2n} \cap O_n) + P(F_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_n) + P(\mathbb{P}_{2n-1} \cap F_{2n} \cap O_n) + P(\mathbb{P}_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_n)$$

Or,

$$P(F_{2n-1} \cap F_{2n} \cap O_n) = 0$$

car $F_{2n-1} \cap F_{2n} \cap O_n = \emptyset$, puisque si à l'issue du $2n$ -ième lancer on a eu autant de Piles que de Faces, et qu'aux lancers $2n-1$ et $2n$ on a eu Face, c'est qu'avant on a eu au moins deux Piles de plus que de Face (ce qui contredit le fait que la personne n'a ni perdu, ni gagné). De même,

$$P(\mathbb{P}_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_n) = 0.$$

Puis,

$$F_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_n = F_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_{n-1}.$$

En effet, $F_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_{n-1} \subset O_n$, puisque, si jusqu'au lancer $2n-2$ on a eu autant de Pile que de Face, faire Face puis Pile ne change pas cela, et si de plus après le lancer O_{2n-2} on a autant de Pile que de Face, alors cela reste vrai en faisant Face puis Pile, et le joueur ne pourra gagner ou perdre lors du lancer $2n-1$ et $2n$. D'où l'inclusion

$$(F_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_{n-1}) \subset (F_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_n).$$

L'inclusion réciproque provient de ce que si O_n est réalisé, alors au lancer $2n-2$ le joueur n'a ni gagné, ni perdu, et si de plus il fait ensuite Pile et Face et qu'il se retrouve avec autant de Pile que de Face, cela était déjà vrai à la fin du lancer numéro $2n-2$.

Or, par indépendance des lancers, F_{2n-1} , $\mathbb{P}_{2n}$ et O_{n-1} sont indépendants (car ce sont des événements qui concernent des lancers différents), et donc

$$\mathbb{P}(F_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_n) = \mathbb{P}(F_{2n-1})\mathbb{P}(\mathbb{P}_{2n})\mathbb{P}(O_{n-1}) = pq\mathbb{P}(O_{n-1}).$$

De même,

$$P(\mathbb{P}_{2n-1} \cap F_{2n} \cap O_n) = pq\mathbb{P}(O_{n-1}).$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(O_n) = 2pq\mathbb{P}(O_{n-1})$$

La suite numérique $(\mathbb{P}(O_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite géométrique de raison $2pq$,

$$\mathbb{P}(O_1) = P((\mathbb{P}_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap \mathbb{P}_2)) = 2pq,$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\mathbb{P}(O_n) = (2pq)^n}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons p_n le nombre de Piles obtenus lors des $2n$ premiers lancers, f_n celui de Faces. Alors on a

$$p_n + f_n = 2n.$$

Si $p_n < f_n$, alors

$$p_n \leq f_n - 1$$

(car p_n et f_n sont entiers), donc $2n \leq 2f_n - 1$, donc $f_n \geq n + \frac{1}{2}$ et donc

$$f_n \geq n + 1$$

(car f_n est entier). De même, $2p_n \leq 2n - 1$, donc $p_n \leq n - \frac{1}{2}$, donc

$$p_n \leq n - 1.$$

Dans ce cas, l'écart entre le nombre de Piles et de Faces est au moins 2, et le jeu s'est terminé au plus tard au lancer numéro $2n$. De même si $p_n > f_n$.

Donc l'évènement « la partie dure strictement plus de $2n$ coups » est l'évènement O_n .

3) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, G_n l'évènement « la personne gagne au $2n$ -ième lancer ». Remarquons que le jeu ne peut se gagner ou se perdre sur un lancer impair $2p+1$, car le jeu ayant duré plus que $2p$ lancers, on a réalisé O_p d'après la question précédente, et donc à la fin du $2p$ -ième lancer, on avait autant de Piles que de Faces. Donc, juste avec le lancer $2p+1$, on ne peut pas avoir un écart de 2 (ou plus) entre le nombre de Piles et de Faces.

Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$G_n \subset O_{n-1},$$

car si la personne gagne au $2n$ -ième lancer, c'est qu'après le $2n - 2$ -ième lancer, on avait ni perdu, ni gagné. Donc

$$G_n = O_{n-1} \cap G_n.$$

Utilisons alors la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements qui décrit l'issue lors des tirages $2n - 1$ et $2n$, $(F_{2n-1} \cap F_{2n}, F_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n}, \mathbb{P}_{2n-1} \cap F_{2n}, \mathbb{P}_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_n) &= P(O_{n-1} \cap G_n) \\ &= P(\underbrace{F_{2n-1} \cap F_{2n} \cap O_{n-1} \cap G_n}_{=\emptyset}) + P(\underbrace{F_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_{n-1} \cap G_n}_{=\emptyset}) + P(\underbrace{\mathbb{P}_{2n-1} \cap F_{2n} \cap O_{n-1} \cap G_n}_{=\emptyset}) \\ &\quad + P(\underbrace{\mathbb{P}_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_{n-1}}_{\subset G_n} \cap G_n) \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}(G_n) = P(\mathbb{P}_{2n-1} \cap \mathbb{P}_{2n} \cap O_{n-1}),$$

et comme les évènements $\mathbb{P}_{2n-1}$, $\mathbb{P}_{2n}$ et O_{n-1} sont indépendants pour $\mathbb{P}$ (car ils concernent des lancers différents), on a

$$\mathbb{P}(G_n) = P(\mathbb{P}_{2n-1})P(\mathbb{P}_{2n})P(O_{n-1}) = \boxed{p^2(2pq)^{n-1}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

Remarque. Cette formule reste valable pour $n = 1$, puisque $G_1 = \mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2$, et donc $\mathbb{P}(G_1) = p^2 = p^2(2pq)^{1-1}$.

4) On a vu que l'individu ne pouvait gagner qu'à la suite d'un lancer pair, donc l'évènement $G = \ll \text{l'individu gagne} \gg$ est

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

(union dénombrable). Comme les évènements G_n sont deux à deux incompatibles (on ne gagne qu'une fois), par σ -additivité de $\mathbb{P}$, on a :

$$\mathbb{P}(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p^2(2pq)^{n-1} = \boxed{\frac{p^2}{1-2pq}}$$

Remarque. De même, on a que la probabilité que l'individu perde est $\frac{q^2}{1-2pq}$, et donc que la probabilité que le jeu s'arrête au bout d'un temps fini est de $\frac{p^2+q^2}{1-2pq} = 1$ (car $p + q = 1$, donc $1 - 2pq = (p + q)^2 - 2pq = p^2 + q^2$).

Exercice 17. Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, R_k l'évènement « obtenir une boule rouge au k -ième tirage », N_k pour la boule noire, B_k pour la boule blanche.

1) On a

$$\boxed{p_0 = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{4}}$$

(car, au premier tirage, soit on a une boule blanche, et c'est gagné, soit une boule noire, et c'est perdu). Puis, si $r = 1$, comme il n'y a pas remise, au plus tard en deux tirages on a soit la boule blanche, soit la boule noire. Et, le jeu est gagné est alors l'évènement $(R_1 \cap B_2) \cup B_1$.

Les évènements $(R_1 \cap B_2)$ et B_1 sont incompatibles (au premier tirage, on ne peut pas avoir deux couleurs différentes), donc

$$p_1 = P((R_1 \cap B_2) \cup B_1) = \mathbb{P}(R_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(B_1).$$

Puis, la formule des probabilités composées donne alors

$$p_1 = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B_2) + \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

2) Supposons que l'on parte d'une urne avec r boules rouges ($r \in \mathbb{N}$), et notons G_r l'évènement « le joueur finit par gagner ». On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (N_1, B_1, R_1) (c'en est bien un, car on ne tire qu'une boule à la fois, donc ces évènements sont deux à deux incompatibles, et au premier tirage on tire nécessairement une boule noire, rouge ou blanche, donc $N_1 \cup B_1 \cup R_1 = \Omega$ est l'évènement certain), alors : pour $r \in \mathbb{N}^*$,

$$p_r = \mathbb{P}(G_r) = \underbrace{\mathbb{P}(N_1 \cap G_r)}_{=\emptyset} + \underbrace{\mathbb{P}(R_1 \cap G_r)}_{=\mathbb{P}(G_{r-1})} + \underbrace{\mathbb{P}(B_1 \cap G_r)}_{=1} = 0 + \frac{r}{r+4}p_{r-1} + \frac{1}{r+4}$$

En effet, si l'on sait qu'au premier tirage on a eu une boule rouge, on continue de jouer, et on peut considérer qu'on repart du début, avec par contre plus que $r-1$ boules rouges au lieu de r (pour la suite du jeu, ce n'est pas important de savoir qu'au premier tirage on a eu rouge. La seule chose importante, est de savoir combien de boules rouges on avait au départ). Donc $\mathbb{P}_{R_1}(G_r) = \mathbb{P}(G_{r-1})$.

On a alors par récurrence directe

$$\boxed{p_r = \frac{1}{4}}$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 18. Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_k$ l'évènement « obtenir pile au k -ième lancer », et F_k pour face.

1a) $\boxed{p_1 = 0}$ (il faut au moins deux lancers pour avoir deux piles!),

$$p_2 = \mathbb{P}(\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2) = \boxed{p^2}$$

(les lancers d'une pièce sont indépendants),

$$p_3 = P(F_1 \cap \mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3) = \boxed{qp^2},$$

et enfin

$$p_4 = P((\mathbb{P}_1 \cap F_2 \cap \mathbb{P}_3 \cap \mathbb{P}_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \mathbb{P}_3 \cap \mathbb{P}_4)) = qp^2 + q^2p^2 = (p+q)qp^2 = \boxed{qp^2}$$

(car l'union est disjointe, et les lancers de pièce indépendants).

1b) $\mathbb{P}(B_1) = p_1 = \boxed{0}$, $\boxed{\mathbb{P}(B_2) = p_2}$,

$$\mathbb{P}(B_3) = P((\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2) \cup (F_1 \cap \mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3)) = p^2 + qp^2 = \boxed{(1+q)p^2}$$

(car l'union est disjointe, et les lancers de pièce indépendants).

Remarque. On a aussi $B_3 = (\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2) \cup (\mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3)$, mais présenté ainsi, l'union n'est pas entre évènements incompatibles, donc on ne peut pas calculer la probabilité! D'où la nécessité de spécifier $F_1 \dots$

Enfin,

$$\mathbb{P}(B_4) = P((\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2) \cup (F_1 \cap \mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3) \cup (F_1 \cap \mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3)) = p^2 + 2qp^2 = \boxed{(1+2q)p^2}$$

(car encore car les unions sont disjointes, et les lancers de pièce indépendants).

Il est direct que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_n \subset B_{n+1},$$

donc par croissance de la probabilité,

$$\mathbb{P}(B_n) \leq \mathbb{P}(B_{n+1}),$$

donc la suite numérique $(\mathbb{P}(B_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Remarque. C'est peut-être plus convaincant d'écrire : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_{n+1} = B_n \cup E_{n+1}, \quad \text{donc} \quad B_n \subset B_{n+1}.$$

2a) ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènement $(E_{n+1}, \overline{E_{n+1}})$:

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(E_{n+1} \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{E_{n+1}} \cap B_{n+1})$$

Or, $E_{n+1} \subset B_{n+1}$, donc

$$\mathbb{P}(E_{n+1} \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(E_{n+1}) = p_{n+1},$$

et

$$\overline{E_{n+1}} \cap B_{n+1} = B_n$$

(en effet, $B_n \subset B_{n+1}$ est direct, $B_n \subset \overline{E_{n+1}}$ est vrai (car si on a eu deux piles consécutifs lors des n premiers lancers, la première série de pile ne peut se terminer au lancer $n+1$ puisqu'elle a eu lieu avant), donc $B_n \subset (\overline{E_{n+1}} \cap B_{n+1})$; l'inclusion réciproque provient de ce que s'il y a eu deux piles consécutifs lors des $n+1$ premiers lancers, et que la première série de deux tels piles ne s'est pas terminée au lancer $n+1$, c'est qu'elle s'est terminée au plus tard au lancer n , et donc B_n est réalisé).

Donc

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n) + p_{n+1}$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathbb{P}(B_1) = 0$, par somme télescopique, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(B_1) = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{P}(B_{k+1}) - \mathbb{P}(B_k)) = \sum_{k=1}^{n-1} p_{k+1} = \sum_{k=2}^n p_k.$$

Remarque. On peut aussi justifier l'égalité $B_n = \bigcup_{k=1}^n E_k$, puis utiliser le fait que les E_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont deux à deux incompatibles (à cause du qualificatif « la première fois »), et conclure par σ -additivité de $\mathbb{P}$.

★ Montrons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$E_{n+3} = \overline{B_n} \cap F_{n+1} \cap \mathbb{P}_{n+2} \cap \mathbb{P}_{n+3}.$$

L'inclusion

$$E_{n+3} \subset (\overline{B_n} \cap F_{n+1} \cap \mathbb{P}_{n+2} \cap \mathbb{P}_{n+3})$$

est directe : si la première série de deux piles consécutifs s'est terminée au lancer $n+3$, c'est qu'au cours des n premiers lancers on n'a pas eu de telles séries (donc $\overline{B_n}$ est réalisé), et les lancers $\mathbb{P}_{n+2}$ et $\mathbb{P}_{n+3}$ se sont réalisés (c'est la série des deux piles consécutifs se terminant au lancer $n+3$), et nécessairement le lancer $n+1$ a amené face (donc F_{n+1}), car sinon, on aurait eu $\mathbb{P}_{n+1} \cap \mathbb{P}_{n+2}$, et donc la première série de deux piles consécutifs se serait terminée au plus tard au lancer $n+2$ et pas au lancer $n+3$.

Montrons l'inclusion réciproque : si $\overline{B_n}$ est réalisé, et que l'on a face au tirage $n+1$, alors jusqu'au tirage $n+1$ on n'aura pas eu deux piles consécutifs. Donc si on tire deux piles ensuite, ce sera la première série de deux piles consécutifs, et elle se terminera au lancer $n+3$. Donc

$$(\overline{B_n} \cap F_{n+1} \cap \mathbb{P}_{n+2} \cap \mathbb{P}_{n+3}) \subset E_{n+3}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que les évènements $(\overline{B_n}, F_{n+1}, \mathbb{P}_{n+2}, \mathbb{P}_{n+3})$ sont indépendants, car ce sont des évènements qui concernent des lancers différents, donc

$$\mathbb{P}(E_{n+3}) = \mathbb{P}(\overline{B_n})\mathbb{P}(F_{n+1})\mathbb{P}(\mathbb{P}_{n+2})\mathbb{P}(\mathbb{P}_{n+3}) = (1 - \mathbb{P}(B_n))qp^2.$$

Remarque. Pour que cela ait du sens, il faut $n \geq 1$ (pour que $\overline{B_n}$ existe).

2b) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, alors

$$p_{n+2} - p_{n+3} = (1 - \mathbb{P}(B_{n-1}))qp^2 - (1 - \mathbb{P}(B_n))qp^2 = (\mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(B_{n-1}))qp^2 = p_n qp^2$$

(car $\mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(B_{n-1}) = p_n$ pour $n \geq 3$ d'après la question 2a, et si $n = 2$, $\mathbb{P}(B_2) = p_2$ et $\mathbb{P}(B_1) = 0$, donc cela reste vrai).

Pour $n = 1$:

$$p_3 - p_4 = qp^2 - qp^2 = 0 \quad \text{et} \quad p_1 = 0,$$

donc la formule reste vraie.

3a) • $\mathcal{U}$ est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

• La suite nulle ($u_n = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$) vérifie

$$u_{n+3} - u_{n+2} + qp^2 u_n = 0 - 0 + qp^2 \times 0 = 0$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc appartient à $\mathcal{U}$.

• Soit u et $v \in \mathcal{U}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $w = \lambda u + v$. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \lambda u_n + v_n.$$

Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_{n+3} - w_{n+2} + qp^2 w_n = \lambda u_{n+3} + v_{n+3} - (\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + qp^2 (\lambda u_n + v_n) = \lambda \underbrace{(u_{n+3} - u_{n+2} + qp^2 u_n)}_{= 0 \text{ car } u \in \mathcal{U}} + \underbrace{(v_{n+3} - v_{n+2} + qp^2 v_n)}_{= 0 \text{ car } v \in \mathcal{U}} = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$$

Donc $w \in \mathcal{U}$.

Conclusion : $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

Remarque. Remarquons que l'application

$$f : u \in \mathcal{U} \mapsto (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$$

est une application linéaire (évident) et injective : en effet, si $u \in \text{Ker}(f)$, alors $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, et par récurrence triple, on a $u_n = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ (si $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = 0$, alors, puisque $u \in \mathcal{U}$, $u_{n+3} = u_{n+2} - qp^2 u_n = 0 - qp^2 \times 0 = 0$). Donc $\mathcal{U}$ est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{U}) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

On a même f surjective (et donc $\dim(\mathcal{U}) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$), cela se montre aussi en construisant pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ quelconque un antécédent par f par récurrence. Pour diverses raisons, je n'aime pas cette démonstration, et de toute façon on peut s'en passer, comme le montre la question 3c.

3b) Soit $r \in \mathbb{R}$,

$$(r^n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, r^{n+3} - r^{n+2} + qp^2 r^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, r^n (r^3 - r^2 + qp^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow r^3 - r^2 + qp^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r = 0$$

$$\Leftrightarrow r^3 - r^2 = -qp^2 = -(1-p)p^2 = p^3 - p^2 \quad \text{ou} \quad r = 0$$

Puis,

$$r^3 - r^2 = p^3 - p^2 \Leftrightarrow r^3 - p^3 - (r^2 - p^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (r-p)(r^2 + rp + p^2) - (r-p)(r+p) = 0$$

$$\Leftrightarrow (r-p)(r^2 - (1-p)r + p^2 - p) = 0$$

donc les réels r tels que $r^3 - r^2 = p^3 - p^2$ sont les réels

$$p, \quad \frac{1-p+\sqrt{1+2p-3p^2}}{2}, \quad \frac{1-p-\sqrt{1+2p-3p^2}}{2}$$

(car $1+2p-3p^2 > 0$ pour $p \in [0, 1[$ comme le montre une étude de fonction).

Remarque. Pour $p = 1$ ou $p = 0$, on a que deux racines à ce polynôme : 0 et 1. Mais le cas $p = 1$ n'est pas intéressant ! (ni $p = 0$ d'ailleurs). Par contre, pour $p = \frac{2}{3}$, on a aussi que deux racines : $\frac{2}{3}$ (qui est double) et $-\frac{1}{3}$. Dans tous les autres cas, on a trois racines deux à deux distinctes.

3c) On reporte $p = \frac{3}{7}$ dans l'expression trouvée pour les racines, on a bien les valeurs annoncées.

Par conséquent, si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (\frac{3}{7})^n$, $v_n = (\frac{6}{7})^n$ et $w_n = (\frac{-2}{7})^n$, alors les suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont trois suites de $\mathcal{U}$. Elles sont libres : en effet, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, si

$$a(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} + b(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} + c(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (0)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$au_n + bv_n + cw_n = 0,$$

donc pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ on a en particulier le système

$$\begin{cases} \frac{3a+6b-2c}{7} = 0 \\ \frac{9a+36b+4c}{49} = 0 \\ \frac{27a+216b-8c}{7^3} = 0 \end{cases},$$

qui se résout et donne $a = b = c = 0$.

Comme $\mathcal{U}$ est de dimension au plus 3 (grâce à la remarque de la question 3a), et a une famille libre de trois vecteurs, c'est que $\mathcal{U}$ est de dimension trois, et $((u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ est une base de $\mathcal{U}$.

3d) La matrice proposée est bien inversible, puisque son déterminant est un déterminant de Vandermonde, et vaut

$$(6-3)(-2-3)(-2-6) \neq 0.$$

Comme $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{U}$, et que $((u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$ est une base de $\mathcal{U}$, il existe $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = a'(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} + b'(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} + c'(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = \frac{1}{7^n} (a'3^n + b'6^n + c'(-2)^n).$$

C'est plus simple si on pose $a = 3a'$, $b = 6b'$ et $c = -2c'$, alors on veut, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = \frac{1}{7^n} (a3^{n-1} + b6^{n-1} + c(-2)^{n-1}).$$

(a, b, c) est donc en particulier solution de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 9 & 36 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$$

(système trouvé pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ car $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{9}{7^2}$ et $p_3 = \frac{36}{7^3}$), donc

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 9 & 36 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{9}{20} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix},$$

ce qui donne (après calculs), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = \frac{9}{8} \frac{1}{7^n} (6^{n-1} - (-2)^{n-1}).$$

Exercice 19. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, N_k l'évènement « on tire une boule noire au tirage numéro k », alors on veut $\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3)$.

Notons E l'évènement « on choisit la première urne ».

Première façon : $(E, \overline{E})$ est un système complet d'évènements, et la formule des probabilités totales, appliquée pour la probabilité $\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}$, donne alors

$$\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(E) \mathbb{P}_{E \cap N_1 \cap N_2}(N_3) + \mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(\overline{E}) \mathbb{P}_{\overline{E} \cap N_1 \cap N_2}(N_3)$$

Puis, $\mathbb{P}_{E \cap N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}_{\bar{E} \cap N_1 \cap N_2}(N_3) = 0$, ensuite la formule de Bayes donne

$$\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(E) = \frac{\mathbb{P}_E(N_1 \cap N_2)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}_E(N_1 \cap N_2)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}_{\bar{E}}(N_1 \cap N_2)\mathbb{P}(\bar{E})}$$

Puis, la formule des probabilités composées donne

$$\mathbb{P}_E(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}_E(N_1)\mathbb{P}_{E \cap N_1}(N_2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\bar{E}}(N_1 \cap N_2)\mathbb{P}(\bar{E}) = \mathbb{P}_{\bar{E}}(N_1)\mathbb{P}_{\bar{E} \cap N_1}(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5},$$

ce qui donne $\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(E) = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$. Donc la probabilité cherchée vaut

$$\boxed{\frac{3}{7}}.$$

Deuxième façon : on cherche

$$\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3)}{\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)}.$$

La formule des probabilités totales, avec le système complet d'évènements $(E, \bar{E})$, donne (pour la probabilité $\mathbb{P}$) :

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}_E(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(\bar{E})\mathbb{P}_{\bar{E}}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}_E(N_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(\bar{E})\mathbb{P}_{\bar{E}}(N_1 \cap N_2)$$

La formule des probabilités composées donne

$$\mathbb{P}_E(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}_E(N_1)\mathbb{P}_{E \cap N_1}(N_2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5},$$

$$\mathbb{P}_{\bar{E}}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}_{\bar{E}}(N_1)\mathbb{P}_{\bar{E} \cap N_1}(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5},$$

$$\mathbb{P}_E(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \mathbb{P}_E(N_1)\mathbb{P}_{E \cap N_1}(N_2)\mathbb{P}_{E \cap N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$$

et

$$\mathbb{P}_{\bar{E}}(N_1 \cap N_2 \cap N_3)\mathbb{P}(\bar{E}) = \mathbb{P}_{\bar{E}}(N_1)\mathbb{P}_{\bar{E} \cap N_1}(N_2)\mathbb{P}_{\bar{E} \cap N_1 \cap N_2}(E_3) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times 0.$$

Cela donne

$$\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{4 \times 3 \times \frac{2}{4} + 0}{4 \times 3 + 2 \times 1} = \frac{6}{14} = \boxed{\frac{3}{7}}$$