# TD Révisions - Planche B

## 1 Produit scalaire

### Exercice 1 - Identités de polarisation ⋆

Soit $E$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Montrer que pour tous $x$, $y \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).\end{aligned}$$

### Exercice 2 ⋆⋆

La famille $(-1,1,1)$ et $(1,-1,1)$ et $(1,1,-1)$ est-elle une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique ? Si non, l'orthonormaliser à l'aide du procédé de Gram-Schmidt. Donner la décomposition de $(1,1,1)$ dans la base obtenue.

### Exercice 3 ⋆⋆

Montrer que définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ en posant :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\mathrm{d}t.$$

### Exercice 4 ⋆⋆

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_4[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i)$.

1. Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire su $\mathbb{R}_4[X]$.
2. On considère à présent l'ensemble : $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(4) = 0\}$.
   (a) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   (b) Montrer que $E = \{X(X-4)Q,\ Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$. En déduire une base et la dimension de $E$.
3. On définit $P_1 = (X-2)(X-3)$, $P_2 = (X-1)(X-3)$ et $P_3 = (X-1)(X-2)$ puis pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $M_i = X(X-4)P_i$.
   (a) Montrer que pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $M_i(_i) \neq 0$. On pose alors $N_i = \frac{1}{M_i(i)}M_i$.
   (b) Montrer que $(N_1, N_2, N_3)$ est une base orthonormée de $E$.
   (c) En déduire que pour $P \in E$, on a :

$$P = P(1)N_1 + P(2)N_2 + P(3)N_3.$$

### Exercice 5 ⋆⋆

Soit $E$ un espace euclidien et soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de $F$. On pose alors, pour tout $x \in E$, $q(x) = x - \sum_{i=1}^{p}\langle x, e_i\rangle e_i$.

1. Montrer que $q$ est un endomorphisme de $E$ puis que $q$ est un projecteur.
2. Montrer que $F \subset \ker(q)$.

### Exercice 6 ⋆⋆

Soient $x$ et $y$ deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien $E$. Montrer que $x$ ert $y$ sont orthogonaux si et seulement si $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \|x+\lambda y\| \geqslant \|x\|$.

*Indication : pour le sens réciproque, étudier* $\lambda \mapsto \|x+\lambda y\|^2 - \|x\|^2$.

### Exercice 7 ⋆ ⋆ ⋆

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ :

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}\right)^2 \leqslant \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

### Exercice 8 ⋆ ⋆ ⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.
2. On définit $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Vérifier que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
3. (a) Soient $P$ et $Q$ deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, $P'$ et $Q'$ leurs polynômes dérivés respectifs. Établir :

$$\langle P', Q\rangle + \langle P, Q'\rangle = \langle P, Q\rangle - P(0)Q(0).$$

   (b) En déduire que si $P$ est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, alors on a $\|P\| = |P(0)|$.

### Exercice 9 ⋆⋆⋆

1. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

## 2 Réduction

### Exercice 10 ⋆

Déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 11 ⋆⋆

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ non nul. Montrer que $x$ est un vecteur propre de $f$ si et seulement si $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par $f$.

### Exercice 12 ⋆⋆⋆

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A$ et $B$ ont même rang, même trace, même valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.
2. Calculer $(A - 2I_4)^2$ et $(B - 2I_4)^2$. En déduire que $A$ et $B$ ne sont pas semblables.

### Exercice 13 ⋆⋆

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = {}^tM$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f$.

### Exercice 14 ⋆⋆

Soit $f$ un endormorphisme de $\mathbb{R}^n$ de rang 1. Montrer que l'un au moins des endomorphismes $f - \mathrm{Id}$ et $f + \mathrm{Id}$ est bijectif.

### Exercice 15 ⋆⋆

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u$ est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

### Exercice 16 - Polynômes d'Hermite ⋆⋆⋆

Soient $n \geqslant 2$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $\varphi(P) = 2XP' - P''$.

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire les valeurs prorpes de $\varphi$ et la dimension de ses sous-espaces propres.
3. Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme unitaire $H_p$ tel que $H_p'' - 2XH_p' + 2pH_p = 0$.
4. Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $H_p$ est de degré $p$.

### Exercice 17 ⋆

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ne possédant qu'une seule valeur propre. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A$ soit diagonalisable.

### Exercice 18 ⋆⋆

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de $A$ ? On pourra distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de $a$.
2. $A$ est-elle diagonalisable ?

### Exercice 19 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ et soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = P'$.

1. Montrer que $f^{n+1} = 0$ et que $f^n \neq 0$. On dit que $f$ est nilpotent d'indice $n + 1$.
2. En déduire les valeurs propres de $f$. Est-il diagonalisable ?
3. Soit $g : P \mapsto P - P'$. Exprimer $g$ en fonction de $f$ et en déduire que $g$ est bijectif.
4. Montrer que $g^{-1} = \mathrm{Id} + f + f^2 + \cdots + f^n$.

### Exercice 20 ⋆⋆

1. Déterminer la dimension de $\ker(\mathrm{Tr})$. En déduire que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
2. Soit $f$ l'application définie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)I_n$.
   (a) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) En utilisant la question 1, montrer que $f$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

### Exercice 21 ⋆ ⋆ ⋆

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 6 \\ -6 & 7 & 6 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$. En déduire un polynôme annulateur de $A$ de degré 2.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^2 + X - 2$ et en déduire $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $A$ est diagonalisable et déterminer $D$ diagonale et $P$ inversible telles que $A = P^{-1}DP$. Retrouver la valeur de $A^n$.

### Exercice 22 - Rang 1 ⋆ ⋆ ⋆

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Soit $B$ une base de $E$ et $A = \mathrm{Mat}_B(f)$.

1. Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est de la forme :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que $M$ est diagonalisable si et seulement si $\alpha_n \neq 0$.
3. En déduire que $f$ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

## 3 Espaces orthogonaux

### Exercice 23 ⋆⋆

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{2} P^{(i)}(0)Q^{(i)}(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est orthogonale. En déduire une base orthonormée.
3. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(1+X, X^2)$ et $G = \mathrm{Vect}(1-X)$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathbb{R}_2[X]$.

### Exercice 24 ⋆ ⋆ ⋆

Soit $E$ un espace euclidien. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux de $E$. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

### Exercice 25 ⋆ ⋆ ⋆

On définit une application $\varphi : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en posant :
$$\forall (A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

1. Montrer que si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ alors : $\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$.
   En déduire que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

## 4 Matrices orthogonales, isométries vectorielles

### Exercice 26 ⋆

On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de la réflexion par rapport au plan $P$ admettant pour équation :
$$P \ :\ x + 2y + 3z = 0.$$

### Exercice 27 ⋆⋆

On considère un espace vectoriel euclidien $E$ et un vecteur unitaire $u$ de $E$.
On définit l'application $f$ de $E$ dans $E$ par :
$$\forall x \in E,\ f(x) = 2\langle x|u\rangle u - x.$$

1. Montrer que $f$ est une isométrie vectorielle de $E$.
2. Déterminer la nature de $f$.

### Exercice 28 ⋆ ⋆ ⋆

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $s = a + b + c$.
On définit la matrice $A$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ par :
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $|s| \leqslant \sqrt{3}$.
2. Exprimer $\det(A)$ en fonction de $s$.
3. En déduire que $|\det(A)| \leqslant 1$.
4. Montrer que si $|\det(A)| = 1$, alors $A$ est une matrice orthogonale.

## 5 Matrices symétriques, endomorphismes auto-adjoints

### Exercice 29 ⋆

On considère $n$ un entier naturel non nul et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle, c'est-à-dire telle que l'on ait $A^\top = -A$.

1. Montrer que $A$ n'admet pas de valeur propre réelle différente de 0.
2. En déduire que les matrices $I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles.
3. Montrer que la matrice $M = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ est orthogonale.
4. Montrer que la matrice $A^2$ est symétrique.

### Exercice 30 ⋆⋆

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit le produit scalaire de $P$ et $Q$ éléments de $E$ par :

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

et l'application $\varphi$ qui associe à tout polynôme $P$ de $E$ le polynôme $\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et que $\varphi$ est symétrique pour le produit scalaire choisi.
2. Déterminer les valeurs propres $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ de $\varphi$ que l'on rangera par ordre croissant.
3. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, si $P_k$ est un polynôme propre de $\varphi$ associé à la valeur propre $\lambda_k$ alors $\int_{-1}^{+1} P_k(t)\mathrm{d}t = 0$.