

## QUINZAINE DU 12/01 AU 23/01

### 1 Contenu du cours

#### Chapitre 10 - Espaces probabilisés (cours et TD)

##### 1. Univers, événements, variables aléatoires discrètes

Univers, tribu, opérations sur les événements, intersections dénombrables, événements incompatibles, variables aléatoires discrètes, événements définis à partir d'une variable aléatoire ( $X = x$ ), ( $X \in V$ ), ( $X \leq a$ ), etc, ( $X = Y$ ) est un événement si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes.

##### 2. Probabilités

(mesure de) probabilité sur un espace probabilisable, notion d'événements presque sûrs et négligeables, systèmes (quasi-)complets d'événements, propriétés élémentaires de calculs, limite monotone pour les probabilités, probabilités d'une suite d'inclusions croissante, d'une suite d'intersections décroissante, sous-additivité.

##### 3. Probabilités conditionnelles

Définition, formule des probabilités composées, formules des probabilités totales, formule de Bayes.

##### 4. Indépendance

Indépendance de deux événements, indépendance deux à deux, indépendance mutuelle.

#### Chapitre 11 - Intégrales à paramètres (cours et début du TD)

##### 1. Limites et continuité

Rappel théorème de convergence dominée et intégration terme à terme, théorème de convergence dominée à paramètre continu, théorème de continuité pour les intégrales à paramètres.

##### 2. Dérivabilité

Théorème de dérivabilité  $\mathcal{C}^1$  pour les intégrales à paramètres, théorème de dérivabilité  $\mathcal{C}^k$  pour les intégrales à paramètres, remarque pour le cas  $\mathcal{C}^\infty$

##### 3. Étude de la fonction $\Gamma$

Définition, convergence, lien avec la factorielle, limite en  $+\infty$ , dérivabilité, classe  $\mathcal{C}^2$ , convexité, existence d'un minimum, graphe.

**Révisions :** suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, séries entières, algèbre linéaire, espaces euclidiens.

### 2 Questions de cours

1. **Exemple :** il y a deux urnes. La première urne contient 3 boules noires et 2 boules blanches. La seconde contient 5 boules noires et 1 boule blanche. On choisit une urne au hasard, puis on pioche une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?

2. **Démonstration :** Montrer que si  $A$  et  $B$  sont indépendants alors  $A$  et  $\bar{B}$  le sont.

3. **Exemple :** Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t-\frac{1}{x}}}{1+e^{-t}} dt$ .

4. **Exemple :** Montrer que  $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{2-itx}{t^3} e^{i(\frac{t^3}{3}+xt)} dt$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

5. **Exemple :** Exprimer la dérivée de  $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$  en fonction de  $g : x \mapsto \int_0^x e^{-u^2} du$  et de ses dérivées.

6. **Exemple :** Déterminer l'ensemble de définition de  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .