

QUINZAINE DU 12/01 AU 23/01

1 Contenu du cours

Chapitre 10 - Espaces probabilisés (cours et TD)

1. Univers, événements, variables aléatoires discrètes

Univers, tribu, opérations sur les événements, intersections dénombrables, événements incompatibles, variables aléatoires discrètes, événements définis à partir d'une variable aléatoire ($X = x$), ($X \in V$), ($X \leq a$), etc, ($X = Y$) est un événement si X et Y sont des variables aléatoires discrètes.

2. Probabilités

(mesure de) probabilité sur un espace probabilisable, notion d'événements presque sûrs et négligeables, systèmes (quasi-)complets d'événements, propriétés élémentaires de calculs, limite monotone pour les probabilités, probabilités d'une suite d'inclusions croissante, d'une suite d'intersections décroissante, sous-additivité.

3. Probabilités conditionnelles

Définition, formule des probabilités composées, formules des probabilités totales, formule de Bayes.

4. Indépendance

Indépendance de deux événements, indépendance deux à deux, indépendance mutuelle.

Chapitre 11 - Intégrales à paramètres (cours et début du TD)

1. Limites et continuité

Rappel théorème de convergence dominée et intégration terme à terme, théorème de convergence dominée à paramètre continue, théorème de continuité pour les intégrales à paramètres.

2. Dérivabilité

Théorème de dérivabilité \mathcal{C}^1 pour les intégrales à paramètres, théorème de dérivabilité \mathcal{C}^k pour les intégrales à paramètres, remarque pour le cas \mathcal{C}^∞

3. Étude de la fonction Γ

Définition, convergence, lien avec la factorielle, limite en $+\infty$, dérivabilité, classe \mathcal{C}^2 , convexité, existence d'un minimum, graphe.

Révisions : suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, séries entières, algèbre linéaire, espaces euclidiens.

2 Questions de cours

- Exemple :** il y a deux urnes. La première urne contient 3 boules noires et 2 boules blanches. La seconde contient 5 boules noires et 1 boule blanche. On choisit une urne au hasard, puis on pioche une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?
- Démonstration :** Montrer que si A et B sont indépendants alors A et \overline{B} le sont.
- Exemple :** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-\frac{1}{x}}}{1+e^{-t}} dt$.
- Exemple :** Montrer que $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{2-itx}{t^3} e^{i\left(\frac{t^3}{3}+xt\right)} dt$ est continue sur \mathbb{R} .
- Exemple :** Exprimer la dérivée de $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ en fonction de $g : x \mapsto \int_0^x e^{-u^2} du$ et de ses dérivées.
- Exemple :** Déterminer l'ensemble de définition de $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.