TD11 - Intégrales à paramètres

Exercice 1. Montrer que la fonction $F : y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+ixy)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On pose $F(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin\big(a\sin(x)\big)\mathrm{d}x$.

Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire $\displaystyle\lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\int_0^{\pi} \sin\big(a\sin(x)\big)\mathrm{d}x$.

Montrer que F est DSE en 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$. On cherche à calculer f.

1. Première façon :
   (a) Montrer que f est définie et paire sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide d'une intégrale impropre.
   (d) Chercher une relation simple entre f et f' (*i.e., une équation différentielle vérifiée par* f). En déduire la valeur de $f(x)$ (*On rappelle que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
2. Deuxième façon : Obtenir le DSE de f en 0, et retrouver l'expression de $f(x)$ de la question précédente (on pourra calculer la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties).

Exercice 4. Pour $x > 0$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
3. Donner un équivalent de F en $+\infty$.
4. Donner un équivalent de F en 0. *On pourra poser* $u = x + t$.

Exercice 5. On note $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}\mathrm{d}t$ pour tout x où l'intégrale converge.

1. Étudier la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$. En déduire qu'il existe un nombre réel β tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \beta$.
2. Montrer que ϕ est définie pour $x \geq 0$.
3. Montrer que ϕ est décroissante et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \phi(x)$.
4. Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Calculer ϕ'', en déduire ϕ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 6. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t}\mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.
5. Trouver une EDL d'ordre 1 vérifiée par f, et en déduire que $f(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

Exercice 7. On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que Γ est convexe.
3. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et un équivalent de Γ en 0^+.
4. Montrer qu'il existe $a \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(a) = 0$, puis donner le tableau de variations de Γ.

Exercice 8.

1. Étudier le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t$.
2. Étudier la continuité et la monotonie de f sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x}$.
4. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0^+ et en $+\infty$.
5. Calculer $f(1)$.

Exercice 9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^3}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
3. Montrer que F est solution de l'équation différentielle $xy' - 2y = -\sin^2(x)$.
4. Est-ce que F est développable en série entière ?

Exercice 10 (CCP 2014 Officiel de la Taupe)**.**

1. Montrer que, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2t}{\pi} \leq \sin(t) \leq t$.
2. Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $|F(x)| \leq \dfrac{1-e^{-\frac{x\pi}{2}}}{x}$ pour $x \neq 0$, et en déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer F' sans intégrale.
5. F est-elle développable en série entière ?
6. Trouver la limite de F en $-\infty$.

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^{2n}(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que J_n existe. Que vaut J_0 ?
2. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. En déduire que cette suite est convergente. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$?
3. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1}, et en déduire une expression de J_n en fonction de n.

Exercice 12. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} x^{\frac{1}{n}}\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,+\infty[\big)$ bornée, et $f(0) \neq 0$. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}f(t)\mathrm{d}t.$$

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$, puis en trouver un équivalent (*On admettra que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 14. Trouver la limite et un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{n^2+x^2}\mathrm{d}x$.

Solutions

Exercice 1. On pose :

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)} \in \mathbb{C}.$$

« Le paramètre est y, la variable d'intégration sera x ».
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$y \in \mathbb{R} \mapsto f(x,y) \in \mathbb{C}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.
• Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,y) \in \mathbb{C}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
• Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a :

$$|f(x,y)| = \left|\frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)}\right| = \frac{1}{(1+x^2)|1+ixy|} = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Or, la fonction

$$\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car continue positive sur $\mathbb{R}$, et admet une primitive (à savoir arctan) qui a une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$), on a donc domination.
• Donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. ★ Montrons que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
• On pose

$$f : (a,x) \in \mathbb{R}\times[0,\pi] \mapsto \sin\big(a\sin(x)\big) \in \mathbb{R}.$$

« Le paramètre est a, la variable d'intégration sera x ».

• Pour tout $x \in [0,\pi]$, la fonction

$$a \in \mathbb{R} \mapsto f(a,x) \in \mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) et on a : pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = \sin(x)\ \cos\big(a\sin(x)\big).$$

• Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction

$$x \in [0,\pi] \mapsto f(a,x) \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $[0,\pi]$ (car continue (par morceaux) sur le segment formé par les bornes d'intégration : $[0,\pi]$).
• Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction

$$x \in [0,\pi] \mapsto \frac{\partial f}{\partial a}(a,x) \in \mathbb{R}$$

est continue (par morceaux) sur $[0,\pi]$.
• Pour tout $(a,x) \in \mathbb{R}\times[0,\pi]$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| = \Big|\sin(x)\cos\big(a\sin(x)\big)\Big| \leq 1,$$

or la fonction

$$x \mapsto 1$$

est intégrable sur $[0,\pi]$ (car continue sur le segment $[0,\pi]$). On a donc domination.
• Donc d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \int_0^\pi \sin(x)\cos\big(a\sin(x)\big)\mathrm{d}x.$$

De plus, on a $F(0) = 0$. Donc on a (en reconnaissant la limite du taux d'accroissement de la fonction F en 0) :

$$\lim_{a\to 0} \frac{F(a)}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{F(a) - F(0)}{a - 0} = F'(0) = \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = \boxed{2}.$$

★ Montrons que F est DSE en 0.
• On sait, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\sin(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n+1}$$

(DSE de sin). Donc, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$F(a) = \int_0^\pi \sin\big(a\sin(x)\big)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a^{2n+1}\sin^{2n+1}(x)\mathrm{d}x$$

(on applique le DSE de sin pour $u = a\sin(x)$, qui est bien un réel). Il faut ensuite justifier l'interversion série et intégrale :
• Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \in [0,\pi] \mapsto \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a^{2n+1}\sin^{2n+1}(x) \in \mathbb{R}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur $[0,\pi]$ (car continue sur le segment $[0,\pi]$).
• La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $[0,\pi]$, de somme la fonction

$$x \in [0,\pi] \mapsto \sin\big(a\sin(x)\big) \in \mathbb{R},$$

qui est une fonction continue (par morceaux) sur $[0,\pi]$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens »), en utilisant que $|\sin| \leq 1$,

$$\int_0^\pi \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a^{2n+1}\sin^{2n+1}(x)\right|\mathrm{d}x \leq \int_0^\pi \frac{|a|^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x = \frac{\pi|a|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

et la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|a|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

est une série convergente (série du DSE de $\sinh\big(|a|\big)$, et le DSE de sinh est valable sur $\mathbb{R}$).
• Donc le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$F(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a^{2n+1}\sin^{2n+1}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a^{2n+1} \underbrace{\int_0^\pi \sin^{2n+1}(x)\mathrm{d}x}_{\text{ne dépend pas de } a},$$

qui est bien l'expression d'une série entière (en la variable a). Comme c'est valable pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, son rayon de convergence est infini.

Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^\pi \sin^{2n+1}(x)\mathrm{d}x$ est une intégrale de Wallis et se calcule classiquement...

Exercice 3. 1a) • Existence de f :
Soit $x \in \mathbb{R}$.
◇ L'application

$$t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}_+$, en particulier sur $[0,1]$.
◇ Puis, on a : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \left|t^2 e^{-t^2}\cos(xt)\right| \leq t^2 e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée), donc le théorème des gendarmes donne

$$t^2 e^{-t^2}\cos(xt) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{autrement dit} \qquad e^{-t^2}\cos(xt) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann, $2>1$). Donc d'après le critère de domination, la fonction

$$t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$$

est aussi intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$.

◇ Les deux affirmations ensembles donnent que la fonction

$$t \mapsto e^{-t^2}\cos(xt)$$

est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc que l'intégrale définissant $f(x)$ converge absolument, donc converge. Donc $f(x)$ existe.

◇ C'est vrai pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

• La parité est directe : elle provient de celle de la fonction cos.

1b) Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$g : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t^2}\cos(xt) \in \mathbb{R}.$$

« Le paramètre est x, la variable d'intégration sera t ».

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la fonction
$$x\in\mathbb{R}\mapsto g(x,t)\in\mathbb{R}$$
est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est un cosinus à constante près).
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction
$$t\in\mathbb{R}_+\mapsto g(x,t)\in\mathbb{R}$$
est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on a :
$$|g(x,t)| = \left|e^{-t^2}\cos(xt)\right| \le e^{-t^2}.$$
Or, la fonction
$$t\in\mathbb{R}_+\mapsto e^{-t^2}\in\mathbb{R}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$, par croissance comparée). On a donc domination.

Donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

1c) • Montrons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la fonction
$$x\in\mathbb{R}\mapsto g(x,t)\in\mathbb{R}$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (c'est un cosinus à constante près) et on a : pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -te^{-t^2}\sin(xt).$$
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction
$$t\in\mathbb{R}_+\mapsto g(x,t)\in\mathbb{R}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (conséquence de la question précédente).

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction
$$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$$
est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a :
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|te^{-t^2}\sin(xt)\right| \leq te^{-t^2},$$
or la fonction
$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto te^{-t^2} \in \mathbb{R}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car continue positive sur $\mathbb{R}_+$, et admettant la fonction
$$t \mapsto \frac{1}{2}e^{-t^2}$$
comme primitive, avec
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}e^{-t^2}$$
qui **existe et est finie** (nulle)). On a donc domination.

Donc d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t.$$

1d) • Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions
$$u : t \mapsto \sin(xt) \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \frac{1}{2}e^{-t^2}$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivées respectives
$$u' : t \mapsto x\cos(xt) \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto -te^{-t^2}.$$
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$0 \leq |u(t)v(t)| = |\sin(xt)|\frac{1}{2}e^{-t^2} \leq \frac{1}{2}e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t)$ **existe et est finie** (et vaut 0). Alors le théorème d'intégration par parties s'applique, et comme on sait que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = f'(x)$$
converge, on en déduit que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}x\cos(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t$$
converge, et on a
$$f'(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\sin(xt)\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0-0} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}x\cos(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t = -\frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t = -\frac{x}{2}f(x).$$
Donc la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y' = -\frac{x}{2}y.$$
• Comme la fonction
$$x \mapsto -\frac{x^2}{4}$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction continue

$$x \mapsto -\frac{x}{2},$$

on sait alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Pour trouver λ testons en $x = 0$. On a donc

$$\lambda = f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ainsi

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}}.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} u^{2n}$$

(DSE de cos, valable sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc on peut l'appliquer en n'importe quel réel). Donc, on a

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} t^{2n} e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

(en évaluant le DSE de cos pour $u = xt$, qui est bien un réel). Si on a le droit d'intervertir série et intégrale, alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} I_n x^{2n},$$

ce qui donnera que la fonction f est DSE sur $\mathbb{R}$.
Travaillons toujours à $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} t^{2n} e^{-t^2} \in \mathbb{R}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ (par croissance comparée)).
• La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et sa somme est la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t^2} \cos(xt) \in \mathbb{R},$$

donc est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
• De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \mathrm{d}t = \frac{1}{(2n)!} x^{2n} I_n.$$

Or, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n > 0$ par stricte positivité de l'intégrale (car la fonction

$$t \mapsto t^{2n} e^{-t^2}$$

est continue positive intégrable sur $[0, +\infty[$, et n'est pas la fonction nulle, et « les bornes sont dans le bon sens »).
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t^{2n} e^{-t^2} = t^{2n-1} t e^{-t^2}.$$

Posons

$$u : t \mapsto -\frac{1}{2} e^{-t^2} \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto t^{2n-1},$$

alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée

$$u' : t \mapsto t e^{-t^2} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto (2n-1) t^{2n-2},$$

avec
$$u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
(par croissance comparée), donc le théorème d'intégration par parties s'applique. Comme on sait que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = I_n$$
converge (car la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$), on en déduit que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-t^2}(2n-1)t^{2n-2}\mathrm{d}t$$
converge, et
$$I_n = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}t^{2n-1}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-t^2}(2n-1)t^{2n-2}\mathrm{d}t = \frac{2n-1}{2}I_{n-1}$$
Donc, pour $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\left|\frac{\frac{1}{(2n)!}x^{2n}I_n}{\frac{1}{(2n-2)!}x^{2n-2}I_{n-1}}\right| = \frac{2n-1}{2}\frac{x^2}{2n(2n-1)} = \frac{x^2}{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1,$$
donc par le critère de D'Alembert, pour $x \in \mathbb{R}^*$, la série numérique
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t$$
converge absolument, donc converge (et ce résultat reste évidemment vrai si $x = 0$, puisque dans ce cas, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

• Donc on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et on obtient alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}I_n x^{2n}.$$
Enfin, de la relation
$$I_n = \frac{2n-1}{2}I_{n-1}$$
valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et de
$$I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$
on obtient par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,
$$I_n = \frac{(2n)!}{n!2^{2n+1}}\sqrt{\pi}$$
pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. En effet :
Initialisation : pour $n = 0$,
$$\frac{(2\cdot 0)!}{0!2^{2\cdot 0+1}}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = I_0$$
(car $0! = 1$).
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons
$$I_n = \frac{(2n)!}{n!2^{2n+1}}\sqrt{\pi}.$$
Alors
$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{2}I_n = \frac{2n+1}{2}\frac{(2n)!}{n!2^{2n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)}\frac{(2n)!}{n!2^{2n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{\big(2(n+1)\big)!}{(n+1)!2^{2(n+1)+1}}\sqrt{\pi},$$
d'où l'hérédité.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$I_n = \frac{(2n)!}{n!2^{2n+1}}\sqrt{\pi}.$$

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-x^2}{4} \right)^n \frac{1}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

en utilisant le DSE de exp (valable sur $\mathbb{R}$ tout entier).

Exercice 4. 1) Notons

$$g : (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t} \in \mathbb{R}.$$

« Le paramètre est x, la variable d'intégration sera t ».
• Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto g(x,t) = \frac{e^{-t}}{x+t} \in \mathbb{R}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$, comme quotient de fonctions continues, et car $x+t$ ne s'annule pas pour $t \in \mathbb{R}_+$, donc continue par morceaux.
• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction

$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(x,t) = \frac{e^{-t}}{x+t} \in \mathbb{R}$$

est continue sur $]0,+\infty[$ (comme inverse d'un polynôme en x, qui ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$).
• Pour $[a,b] \subset]0,+\infty[$, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$0 < a \leq x \leq b,$$

et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|g(x,t)\right| = \left|\frac{e^{-t}}{x+t}\right| = \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{e^{-t}}{a+t} \leq \frac{e^{-t}}{a}$$

(inégalité qui a du sens, car $a > 0$). Or, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{e^{-t}}{a} \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence), et ne dépend pas de x. On a donc domination.
• Donc le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique : la fonction F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
2) • Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto g(x,t) = \frac{e^{-t}}{x+t} \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par critère de comparaison, grâce à la domination de la question précédente).
• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction

$$x \mapsto g(x,t) = \frac{e^{-t}}{x+t}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ (comme inverse d'un polynôme en x, qui ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$), et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = (-1)^n n! \frac{e^{-t}}{(x+t)^{n+1}}$$

(par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}^*$).
• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = (-1)^n n! \frac{e^{-t}}{(x+t)^{n+1}} \in \mathbb{R}$$

est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$.
• Pour $[a,b] \subset]0,+\infty[$, pour tout $x \in [a,b]$ (donc $0 < a \leq x \leq b$), pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| = \left|(-1)^n n! \frac{e^{-t}}{(x+t)^{n+1}}\right| \leq n! \frac{e^{-t}}{(a+t)^{n+1}} \leq n! \frac{e^{-t}}{a^{n+1}}.$$

(inégalité qui a du sens, car $a > 0$). Or, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto n!\frac{e^{-t}}{a^{n+1}} \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence), et ne dépend pas de x. On a donc domination.

• Donc le théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'applique : la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout segment de $]0, +\infty[$, donc par « caractère local » de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^\infty$ », sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (-1)^n n! \frac{e^{-t}}{(x+t)^{n+1}} \mathrm{d}t.$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par linéarité de l'intégrale convergente,

$$\frac{1}{x} - F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t - F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)}\mathrm{d}t,$$

or pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$0 \leq \frac{1}{x(x+t)} \leq \frac{1}{x^2},$$

donc par croissance de l'intégrale convergente (car « les bornes sont dans le bon sens »), on a

$$0 \leq \frac{1}{x} - F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2},$$

donc (en multipliant par x l'inégalité précédente), puisque $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, le théorème des gendarmes donne

$$1 - xF(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{x} - F(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right),$$

et donc

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}}.$$

Autre méthode, plus classique : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{x}}\mathrm{d}t.$$

On utilise le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Notons

$$g : (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{e^{-t}}{1+\frac{t}{x}} \in \mathbb{R}.$$

• $+\infty$ est une borne de $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto g(x,t) \in \mathbb{R}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$g(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}$$

et la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t} \in \mathbb{R}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\big|g(x,t)\big| \leq e^{-t},$$

et la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t} \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence). On a donc domination.
• Le théorème de convergence dominée à paramètre continu s'applique alors :

$$xF(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Donc

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}}.$$

4) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, posons $u = x+t$. La fonction

$$t \mapsto x+t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc induit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[x,+\infty[$. On peut donc faire ce changement de variable, et on a « $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ ». Comme on sait que l'intégrale définissant $F(x)$ converge, le théorème de changement de variable donne l'égalité suivante (avec assurance que l'intégrale de droite converge) :

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-(u-x)}}{u}\mathrm{d}u = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u.$$

Première méthode : pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, par la relation de Chasles,

$$F(x) = e^x \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u + e^x \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u.$$

Puis, $\dfrac{e^{-u}}{u} \underset{u\to0}{\sim} \dfrac{1}{u}$, donc on compare $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$ à $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\ln(x)$:

$$-\ln(x) - \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u = \int_x^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\mathrm{d}u \underset{x\to0}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\mathrm{d}u \in \mathbb{R}$$

car cette dernière intégrale converge (car la fonction

$$u \in]0,1] \mapsto \frac{1-e^{-u}}{u} \in \mathbb{R}$$

est continue sur $]0,1]$ et est intégrable en 0, puisqu'elle se prolonge par continuité en 0, car $\dfrac{1-e^{-u}}{u} \underset{u\to0}{\sim} \dfrac{-(-u)}{u} = 1 \underset{u\to0}{\longrightarrow} 1$).
Comme $-\ln(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que

$$-\ln(x) - \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u = \underset{x\to0^+}{o}\big(\ln(x)\big), \qquad \text{donc} \qquad \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x),$$

puis

$$e^x \int_x^1 \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u \underset{x\to0}{\sim} -\ln(x)$$

(car $e^x \underset{x\to0}{\sim} 1$).
Comme

$$e^x \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u = \underset{x\to0^+}{o}\big(\ln(x)\big),$$

on en déduit que

$$\boxed{F(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x)}.$$

Deuxième méthode : soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions

$$u : t \mapsto \ln(t) \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto e^{-t}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, +\infty[$, de dérivées respectives

$$u' : t \mapsto \frac{1}{t} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto -e^{-t},$$

et

$$\lim_{+\infty} uv = 0$$

par croissance comparée (donc la limite existe et **est finie**), donc le théorème d'intégration par parties s'applique. Comme on sait que l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = F(x)e^{-x}$$

converge, on a que l'intégrale

$$\int_x^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$$

converge, et

$$F(x)e^{-x} = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \left[e^{-t}\ln(t)\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} -\ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t = -\ln(x)e^{-x} + \int_x^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

Or, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(t)e^{-t} \in \mathbb{R}$$

est

- continue sur $\mathbb{R}_+^*$,
- intégrable en $+\infty$ (car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ par exemple, puisque

  $$\frac{\ln(t)e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \frac{\ln(t)}{t}\frac{t^3}{e^t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$$

  par croissance comparée),
- intégrable en 0 car $e^{-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc $e^{-t} = \underset{t\to 0}{O}(1)$, et donc

  $$\ln(t)e^{-t} = \underset{t\to 0}{O}\big(\ln(t)\big)$$

  (et la fonction ln est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]0,1] \\ \text{en } 0\end{array}\right\}$),

donc la fonction

$$t \mapsto \ln(t)e^{-t}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

existe dans $\mathbb{R}$, donc

$$\int_x^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \underset{x\to 0}{O}(1).$$

Or, $-\ln(x)e^{-x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc

$$F(x)e^{-x} = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)e^{-x},$$

puis

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)}.$$

Exercice 5. **1)** On pose

$$\psi : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t).$$

La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\psi'(t) = t - \sin(t) \geq 0.$$

Remarque. Si cette inégalité n'est pas claire, comme la fonction ψ est deux fois dérivable, on calcule, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\psi''(t) = 1 - \cos(t) \geq 0,$$

ce qui donne que la fonction ψ' est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et comme $\psi'(0) = 0$, on en déduit bien $\psi' \geq 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

Donc la fonction ψ est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\psi(t) \geq \psi(0) = 0.$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\frac{t^2}{2} \geq 1 - \cos(t).$$

Bien sûr, l'inégalité $1 - \cos(t) \geq 0$ pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, est bien connue. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}}$$

convient.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction

$$f : t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-tx} \in \mathbb{R}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Si $x > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-tx} \leq \beta e^{-tx}$$

et la fonction

$$t \mapsto \beta e^{-tx}$$

est intégrable (car $x > 0$) sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence). Donc, par critère de comparaison, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc l'expression $\phi(x)$ est bien définie (puisque l'intégrale définissant $\phi(x)$ converge absolument, donc converge).

• Si $x = 0$. On doit donc étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t.$$

L'application f est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
Étude en 0 : On a

$$1 - \cos(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}, \qquad \text{donc} \qquad f(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 (en posant $f(0) = \frac{1}{2}$). Donc la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0, 1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$.

Étude en $+\infty$: pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, par inégalité triangulaire,

$$\left| \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1 + |\cos(t)|}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$$

et la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est une fonction de intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, car $2 > 1$). Donc, le critère de comparaison donne que la fonction f est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$.

Donc la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc l'expression $\phi(0)$ existe (puisque l'intégrale définissant $\phi(0)$ converge absolument, donc converge).
3) • Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 \leq x_1 < x_2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$e^{-tx_1} > e^{-tx_2}$$

(par stricte croissance de exp). Donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx_1} \geq \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx_2}$$

(car $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \geq 0$). Ainsi en intégrant (par croissance de l'intégrale, « les bornes étant dans le bon sens », et les intégrales convergent), on a

$$\phi(x_1) \geq \phi(x_2).$$

Donc la fonction ϕ est décroissante.

Remarque. On peut aussi appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres sur $\mathbb{R}_+^*$ (justifié à la question 5) pour obtenir

$$\phi'(x) = -x\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-tx}\mathrm{d}t,$$

et la positivité de l'intégrale convergente donne directement $\phi' \leq 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Reste le problème en 0... Grâce à la question suivante, on saura que la fonction ϕ est continue en 0, or une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue en 0 est décroissante sur $\mathbb{R}_+$...

• Comme la fonction ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une limite en $+\infty$ (finie ou $-\infty$).
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'inégalité de la question 1 donne, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx} \leq \beta e^{-tx}.$$

Par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens », et les intégrales convergent), on a alors

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}\mathrm{d}t = \phi(x) \leq \beta\int_0^{+\infty} e^{-tx}\mathrm{d}t = \frac{\beta}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, le théorème des gendarmes donne :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\phi(x) = 0}.$$

Autre méthode : on applique le théorème de convergence dominée à paramètre continu.
Soit

$$f : (x,t) \in [1,+\infty[\times\mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx} \in \mathbb{R}.$$

• $+\infty$ est une borne de $[1,+\infty[$.
• Pour tout $x \in [1,+\infty[$, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x,t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Pour tout $x \in [1,+\infty[$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$|f(x,t)| \leq \beta e^{-tx} \leq \beta e^{-t}$$

(car $x \geq 1$), et la fonction

$$t \mapsto \beta e^{-t}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (c'est une fonction de référence), on a donc domination.

• Donc le théorème de convergence dominée à paramètre continu s'applique, et donne que la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0.$$

On a donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0}.$$

Remarque. On peut directement considérer la fonction

$$f : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx} \in \mathbb{R}$$

mais la domination est un peu plus moins évidente (on le fait à la question suivante).

4) Soit

$$f : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx} \in \mathbb{R}.$$

« Le paramètre est x, la variable d'intégration sera t ».

• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ (c'est une exponentielle multipliée par une constante).
• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$|f(x,t)| = \left|\frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx}\right| \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

et la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (vu à la question 2). On a donc domination.
• Donc le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique, et donne que la fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
5) Soit

$$f : (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx} \in \mathbb{R}.$$

« Le paramètre est x, la variable d'intégration sera t ».
• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos(t)}{t} e^{-tx} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \big(1-\cos(t)\big)e^{-tx}.$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto f(x,t) \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (vu à la question 2).
• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions

$$t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \in \mathbb{R}$$

sont continues (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Soit $(\mathrm{e}, M) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \mathrm{e} < M$. Pour tout $(x,t) \in [\mathrm{e}, M] \times \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{1-\cos(t)}{t}e^{-tx}\right| \leq \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-\mathrm{e}t} \leq \beta t e^{-\mathrm{e}t} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|(1-\cos(t))e^{-tx}\right| \leq \big(1+|\cos(t)|\big)e^{-tx} \leq$$

or la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 2e^{-\mathrm{e}t} \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ **car** $\mathrm{e} > 0$ (fonction de référence) et la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \beta t e^{-\mathrm{e}t} \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0, et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$ par croissance comparée, **car** $\mathrm{e} > 0$). On a donc domination.
• Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'applique donc : la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout segment $[\mathrm{e}, M]$ de $\mathbb{R}_+^*$, donc par « caractère local » de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^2$ », sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\phi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-tx}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \phi''(x) = \int_0^{+\infty} \big(1-\cos(t)\big)e^{-tx}\mathrm{d}t.$$

6) • Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\phi''(x) = \int_0^{+\infty} \big(1-\cos(t)\big)e^{-tx}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\mathrm{d}t - \mathcal{R}e\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x} - \mathcal{R}e\left(\frac{1}{x-i}\right) = \boxed{\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}}.$$

Remarque. Ceci suppose de savoir que (pour $x \in \mathbb{R}_+^*$) l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\mathrm{d}t$$

converge, ce qui est le cas puisqu'elle converge absolument, puisque, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\left|e^{(i-x)t}\right| = e^{-xt},$$

et que la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-xt}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le cours, car $x > 0$.

• Donc, en primitivant sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\phi'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K.$$

Remarque. On a

$$\lim_{+\infty} \phi' = 0$$

(on peut le montrer soit par le théorème de convergence dominée, soit en majorant grâce à l'inégalité $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt} \leq \beta t e^{-xt}$, puisque $\int_0^{+\infty} t e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$), donc $K = 0$, mais on va le retrouver à partir de la limite de ϕ en $+\infty$.

Puis, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
\int^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \quad &\underset{\substack{u(t)=\ln(1+t^2) \\ v'(t)=1}}{=}_{\substack{u'(t)=\frac{2t}{1+t^2} \\ v(t)=t}} \quad x\ln(1+x^2) - 2\int^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \quad x\ln(1+x^2) - 2\int^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \quad x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)
\end{aligned}$$

Donc il existe $(K,C) \in \mathbb{R}^2$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\phi(x) = x\ln(x) - x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + Kx + C.$$

• Puis, $\lim\limits_{+\infty} \phi = 0$, or

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x\ln(x) - x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) + x + C\right) = C$$

(car $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$...), donc

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } K > 0 \\ -\infty & \text{si } K < 0 \\ C & \text{si } K = 0 \end{cases}.$$

Donc

$$K = 0 \qquad \text{et} \qquad C = \frac{\pi}{2},$$

soit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{\phi(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}}.$$

• Et donc, puisque la fonction ϕ est continue en 0,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \phi(0) = \lim_{x\to0^+} \phi(x) = \lim_{x\to0^+} \left(x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

• Enfin, intégrons par parties. Les fonctions

$$u : t \mapsto 1-\cos(t) \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto -\frac{1}{t}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées respectives

$$u' : t \mapsto \sin(t) \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto \frac{1}{t^2}.$$

De plus,

$$u(t)v(t) \underset{t\to0}{\sim} -\frac{t^2}{2} \times \left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{t}{2} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0$$

(donc uv a une limite **finie** en 0) et

$$\left|u(t)v(t)\right| \leq \frac{1+|\cos(t)|}{t} \leq \frac{2}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$$

(donc uv a une limite **finie** en $+\infty$). Donc le théorème d'intégration par parties s'applique. Comme on sait que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = f'(0)$$

converge, on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

converge, et on a

$$\frac{\pi}{2} = f(0) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\left[-\big(1-\cos(t)\big)\frac{1}{t}\right]_0^{+\infty}}_{=0-0} - \int_0^{+\infty} -\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 6. **1)** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g : t \in [0, +\infty[\mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t} \in \mathbb{R}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$, donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}_+$, en particulier sur $[0, 1]$.
• Si $x > 0$, faisons l'étude en $+\infty$:

$$t^2 \frac{e^{-tx}}{1+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-tx} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée, car $x > 0$), donc

$$\frac{e^{-tx}}{1+t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or, la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann, $2 > 1$). Donc le critère de domination donne que la fonction g est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$.
Donc la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc l'intégrale définissant $f(x)$ converge absolument, donc converge, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc

$$\mathbb{R}_+^* \subset D_f.$$

• Si $x = 0$ alors

$$g(t) = \frac{1}{1+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t},$$

et la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

est une fonction continue et **positive** sur $[1, +\infty[$, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

diverge (Riemann). Donc le critère d'équivalence donne que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

diverge. A plus forte raison, l'intégrale définissant $f(0)$ diverge, donc $f(0)$ n'est pas défini.

Remarque. On peut aussi bien sûr dire : pour tout $A \in [1, +\infty[$,

$$\int_1^A \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_1^A = \ln(1+A) - \ln(2) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

diverge.

• Si $x < 0$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{e^{-tx}}{1+t} \geq \frac{1}{1+t} \geq 0$$

et la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{1+t}$$

est une fonction dont l'intégrale diverge en $+\infty$ (cf. quelques lignes au dessus). D'après le critère de comparaison, l'intégrale définissant $f(x)$ diverge, donc $f(x)$ n'est pas défini, si $x < 0$.
• Ainsi
$$\boxed{D_f = \mathbb{R}_+^*}.$$

2) On pose
$$g : (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t} \in \mathbb{R}.$$
« Le paramètre est x, la variable d'intégration sera t ».
• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction
$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(x,t) \in \mathbb{R}$$
est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (c'est une exponentielle multipliée par une constante).
• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction
$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto g(x,t) \in \mathbb{R}$$
est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
• Soit $(\mathrm{e}, M) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \mathrm{e} \leq M$. Pour tout $(x,t) \in [\mathrm{e}, M] \times \mathbb{R}_+$, on a :
$$|g(x,t)| = \left|\frac{e^{-tx}}{1+t}\right| \leq e^{-tx} \leq e^{-\mathrm{e}t},$$
or la fonction
$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-\mathrm{e}t} \in \mathbb{R}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ **car** $\mathrm{e} > 0$ (fonction de référence). On a donc domination.
• Donc le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique, et donne que la fonction ϕ est continue sur tout intervalle $[\mathrm{e}, M]$ de $\mathbb{R}_+^*$, donc par « caractère local » de la continuité, sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) On pose :
$$g : (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t} \in \mathbb{R}.$$
« Le paramètre est x, la variable d'intégration sera t ».
• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction
$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(x,t) \in \mathbb{R}$$
est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = (-t)^k \frac{e^{-tx}}{1+t}$$
(cette formule s'obtient par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, de manière directe).
• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction
$$t \mapsto g(x,t) \in \mathbb{R}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (vu à la question 1).
• Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction
$$t \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$$
est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
• Soit $(\mathrm{e}, M) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \mathrm{e} \leq M$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x,t) \in [\mathrm{e}, M] \times \mathbb{R}_+$, on a :
$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = \left|(-t)^k \frac{e^{-tx}}{1+t}\right| \leq t^k e^{-\mathrm{e}t},$$
or la fonction
$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^k e^{-\mathrm{e}t}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ par croissance comparée, **car** $\mathrm{e} > 0$). On a donc domination.

• Donc le théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'applique, la fonction f est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout segment $[e, M]$ de $\mathbb{R}_+^*$, donc par « caractère local » de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^\infty$ », sur $\mathbb{R}_+^*$. Et de plus, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (-t)^k \frac{e^{-tx}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

4) ★ Recherche de la limite.
Idée 1 : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-tx}}{1+t} \leq e^{-tx}.$$

Donc, par inégalité triangulaire généralisée puis croissance de l'intégrale convergente (car « les bornes sont dans le bon sens »), on a :

$$0 \leq |f(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, le théorème des gendarmes conclut :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}.$$

Idée 2 : on applique le théorème de convergence dominée à paramètre continu. Soit

$$g : (x,t) \in [1, +\infty[\times \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t} \in \mathbb{R}.$$

• $+\infty$ est une borne de $[1, +\infty[$.
• Pour tout $x \in [1, +\infty[$, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto g(x,t) \in \mathbb{R}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$g(x,t) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases},$$

et la fonction

$$\ell : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
• Pour tout $x \in [1, +\infty[$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\left|g(x,t)\right| \leq e^{-tx} \leq e^{-t}$$

(car $x \geq 1$), or la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-t} \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence). On a donc domination.
• Donc le théorème de convergence dominée à paramètre continu s'applique : la fonction ℓ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et

$$f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t) \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \ell(t) \mathrm{d}t = \boxed{0}.$$

★ <u>Équivalent en $+\infty$:</u> soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On effectue le changement de variable $u = tx$: la fonction

$$t \mapsto tx$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante (car $x > 0$) sur $\mathbb{R}_+$, induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, donc on peut faire ce changement de variable. On a « $du = x\mathrm{d}t$ », et on sait que l'intégrale définissant $f(x)$ converge, donc le théorème de changement de variable donne l'égalité suivante (avec l'assurance que l'intégrale de droite converge) :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 + \frac{u}{x}} \frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 + \frac{u}{x}} \mathrm{d}u.$$

Étudions la limite de $xf(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
Soit
$$g : (x,u) \in [1,+\infty[\times\mathbb{R}_+ \mapsto \frac{e^{-u}}{1+\frac{u}{x}} \in \mathbb{R}.$$

• $+\infty$ est une borne de $[1,+\infty[$.
• Pour tout $x \in [1,+\infty[$, la fonction
$$u \in \mathbb{R}_+ \mapsto g(x,u) \in \mathbb{R}$$
est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
• Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$,
$$g(x,u) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-u},$$
et la fonction
$$u \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-u} \in \mathbb{R}$$
est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
• Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in [1,+\infty[$,
$$\big|g(x,u)\big| \leq e^{-u},$$
or la fonction
$$u \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-u} \in \mathbb{R}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction de référence). On a donc domination.
• Le théorème de convergence dominée à paramètre continu s'applique alors :
$$xf(x) = \int_0^{+\infty} g(x,u)\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u = \big[-e^{-u}\big]_0^{+\infty} = 1.$$
Donc
$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}}.$$

Remarque. Une fois qu'on a l'idée de la limite, on peut se passer du théorème de convergence dominé : par linéarité de l'intégrale convergente,
$$xf(x) - \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u}\mathrm{d}u}_{=1} = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{1+\frac{u}{x}},$$
et donc, par inégalité triangulaire généralisée, puis croissance de l'intégrale convergente (car « les bornes sont dans le bon sens »),
$$|xf(x) - 1| \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} ue^{-u}\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
et le théorème des gendarmes conclut :
$$xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

5) • Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t}{1+t}e^{-xt}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{-t-1+1}{1+t}e^{-xt}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t + f(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$$
Donc la fonction f est solution de l'EDL d'ordre 1 :
$$\boxed{y' - y = -\frac{1}{x}}.$$
Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme
$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto Ke^x \in \mathbb{R}$$
pour $K \in \mathbb{R}$, et par la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière y sous la forme
$$y : x \mapsto K(x)e^x$$
avec K une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
En reportant, on obtient

$$y \text{ est solution sur } \mathbb{R}_+^* \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ K'(x)e^x = -\frac{1}{x},$$

donc (par le théorème fondamental de l'analyse, puisque la fonction

$$t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$$

est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, et que $1 \in \mathbb{R}_+^*$), la fonction

$$K : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto -\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

convient.
Donc, les solutions de l'équation différentielle $y' - y = -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme

$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto Ce^x - e^x \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

pour $C \in \mathbb{R}$.
• Il reste à déterminer la valeur de C pour avoir f. Or,

$$\lim_{+\infty} f = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0,$$

donc pour la valeur de C qui donne f,

$$C - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = f(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$C = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

(intégrale qui converge bien, puisque la limite précédente existe, mais on peut le prouver sinon par critère de domination, car $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$). Et donc, la relation de Chasles donne bien alors la formule voulue.

Exercice 7.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   • La fonction
   $$f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)-t} \in \mathbb{R}$$
   est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
   • en $+\infty$:
   $$\lim_{t\to+\infty} t^2(t^{x-1}e^{-t}) = \lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$$
   (par croissances comparées), donc
   $$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$
   et comme la fonction
   $$t \mapsto \frac{1}{t^2}$$
   est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann, $2 > 1$), on en déduit que la fonction f aussi par critère de domination.
   • en 0, on a un équivalent :
   $$f(t) = t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}},$$
   or la fonction
   $$t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$$

est positive, donc le critère d'équivalence donne que l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

est de même nature que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}},$$

donc converge si et seulement si $1-x<1$, c'est-à-dire si et seulement si $x>0$ (Riemann). Et dans ce cas, comme la fonction f est positive, on a f intégrable sur $]0,1]$.

• Donc, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale définissant $\Gamma(x)$ converge absolument, donc converge. Donc l'expression $\Gamma(x)$ existe pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Et pour $x \in \mathbb{R}_-$, l'intégrale définissant $\Gamma(x)$ diverge (car déjà sur $]0,1]$, elle diverge...).

2. On pose

$$g : (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto t^{x-1}e^{-t} \in \mathbb{R}.$$

« Le paramètre est x, la variable d'intégration sera t ».

• à $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(x,t) \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf question précédente).

• A $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la fonction

$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(x,t) = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t} \in \mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(t^{x-1}e^{-t}\right) = \ln^k(t)t^{x-1}e^{-t}.$$

• A $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = \ln^k(t)t^{x-1}e^{-t} \in \mathbb{R}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in [a,b]$, on a $a \leq x \leq b$, puis

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(t^{x-1}e^{-t}\right)\right| = \left|\ln^k(t)t^{x-1}e^{-t}\right| \leq |\ln^k(t)|\phi(t)$$

avec

$$\phi(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \in]0,1[\\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \in]1,+\infty[\end{cases}.$$

En effet, si $t \in]0,1[$, alors $\ln(t) < 0$, donc

$$a\ln(t) \geq x\ln(t) \geq b\ln(t),$$

ce qui donne

$$\phi(t) = t^{a-1}e^{-t} = e^{(a-1)\ln(t)-t} \geq e^{(x-1)\ln(t)-t} = t^{x-1}e^{-t} \geq e^{(b-1)\ln(t)-t} \geq 0$$

et si $t \in [1,+\infty[$, on a $\ln(t) \geq 0$, donc

$$a\ln(t) \leq x\ln(t) \leq b\ln(t),$$

ce qui donne

$$0 \leq e^{(a-1)\ln(t)-t} \leq e^{(x-1)\ln(t)-t} = t^{x-1}e^{-t} \leq e^{(b-1)\ln(t)-t} = t^{b-1}e^{-t} = \phi(t).$$

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction

$$t \mapsto |\ln^k(t)|\phi(t)$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$:

- elle est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, par produit. En effet, la fonction ln est continue sur $]0,+\infty[$, la fonction ϕ est continue sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ par opérations usuelles, et
$$\lim_{t\to 1^-}\phi(t)=\lim_{t\to 1^-}t^{a-1}e^{-t}=e^{-1},$$
existe et est finie,
$$\lim_{t\to 1^+}\phi(t)=\lim_{t\to 1^+}t^{b-1}e^{-t}=e^{-1},$$
existe et est finie, ce qui donne ϕ continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ (en fait, comme $\lim\limits_{t\to 1^-}\phi(t)=\lim\limits_{t\to 1^+}\phi(t)=\phi(1)$, la fonction ϕ est même continue sur $]0,+\infty[$).
- de plus
$$|\ln^k(t)|\phi(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{|\ln^k(t)|}{t^{1-a}}=\underset{t\to 0}{o}\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$$
par croissance comparée, et la fonction
$$t\in]0,1]\mapsto\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\in\mathbb{R}$$
est intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur }]0,1]\\ \text{en } 0\end{array}\right\}$ car $a>0$ donc $1-\dfrac{a}{2}<1$ (Riemann),
- et
$$|\ln^k(t)|\phi(t)=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
par croissance comparée (*en effet, pour tout* $t\in]1,+\infty[$,
$$\frac{|\ln^k(t)|\phi(t)}{\frac{1}{t^2}}=\underbrace{\frac{|\ln^k(t)|}{t}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0}\underbrace{t^{b+2}e^{-t}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$$
en appliquant deux fois les croissances comparées), avec la fonction
$$t\mapsto\frac{1}{t^2}$$
intégrable $\left\{\begin{array}{c}\text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty\end{array}\right\}$ (Riemann, $2>1$).

On a donc domination.

• Donc le théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'applique : la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc par « caractère local » de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^\infty$ », sur $\mathbb{R}_+^*$, et en plus, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,
$$\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}\ln^k(t)t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

• En particulier, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,
$$\Gamma''(x)=\int_0^{+\infty}\ln^2(t)t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\geq 0,$$
par positivité de l'intégrale, car la fonction $t\mapsto\ln^2(t)t^{x-1}e^{-t}$ est positive et d'intégrale convergente sur $]0,+\infty[$, avec « les bornes dans le bon sens ».

Donc la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. • Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On effectue une intégration par parties. Les fonctions
$$u:t\mapsto t^x\qquad\text{et}\qquad v:t\mapsto -e^{-t}$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées
$$u':t\mapsto xt^{x-1}\qquad\text{et}\qquad v':t\mapsto e^{-t}.$$

De plus,

$$u(t)v(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

(car $x > 0$), et

$$u(t)v(t) \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée. Donc uv a une limite **finie** en 0 et $+\infty$. Donc le théorème d'intégration par parties s'applique. Comme on sait que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \Gamma(x+1)$$

converge (car $x+1>0$), alors on a que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -xt^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

converge (mais on le savait déjà, car c'est $-x\Gamma(x)$ avec $x>0$...), et on a l'égalité :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \underbrace{[u(t)v(t)]_0^{+\infty}}_{=0-0} - \int_0^{+\infty} -xt^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

• Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Initialisation : pour $n=1$,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = -\lim_{X\to+\infty} e^{-X} + 1 = 1 = 0! = (1-1)!,$$

d'où l'initialisation.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\Gamma(n) = (n-1)!$. Alors, puisque $n>0$, le début de la question donne

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \underset{\text{H.R.}}{=} n \times (n-1)! = n! = \big((n+1)-1\big)!,$$

d'où l'hérédité.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}.$$

• La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc continue en 1. Donc

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 1, \qquad \text{autrement dit} \qquad \boxed{\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}}.$$

4. • La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$. De plus,

$$\Gamma(1) = 0! = 1 \qquad \text{et} \qquad \Gamma(2) = 1! = 1,$$

donc

$$\Gamma(1) = \Gamma(2).$$

Le théorème de Rolle s'applique alors, et donne qu'il existe $a \in]1,2[$ avec $\Gamma'(a) = 0$.

• On sait que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction Γ' est croissante sur $]0,+\infty[$. Comme $\Gamma'(a) = 0$, on a alors le tableau de signe :

x	0 $\quad$ a $\quad$ $+\infty$
$\Gamma'(x)$	$\|\|$ $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

Puis, la fonction Γ est alors croissante sur $[a,+\infty[$, donc a une limite (finie ou $+\infty$) en $+\infty$, puis par composition de limites,

$$\lim_{+\infty} \Gamma = \lim_{n\to+\infty} \Gamma(n) = \lim_{n\to+\infty} (n-1)! = +\infty.$$

Enfin,
$$\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

D'où le tableau de variations :

x	0		a		$+\infty$
$\Gamma'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$\Gamma(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

La seule chose que l'on peut rajouter, c'est
$$\Gamma(a) > 0$$
par stricte positivité de l'intégrale (car la fonction $t \mapsto t^{a-1}e^{-t}$ est continue positive non nulle sur $]0, +\infty[$, avec « les bornes dans le bon sens »).

Exercice 8.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$g : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{t^{-x}}{1+t} \in \mathbb{R}.$$
• La fonction g est continue (par morceaux) sur $[1, +\infty[$.
• Étude en $+\infty$: On a
$$g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$$
et la fonction
$$t \mapsto \frac{1}{t^{x+1}}$$
est positive, donc par le critère d'équivalence, l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$$
est de même nature que l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}},$$
donc converge si et seulement si $x + 1 > 1$ (Riemann), c'est-à-dire $x > 0$.
Donc
$$\boxed{D_f = \mathbb{R}_+^*}.$$
• Remarquons alors que la fonction g est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, puisque positive et d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$.

2. ★ Continuité de f : on pose
$$g : (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [1, +\infty[\mapsto \frac{t^{-x}}{1+t} \in \mathbb{R}.$$
« Le paramètre est x, la variable d'intégration sera t ».
• Pour tout $t \in [1, +\infty[$, la fonction
$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(x, t) \in \mathbb{R}$$
est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction
$$t \in [1, +\infty[\mapsto g(x, t) \in \mathbb{R}$$
est continue (par morceaux) sur $[1, +\infty[$.
• Soit $(\mathrm{e}, M) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \mathrm{e} \leq M$. Pour tout $(x, t) \in [\mathrm{e}, M] \times [1, +\infty[$, on a :
$$|g(x, t)| = \left|\frac{t^{-x}}{1+t}\right| \leq \frac{t^{-\mathrm{e}}}{1+t} \leq \frac{t^{-\mathrm{e}}}{t} = \frac{1}{t^{1+\mathrm{e}}}.$$
Or, la fonction
$$t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{t^{1+\mathrm{e}}} \in \mathbb{R}$$

est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann, car $1+\mathrm{e}>1$ puisque $\mathrm{e}>0$). On a donc domination.
• Alors le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique, et donne que la fonction ϕ est continue sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc par « caractère local » de la continuité, sur $\mathbb{R}_+^*$.
★ Monotonie de f : soit $(x_1,x_2)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $x_1>x_2$. Alors, pour tout $t\in[1,+\infty[$, comme $\ln(t)\geq 0$, on a

$$x_1\ln(t)\geq x_2\ln(t),\qquad \text{puis}\qquad t^{-x_1}=e^{-x_1\ln(t)}\leq e^{-x_2\ln(t)}=t^{-x_2}$$

et donc

$$\frac{t^{-x_1}}{1+t}\leq\frac{t^{-x_2}}{1+t}.$$

C'est vrai pour tout $t\in[1,+\infty[$, donc par croissance de l'intégrale convergente (car « les bornes sont dans le bon sens »), on a :

$$f(x_1)=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x_1}}{1+t}\mathrm{d}t\leq\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x_2}}{1+t}\mathrm{d}t=f(x_2)$$

Ainsi la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque. En utilisant la stricte positivité de l'intégrale, on peut même montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$, par linéarité de l'intégrale,

$$f(x)+f(x+1)=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x}+t^{-x-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{t^{-x-1}(1+t)}{1+t}\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}t^{-x-1}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{xt^x}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{x}.$$

4. Équivalent en 0 : par continuité de la fonction f en 1, on a

$$\lim_{x\to 0^+}f(x+1)=f(1).$$

Or d'après la relation précédente, on a :

$$xf(x)=1-xf(x+1).$$

Ainsi en passant à la limite, on a

$$\lim_{x\to 0^+}xf(x)=1.$$

Donc

$$\boxed{f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{x}}.$$

Équivalent en $+\infty$: comme la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ (ainsi $x+1\in\mathbb{R}_+^*$ aussi), on a :

$$f(x)\geq f(x+1),$$

ce qui donne (en ajoutant $f(x)$ ou $f(x+1)$ à l'inégalité) :

$$2f(x)\geq f(x)+f(x+1)\geq 2f(x+1).$$

Donc, la relation de la question précédente donne, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$2f(x+1)\leq\frac{1}{x}\leq 2f(x).$$

Pour $x\in]1,+\infty[$, on peut appliquer ce qui précède à $x-1$ au lieu de x (car $x-1\in\mathbb{R}_+^*$), et on a alors

$$2f(x)\leq\frac{1}{x-1}\leq 2f(x-1).$$

Ainsi, pour tout $x\in]1,+\infty[$,

$$\frac{1}{2x}\leq f(x)\leq\frac{1}{2(x-1)}.$$

Le théorème des gendarmes (après avoir multiplié par x) permet de conclure :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}}.$$

5. Calcul de
$$f(1) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)} \mathrm{d}t.$$
Soit $M > 0$, on a :
$$\int_1^M \frac{1}{t(1+t)} \mathrm{d}t = \int_1^M \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^M \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln(M) - \ln(M+1) + \ln(2) = -\ln\left(1 + \frac{1}{M}\right) + \ln(2).$$
En faisant tendre M vers $+\infty$, on a :
$$\boxed{f(1) = \ln(2)}$$
(car $f(1) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)} \mathrm{d}t = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{1}{t(t+1)} \mathrm{d}t$).

Exercice 9. 1) Soit $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction
$$t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{\sin^2(xt)}{t^3} \in \mathbb{R}$$
est continue sur $[1, +\infty[$. Puis, pour tout $t \in [1, +\infty[$,
$$\left| \frac{\sin^2(xt)}{t^3} \right| \leq \frac{1}{t^3},$$
or la fonction
$$t \mapsto \frac{1}{t^3}$$
est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann, $3 > 1$), donc par critère de comparaison, la fonction
$$t \mapsto \frac{\sin^2(xt)}{t^3}$$
est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, autrement dit $F(x)$ est la valeur d'une intégrale absolument convergente, donc convergente.
C'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque. De plus, comme on a une domination indépendante de x, et que, pour tout $t \in [1, +\infty[$, la fonction
$$x \mapsto \frac{\sin^2(xt)}{t^3}$$
est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de continuité des intégrales à paramètres donne que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Notons
$$g : (x, t) \in \mathbb{R} \times [1, +\infty[\mapsto \frac{\sin^2(xt)}{t^3} \in \mathbb{R}.$$
« Le paramètre est x, la variable d'intégration sera t ».
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction
$$t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{\sin^2(xt)}{t^3} \in \mathbb{R}$$
est intégrable sur $[1, +\infty[$ (déjà vu)
• Soit $t \in [1, +\infty[$ fixé, alors la fonction
$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin^2(xt)}{t^3} \in \mathbb{R}$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{2\sin(xt)\cos(xt)}{t^2}.$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{2\sin(xt)\cos(xt)}{t^2}$$

est continue sur $[1, +\infty[$.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{2\sin(xt)\cos(xt)}{t^2}\right| \leq \frac{2}{t^2}$$

et la fonction

$$t \mapsto \frac{2}{t^2}$$

est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann, $2 > 1$).
• Donc le théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'applique : la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et en plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{2\sin(xt)\cos(xt)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Intégrons par parties : les fonctions

$$u : t \mapsto -\frac{1}{2t^2} \qquad \text{et} \qquad v : t \mapsto \sin^2(xt)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivées respectives

$$u' : t \mapsto \frac{1}{t^3} \qquad \text{et} \qquad v' : t \mapsto 2x\cos(xt)\sin(xt).$$

De plus, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$\big|u(t)v(t)\big| \leq \frac{1}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc uv a une limite finie (nulle) en $+\infty$. Donc le théorème d'intégration par parties s'applique. Comme on sait que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = F(x)$$

converge, on a alors que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2t^2}2x\cos(xt)\sin(xt)\mathrm{d}t$$

converge, et

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2t^2}\sin^2(xt)\right]_1^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2t^2}2x\cos(xt)\sin(xt)\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{\sin^2(x)}{2} + x\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)\sin(xt)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{x}{2}F'(x) \end{aligned}$$

soit

$$xF'(x) - 2F(x) = -\sin^2(x).$$

Donc la fonction F est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle proposée.
4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, donc

$$xF'(x) - 2F(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$$

(en utilisant le DSE de cos, valable en tout réel).

Cherchons alors les fonctions DSE solutions de cette équation différentielle. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$, et notons

$$y : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors on sait que la fonction y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et sur cet intervalle, on peut dériver terme à terme. On a donc, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{soit} \qquad xy'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n.$$

Donc : pour tout $x \in]-R, R[$,

$$xy'(x) - 2y = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-2) a_n x^n.$$

Donc

$$y \text{ est solution de l'équation différentielle sur }]-R, R[\quad \Leftrightarrow \quad \text{pour tout } x \in]-R, R[,$$
$$-2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-2) a_n x^n = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{2^{2p} x^{2p}}{(2p)!}.$$

Ainsi (comme $]-R, R[$ est un intervalle non trivial, puisque $R > 0$, contenant 0), par unicité des coefficients, on a (en distinguant les indices n pairs et impairs) :

$$y \text{ est solution de l'équation différentielle sur }]-R, R[\quad \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -2a_0 = 0 \\ \forall p \geq 0,\ (2p+1-2) a_{2p+1} = 0 & \text{(pour } n = 2p+1) \\ \forall p \geq 1,\ (2p-2) a_{2p} = \dfrac{1}{2}(-1)^p \dfrac{2^{2p}}{(2p)!} & \text{(pour } n = 2p) \end{cases}$$

Mais pour $p = 1$, la dernière ligne de ce système s'écrit $0 = -1$, ce qui est impossible.
Donc l'équation différentielle n'a pas de solution DSE en 0. Donc la fonction F n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 10. 1) Première méthode :
• La fonction sin est concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (car $\sin'' = -\sin \leq 0$ sur cet intervalle), donc au dessus de ses cordes. Comme $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, la corde qui passe par les points

$$(0, 0) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

a pour équation

$$y = \frac{2x}{\pi},$$

et donc pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{2t}{\pi} \leq \sin(t).$$

• La fonction sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$, donc $|\sin'| \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis donne alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sin(t)\right| = \left|\sin(t) - \sin(0)\right| \leq 1 \cdot |t - 0| = |t|.$$

Deuxième méthode : par étude de fonctions.
• Soit

$$f : t \mapsto t - \sin(t),$$

alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = 1 - \cos(t) \geq 0,$$

donc la fonction f est croissante (et même strictement) sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et comme $f(0) = 0$,

$$f(t) \geq 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, ce qui donne

$$\sin(t) \leq t$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

• Soit

$$g : t \mapsto \sin(t) - \frac{2t}{\pi},$$

alors la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$g'(t) = \cos(t) - \frac{2}{\pi}, \qquad g''(t) = -\sin(t) < 0.$$

Donc la fonction g' est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et comme g' est aussi continue sur cet intervalle, avec

$$g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0 \qquad \text{et} \qquad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0,$$

il existe (par le théorème de la bijection monotone) un unique $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec

$$g' > 0 \text{ sur } [0, \alpha[\text{ et } g' < 0 \text{ sur } \left]\alpha, \frac{\pi}{2}\right].$$

Donc la fonction g est croissante sur $[0, \alpha]$, donc

$$g(t) \geq g(0) = 0$$

pour $t \in [0, \alpha]$, et la fonction g est décroissante sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, donc

$$g(t) \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

pour $t \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$. En définitive,

$$g \geq 0$$

sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui donne bien l'inégalité voulue.

2) Soit

$$h : t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \in \mathbb{R}.$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^*$,

$$h(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1,$$

donc la fonction h se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$, et ainsi la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.
Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto h(t)e^{-xt}$$

est alors continue sur $\mathbb{R}$, donc sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc est intégrable sur ce segment. Donc $F(x)$ existe.
Donc la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, par inégalité triangulaire généralisée puis croissance de l'intégrale convergente (car « les bornes sont dans le bon sens »), on a

$$|F(x)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| e^{-xt} \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xt} \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1 - e^{-\frac{x\pi}{2}}}{x},$$

car pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $t > 0$ et $0 \leq \sin(t) \leq t$ (par la question 1), donc

$$0 \leq \frac{\sin(t)}{t} \leq 1.$$

Comme une valeur absolue est positive, et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-\frac{x\pi}{2}}}{x} = 0,$$

le théorème des gendarmes donne

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0}.$$

4) Notons

$$g : (x, t) \in \mathbb{R} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto h(t)e^{-xt} \in \mathbb{R}.$$

« Le paramètre est x, la variable d'intégration sera t ».
• Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto g(x, t) = h(t)e^{-xt} \in \mathbb{R}$$

est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc intégrable (car on est sur un segment).
• Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto g(x, t) = h(t)e^{-xt} \in \mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (c'est une exponentielle multipliée par une constante).
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\sin(t)e^{-xt}$$

est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
• Soit $M > 0$, pour tout $x \in [-M, M]$, on a $|x| \leq M$, et pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq e^{-xt} \leq e^{|x|t} \leq e^{Mt},$$

or la fonction

$$t \mapsto e^{Mt}$$

est continue $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a donc domination.
• Donc le théorème de dérivation des intégrales à paramètres s'applique : la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[-M, M]$ de $\mathbb{R}$, donc par « caractère local » de la propriété « être de classe $\mathcal{C}^1$ », sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t.$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour calculer cette intégrale, deux façons : soit on exprimer $\sin(t)$ sous la forme $\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, et on primitive puis simplifie les exponentielles, soit on intègre deux fois par parties.
Intégrons deux fois par parties (les fonctions apparaissant étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \left[\cos(t)e^{-xt}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)(-x)e^{-xt}\mathrm{d}t = -1 + x\left(\left[\sin(t)e^{-xt}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)(-x)e^{-xt}\mathrm{d}t\right) = -1 + xe^{-x\frac{\pi}{2}} - x^2F'(x)$$

donc

$$\boxed{F'(x) = \frac{xe^{-\frac{x\pi}{2}} - 1}{1 + x^2}}.$$

5) En utilisant le DSE de exp (qui est valable sur $\mathbb{R}$), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} t^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(t) \frac{(-x)^n}{n!} t^{n-1} \mathrm{d}t$$

Notons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : t \mapsto \sin(t) \frac{(-x)^n}{n!} t^{n-1}.$$

• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, car la fonction f_n est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et se prolonge par continuité en 0, puisque

$$f_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} t \frac{(-x)^n}{n!} t^{n-1} = \frac{(-x)^n}{n!} t^n \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

• De plus, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin(t) \frac{(-x)^n}{n!} t^{n-1}$$

converge, de somme $h(t)e^{-xt}$, et on sait que la fonction

$$t \mapsto h(t)e^{-xt}$$

est continue (par morceaux) sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

• Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par croissance de l'intégrale (car « les bornes sont dans le bon sens »),

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin(t) \frac{(-x)^n}{n!} t^{n-1}\right| \mathrm{d}t \leq \frac{|x|^n}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \mathrm{d}t = \frac{|x|^n}{n!} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{n} \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{2} x\right)^n$$

et la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{2} x\right)^n$$

est convergente (c'est une série exponentielle auquel on a enlevé le premier terme), donc par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin(t) \frac{(-x)^n}{n!} t^{n-1}\right| \mathrm{d}t$$

converge, donc la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin(t) \frac{(-x)^n}{n!} t^{n-1}\right| \mathrm{d}t$$

converge aussi (puisque le terme $n = 0$ existe bien, puisque la fonction f_0 est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$).

• Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le théorème d'intégration terme à terme s'applique, et on obtient

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-x)^n}{n!} \sin(t) t^{n-1} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) t^{n-1} \mathrm{d}t}_{\text{constante par rapport à } x}$$

qui est bien de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n constante qui ne dépend pas de x, donc la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Ici, on aurait pu utiliser la convergence normale (une fois que l'on a prolongé par continuité les fonctions f_n en 0) : pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| = \left|\sin(t)\frac{(-x)^n}{n!}t^{n-1}\right| = |h(t)|\frac{|x|^n}{n!}t^n \leq \frac{|x|^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$$

(car $|h(t)| \leq 1$), et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n(0)| = 0 \leq \frac{|x|^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$$

et enfin

$$|f_0(0)| = 1 \leq 1 = \frac{|x|^0}{0!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^0.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{|x|^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n,$$

et la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x|^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$$

converge (série exponentielle), donc la série de fonctions

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$$

converge normalement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment. On conclut alors de même.

6) La fonction h est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc a un minimum global sur ce segment (théorème des bornes atteintes) : il existe $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que

$$h(t) \geq h(\alpha)$$

pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $e^{-xt} \geq 0$, donc

$$h(t)e^{-xt} \geq h(\alpha)e^{-xt}.$$

Par croissance de l'intégrale (« les bornes sont dans le bon sens »), on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)e^{-xt}\mathrm{d}t \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\alpha)e^{-xt}\mathrm{d}t = h(\alpha)\frac{1-e^{-\frac{x\pi}{2}}}{x}.$$

Or,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-e^{-\frac{x\pi}{2}}}{x} = +\infty$$

par croissance comparée, et $h(\alpha) > 0$ (car $\sin > 0$, donc $h > 0$, sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et car $h(0) = 1 > 0$), donc

$$\boxed{\lim_{-\infty} F = +\infty}.$$

Remarque. D'après la première question, on peut éviter d'utiliser α, car on a directement

$$h(t) \geq \frac{2}{\pi}$$

pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\frac{1-e^{-\frac{x\pi}{2}}}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

puis

$$\boxed{\lim_{-\infty} F = +\infty}.$$

Exercice 11. 1) Soit $n \in \mathbb{N}$.
La fonction
$$f_n : x \mapsto e^{-x} \sin^{2n}(x)$$
est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car $n \geq 0$), donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$|e^{-x} \sin^{2n}(x)| \leq e^{-x},$$
et la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [0, +\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$, donc par critère de comparaison, la fonction f_n aussi. Donc l'intégrale J_n est absolument convergente (donc convergente).
$$J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \boxed{1}.$$

2) $\to$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale,
$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-x} \sin^{2n}(x)}_{\geq 0} \underbrace{\left(\sin^2(x) - 1\right)}_{\leq 0} \mathrm{d}x,$$
donc par croissance de l'intégrale convergente (les fonctions intégrées étant continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et « les bornes sont dans le bon sens »), on a
$$J_{n+1} - J_n \leq 0$$
pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donc la suite numérique $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
Par positivité de l'intégrale convergente (« les bornes sont dans le bon sens »),
$$J_n \geq 0$$
pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite numérique $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par 0, donc convergente (théorème de la limite monotone).
$\to$ Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons
$$f_n : x \mapsto e^{-x} \sin^{2n}(x).$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-x} \sin^{2n}(x)$ existe et vaut
$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$
(donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers ϕ sur $\mathbb{R}_+$), et la fonction ϕ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a
$$|f_n(x)| = |e^{-x} \sin^{2n}(x)| \leq e^{-x}$$
et la fonction
$$x \mapsto e^{-x}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On a donc domination.
- Le théorème de convergence dominée donne alors
$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} e^{-x} \sin^{2n}(x) \mathrm{d}x = \boxed{0}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties : les fonctions
$$u : x \mapsto -e^{-x} \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto \sin^{2n}(x)$$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivées
$$u' : x \mapsto e^{-x} \qquad \text{et} \qquad v' : x \mapsto 2n \cos(x) \sin^{2n-1}(x).$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leq |u(x)v(x)| \leq e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc par le théorème des gendarmes, uv a une limite **finie** (nulle) en $+\infty$.
Donc le théorème d'intégration par parties s'applique et comme on sait que l'intégrale

$$J_n = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

converge, alors on a l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} -e^{-x} 2n \cos(x) \sin^{2n-1}(x)\mathrm{d}x$$

qui converge et :

$$J_n = \underbrace{\left[-e^{-x}\sin^{2n}(x)\right]_0^{+\infty}}_{=0-0} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}\cos(x) 2n \sin^{2n-1}(x)\mathrm{d}x = 2n \int_0^{+\infty} \cos(x) e^{-x} \sin^{2n-1}(x)\mathrm{d}x$$

On réintègre par parties suivant le même principe (on primitive la fonction $x \mapsto e^{-x}$) :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \cos(x)e^{-x}\sin^{2n-1}(x)\mathrm{d}x &= \underbrace{\left[-\cos(x)e^{-x}\sin^{2n-1}(x)\right]_0^{+\infty}}_{=0-0} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}\big(-\sin(x)\sin^{2n-1}(x) + (2n-1)\underbrace{\cos^2(x)}_{=1-\sin^2(x)} \text{s} \\ &= -J_n + (2n-1)J_{n-1} - (2n-1)J_n\end{aligned}$$

Par conséquent

$$J_n = -2nJ_n + 2n(2n-1)J_{n-1} - 2n(2n-1)J_n = 2n(2n-1)J_{n-1} - 4n^2 J_n.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{J_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} J_{n-1}}.$$

Comme $J_0 = 1$, on en déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$J_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k(2k-1)}{4k^2+1},$$

ce qui se simplifie en

$$\boxed{J_n = \frac{(2n)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(4k^2+1)}},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. On peut trouver la limite sans passer par le théorème de convergence dominée : la série numérique

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} -\ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right)$$

diverge (en effet, on a

$$-\ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2k},$$

la série numérique $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2k}$ diverge et est à termes positifs, donc le critère d'équivalence des séries à termes positifs conclut), donc la série numérique

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right)$$

diverge aussi.
Mais, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < 2k(2k-1) = 4k^2 - 2k < 4k^2 + 1,$$

donc

$$\ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right) < 0.$$

Donc la série numérique $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right)$ est une série divergente à termes tous négatifs, donc la suite de ses sommes partielles tend vers $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right) = -\infty.$$

Or, par propriété du logarithme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\right) = \ln(J_n),$$

et donc en passant à l'exponentielle, comme exp tend vers 0 en $-\infty$, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.$$

Exercice 12. 1) • Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^{n+2}}$$

est continue sur $]1, +\infty[$.
• Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x^2}.$$

Or, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue (par morceaux) sur $]1, +\infty[$.
• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\left|\frac{x^n}{1+x^{n+2}}\right| \leq \frac{1}{x^2},$$

or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ (Riemann, $2 > 1$). On a donc domination.
Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = 1.$$

• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^{n+2}}$$

est continue sur $[0, 1]$.
• Pour tout $x \in [0, 1[$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et si $x = 1$,

$$f_n(1) = \frac{x^n}{1+x^{n+2}} = \frac{1}{2}.$$

Or, la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $[0,1]$.
• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\left|\frac{x^n}{1+x^{n+2}}\right| \leq 1,$$

or la fonction $x \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,1]$. On a donc domination.
Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0.$$

Donc, par la relation de Chasles,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\mathrm{d}x = 1}.$$

2) • Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$$

est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0, en posant $f_n(0) = 1$, car

$$\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{n\frac{x}{n}}{x(1+x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} 1.$$

Donc f_n est intégrable sur tout intervalle $]0,A]$ avec $A \in \mathbb{R}_+^*$.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

(car $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$), donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.
• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, comme $|\sin(u)| \leq |u|$ pour tout réel $u \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\left|\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\right| \leq \frac{n\frac{x}{n}}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

• Or, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

est intégrable sur $[0,+\infty[$ (c'est une fonction continue positive, une de ses primitives est arctan qui a une limite finie en $+\infty$), donc sur $]0,+\infty[$. On a donc domination.
Donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

3) Remarquons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} < e$$

car $\ln(1+u) < u$ pour tout $u \in]-1,+\infty[$ avec $u \neq 0$. De plus,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$$

(car exp est continue en 1).
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \frac{e^x}{1+e^x} \mathbb{1}_{]0,(1+\frac{1}{n})^n]}(x)$$

est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
• Pour tout $x \in]0, e[$, pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on aura $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > x$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$), et donc

$$f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} \frac{e^x}{1+e^x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^x}{1+e^x}$$

(car $x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(x)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissance comparée puis continuité de exp en 0).
• Pour tout $x \in [e, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x \geq e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, donc $f_n(x) = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

• Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x}{1+e^x} & \text{si } x < e \\ 0 & \text{si } x \geq e \end{cases},$$

qui est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$0 \leq \frac{e^x}{1+e^x} \leq 1.$$

Puis, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(x)} \leq \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ e & \text{si } 1 \leq x \leq e \end{cases},$$

donc $0 \leq x^{\frac{1}{n}} \leq e$ pour $x \in]0, e[$.
Donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]0, e]$, $|f_n(x)| \leq e$, et pour tout $x \geq e$, $|f_n(x)| = 0$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$|f_n(x)| \leq \phi(x)$$

où

$$\phi : x \mapsto \begin{cases} e & \text{si } x < e \\ 0 & \text{si } x \geq e \end{cases},$$

avec ϕ qui est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$. On a donc domination.
Donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} x^{\frac{1}{n}} \frac{e^x}{1+e^x} \mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^e \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x + \int_e^{+\infty} 0\mathrm{d}x = \left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^e = \boxed{\ln\left(1+e^e\right) - \ln(2)} \end{aligned}$$

4) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{\frac{t}{2}} \mathbb{1}_{[0,n[}$$

est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
• Pour tout $t \in]0, +\infty[$, pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on aura $t < n$, donc

$$f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{\frac{t}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t}{2}}$$

car

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-t+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-t}$$

(par continuité de la fonction exp en $-t$), or la fonction

$$t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$.
• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, n[$,

$$|f_n(t)| \leq e^{-\frac{t}{2}}$$

car

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leq e^{-t}$$

puisque $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \in]-1, +\infty[$ (et car exp est croissante), avec $u = -\dfrac{t}{n} > -1$ pour $t < n$. Cette majoration de $|f_n(t)|$ reste bien sûr vrai si $t \geq n$, car $f_n(t) = 0$ alors. Or, la fonction

$$t \mapsto e^{-t}$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$. On a donc domination.
Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^{+\infty} = \boxed{2}.$$

Exercice 13. → • Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : t \mapsto \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} f(t)$$

est continue sur $]0, +\infty[$ (par produit et quotient de fonctions qui le sont).
• Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} f(t) = 0,$$

et la fonction $t \mapsto 0$ est continue sur $]0, +\infty[$.
• La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|f(t)| \leq M.$$

Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|f_n(t)| = \left|\frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} f(t)\right| \leq \frac{Me^{-t}}{\sqrt{t}},$$

or la fonction

$$g : t \mapsto \frac{Me^{-t}}{\sqrt{t}}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (par quotient de fonctions qui le sont) et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par critère de domination car :

$$g(t) \underset{t\to0^+}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

(car $Me^{-t} \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} M \in \mathbb{R}$, donc est bornée au voisinage de 0) et

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

(car $n \geq 1$), et la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur }]0,1] \\ \text{en } 0 \end{array} \right\}$ (Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$) et la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{t^2}$$

est intégrable $\left\{ \begin{array}{c} \text{sur } [1,+\infty[\\ \text{en } +\infty \end{array} \right\}$ (Riemann $2 > 1$). On a donc domination.
Donc, par le théorème de convergence dominée, l'intégrale a_n converge pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \int_0^{+\infty} 0 \mathrm{d}t = \boxed{0}.$$

$\to$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Faisons alors le changement de variables $u = \sqrt{nt}$. La fonction

$$t \mapsto \sqrt{nt}$$

est une bijection (car $n > 0$) de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, $\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ soit $\mathrm{d}t = \frac{2u}{n}\mathrm{d}u$, donc, comme on sait que l'intégrale a_n converge,

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\frac{u}{\sqrt{n}}} f\left(\frac{u^2}{n}\right) \frac{2u}{n}\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u^2}{n}\right) \mathrm{d}u.$$

Or,
• pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$g_n : u \mapsto e^{-u} f\left(\frac{u^2}{n}\right)$$

est continue sur $[0,+\infty[$ (par composition et produit de fonctions qui le sont),
• puisque la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|g_n(u)| = \left| e^{-u} f\left(\frac{u^2}{n}\right) \right| \leq \|f\|_\infty e^{-u}$$

et la fonction

$$u \mapsto \|f\|_\infty e^{-u}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On a donc domination.
• Enfin, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, par continuité de la fonction f en 0,

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-u} f\left(\frac{u^2}{n}\right) = e^{-u} f(0),$$

avec la fonction

$$u \mapsto e^{-u} f(0)$$

continue sur $\mathbb{R}_+$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u^2}{n}\right) \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-u} f(0) \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0),$$

ce qui donne (**puisque** $f(0) \neq 0$) que

$$\boxed{a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} f(0)}.$$

Exercice 14. • Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{x e^{-x^2}}{n^2 + x^2}$$

est continue sur $[0,+\infty[$ ($n \geq 1$ sert à assurer que le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$).
• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{xe^{-x^2}}{n} \leq xe^{-x^2},$$

or la fonction

$$\phi : x \mapsto xe^{-x^2}$$

est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, admet

$$x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

comme primitive sur $\mathbb{R}_+$, et

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2} = 0$$

existe et **est finie**, donc la fonction ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On a donc domination.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0,$$

et la fonction $x \mapsto 0$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Donc, par le théorème de convergence dominée,

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = \boxed{0}.$$

Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^2 I_n = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{1+\frac{x^2}{n^2}}\mathrm{d}x.$$

Or,
• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$g_n : x \mapsto \frac{xe^{-x^2}}{1+\frac{x^2}{n^2}}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$.
• Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|g_n(x)| \leq xe^{-x^2} = \phi(x),$$

or la fonction ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = xe^{-x^2}$$

et la fonction

$$x \mapsto xe^{-x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 I_n = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}}.$$