TD Révisions - Planche A

1 Suites et séries numériques

Exercice 1 - Recherche de limites ⋆

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n^3-3}{2n^2+1}$
2. $u_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$
3. $u_n = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$
4. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
5. $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ (utiliser une relation $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$)
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ (encadrer u_n)

Exercice 2 - Équivalents et limites ⋆

Déterminer un équivalent et la limite de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = -2n^2+7n+3$.
2. $u_n = n-\frac{3}{n^5}$.
3. $u_n = \frac{3n^2+2n-5}{-4n^2+3n-8}$.
4. $u_n = (1.1)^n - n^{92} + e^{-n}$.
5. $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sqrt{n}$.
6. $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \sqrt{n}$.
7. $u_n = \frac{3n^2+2^n-5^n}{\ln(n)-4n^2+3^n-8}$.
8. $u_n = \sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}$.
9. $u_n = \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}$.
10. $u_n = n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

Exercice 3 - Recherche de limites ⋆⋆

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes (on pourra parfois - pas toujours - penser aux équivalents) :

1. $u_n = \frac{n^3-\ln(n)}{e^{2n}+1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+1}-n$
3. $u_n = \frac{e^n-3^n}{e^n+n!}$
4. $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn}$ avec $(a,b)\in]0;+\infty[^2$
5. $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
(indic° : utiliser une relation du type $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$)
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ (indic° : une somme de n termes est plus grande que n fois le plus petit terme et plus petite que n fois le plus grand)

Exercice 4 - Recherche d'équivalents ⋆⋆

Donner un équivalent pour chacune des suites :

1. $u_n = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$
3. $u_n = \ln\left(2-e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$
4. $u_n = \ln(n+1)-\ln n$

Exercice 5 ⋆⋆⋆

Soit (u_n) une suite à termes positifs vérifiant que : $u_n = o_{n\to+\infty}(\sqrt{n})$. On pose alors :

$$v_n = \left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n e^{-u_n}.$$

Déterminer un équivalent de $\ln(v_n)$ puis en déduire la limite de (v_n).

Exercice 6 ⋆⋆⋆

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!$

Exercice 7 ⋆⋆

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{2^n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}}, \quad v_n = \frac{n\sin n}{1+n^2}, \quad w_n = \sqrt[n]{n},$$

$$x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}, \quad y_n = n^2\left(\cos\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n+1}\right),$$

$$z_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad t_n = \frac{3n^2+(-1)^n}{\sqrt{n^2+2+\ln(n)}}.$$

Exercice 8 ⋆⋆⋆

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1, \quad v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^3-n}$$

$$w_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right).$$

Exercice 9 - Convergence et calculs ⋆⋆

Prouver la convergence de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants (sauf mention contraire, pour $n \geqslant 0$, et calculer sa somme :

1. $u_n = \frac{n+1}{2^n}$
2. $u_n = \frac{n^2+2^n}{4^n}$
3. $u_n = (-1)^n e^{-n}$
4. $u_n = (-1)^n n e^{-2n}$
5. $u_n = \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$
6. $u_n = \frac{n+3^n}{n!}$
7. $u_n = \frac{n(n-1)}{2^n n!}$
8. $u_n = \frac{2^n}{(n+2)!}$
9. $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$ (chercher a, b : $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}\right)$)
10. $u_n = \frac{2}{n(n-2)}$, $n \geqslant 3$ (chercher a, b : $\frac{2}{n(n-2)} = \frac{a}{n-2} + \frac{b}{n}$)

Exercice 10 ⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.
2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!}$$
et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Montrer que la série de terme général $(n^2-1)u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 11 - Nature de séries ⋆⋆

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants (on ne demande PAS de calculer la somme dans le cas de convergence) :

1. $u_n = \frac{n^2-3}{n^\alpha + \ln n}$, avec $\alpha > 0$
2. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$
3. $u_n = \frac{\sqrt{n}(\ln n)^2}{e^n}$
4. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$
6. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Exercice 12 ⋆⋆

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+2n}{n^4+n^3+1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n^3+1},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(2 - \mathrm{e}^{1/n}).$$

Exercice 13 - Série-intégrale ⋆⋆

On s'intéresse à la nature de la série de terme général $\frac{1}{k \ln k}$ pour $k \geqslant 2$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$:
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k \ln k}.$$
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$:
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$
3. Conclure.
4. Montrer que :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Exercice 14 - Constante d'Euler ⋆⋆⋆

Pour $n \geqslant 2$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge, puis déterminer les sommes partielles de cette série.
2. En déduire qu'il existe une constante γ telle que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1).$$
Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 15 ⋆⋆⋆

Répresenter dans le plan l'ensemble des points de coordonnées (a, b) tels que $a > 0$, $b > 0$ et la série de terme général :

$$u_n = \frac{a^n}{1+b^n}$$

soit convergente.

Exercice 16 ⋆⋆⋆

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

1. Déterminer les réels a et b tels que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer la somme de cette série.

2 Suites et séries de fonctions

Exercice 17 ⋆

On définit sur $\mathbb{R}_+$, la suite de fonctions (f_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(2nx).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$.

Exercice 18 ⋆

On définit la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \frac{1}{n + n^3x^2}.$$

1. Déterminer le plus grand intervalle I inclus dans $\mathbb{R}_+$ sur lequel la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement.
2. Montrer qu'il n'y a pas convergence normale sur I.
3. Étudier la convergence normale sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a \in I$.

Exercice 19 ⋆⋆

On considère un réel $a \geqslant 0$ et la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = n^a x^n(1 - x).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[0, 1]$ en fonction du paramètre a.

Exercice 20 ⋆⋆

Soit la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}.$$

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Étudier la convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 21 ⋆⋆⋆

On définit la fonction μ de la variable réelle x par : $\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine D de définition de la fonction μ.
2. Montrer que μ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
3. Déterminer la limite de μ en $+\infty$.
4. (a) Montrer que :

$$\forall x \in D,\ 2\mu(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right).$$

   (b) En déduire la limite de μ en 0.

3 Séries entières

Exercice 22 ⋆

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{n!} z^n$;
2. $\sum_{n\geqslant 1} \ln(n) z^n$;
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{n!n^n} z^n$;
4. $\sum_{n\geqslant 1} n^{\ln n} z^n$;
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{2-\sin n}$;
6. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n^n} z^n$;
7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}$;
8. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}^2(n)} z^n$;
9. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{3^n} z^n$;
10. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+2}{n+2}} z^n$;
11. $\sum_{n\geqslant 1} (\ln n)^n z^n$;
12. $\sum_{n\geqslant 1} (\ln(n!))^2 z^n$.

Exercice 23 ⋆⋆

Soit l'équation différentielle (E) : $4xy'' - 4y' + x^3y = 0$. Déterminer les solutions développables en séries entières de (E) puis en déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 24 ⋆⋆

On considère la série entière dont la somme f est définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $[-R, R]$.

3. Déterminer la somme de la série dérivée sur $]-R, R[$.
4. En déduire une expression simple de f sur $]-R, R[$.
5. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

4 Fonctions définies par des séries

Exercice 25 ⋆⋆

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-\ln(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{n^2 \ln x}$, définie sur $D =]0, 1[$.

1. Justifier que $f(x)$ est bien défini pour tout $x \in D$.
2. Pour $x \in D$, calculer $I(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln(x)} \mathrm{d}t$ sachant que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
3. Déterminer $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

Exercice 26 ⋆⋆

On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $x \in \mathbb{R}$ définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Déterminer le domaine D de définition de la fonction ζ puis justifier que cette fonction est strictement décroissante sur D.
2. Montrer que la fonction ζ est continue sur D.
3. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x)$ et montrer que $\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$.
4. Montrer que la fonction ζ est convexe sur D.

Exercice 27 ⋆ ⋆ ⋆

Soit (f_n) la suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$ $(n \geqslant 1)$.

1. Déterminer le plus grand intervalle I inclus dans $\mathbb{R}_+$ sur lequel la série de fonctions de terme général f_n converge simplement.
2. Montrer que la somme f de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ est continue sur tout I.
3. Étudier les variations de la fonction f sur I.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de I.