Chapitre 13 - Variables aléatoires discrètes

1 Loi d'un variable aléatoire discrète

1.1 Généralités

Définition : Loi d'une v.a.d.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire discrète sur cet espace.
On appelle **loi de** X, l'application $\mathbb{P}_X$ définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ par :

$$\forall V \in \mathcal{P}(X(\Omega)),\ \mathbb{P}_X(V) = \mathbb{P}(X \in V).$$

Exemple : Loi du $\mathbb{1}_A$.

Proposition

$\mathbb{P}_X$ est une (mesure de) probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(\Omega))$.

Proposition

Pour tout $U \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, on a :

$$\mathbb{P}_X(U) = \sum_{x \in U} \mathbb{P}_X(\{x\}) = \sum_{x \in U} P(X = x).$$

Remarques :

- Cela signifie que la loi de X est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x)_{x \in X(\Omega)}$.
- En fait, pour définir une loi de probabilité pour une variable aléatoire discrète, il suffit d'attribuer une probabilité à chacune des valeurs possibles et de s'assurer que la somme des probabilités fait bien 1.

Exemple : Loi de X le résultat d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Définition

Si $\mathcal{L}$ est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(\Omega))$, on dit que X suit la loi $\mathcal{L}$ si $\mathbb{P}_X = \mathcal{L}$.
Si deux variables aléatoires X et Y, définies sur un même espace probabilisé, suivent la même loi, on note :

$$X \sim Y.$$

Remarque : ainsi, $X \sim Y$ est équivalent à $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

Proposition

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $f : E \to F$ avec $X(\Omega) \subset E$. Alors $f(X)$ est une variable aléatoire discrète.

Remarque : $f(X)$ n'a pas de sens *a priori*, mais c'est une notation bien utile. Rappelons-nous que X est une *fonction* de Ω dans E. Donc, en fait, $f(X)$ désigne la *composition* $f \circ X$. $f(X)$ est donc une fonction de Ω dans F et à ce titre peut être une variable aléatoire.
Exemple : On lance un dé, si je fais un nombre pair, je gagne 1 euro, sinon je perds un euro. Si X désigne le résultat du dé et si $f : [\![1, 6]\!] \to \{-1, 1\}$ qui a un résultat du dé associe le gain correspondant alors $f(X)$ est la *variable aléatoire discrète* qui à une issue associe le gain obtenue.

Proposition

Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

1.2 Lois de références

Définition : Loi géométrique

Soit $p \in]0, 1[$. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ suit une loi géométrique de paramètre p si pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$:

$$P(X = k) = q^{k-1}p = (1 - p)^{k-1}p.$$

Dans ce cas, on note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Remarques :

- Cela définit bien une loi de probabilité puisque $\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p)^{k-1}p = 1$.
- X s'interprète naturellement comme le rang du premier succès dans une expérience de Bernoulli répétée indéfiniment de manière indépendante.

En effet, notons S_i l'événement « avoir un succès au range i » et notons p la probabilité d'un tel succès. On suppose que les familles $(S_1, \ldots, S_n)$ sont mutuellement indépendantes. On a alors :

$$\mathbb{P}(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{k-1}} S_k) = \underbrace{\mathbb{P}(\overline{S_1})}_{=1-p} \cdots \underbrace{\mathbb{P}(\overline{S_{k-1}})}_{=1-p} \underbrace{P(\overline{S_k})}_{=p} = (1-p)^{k-1}p.$$

Proposition

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ et si $k \in \mathbb{N}$ alors : $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$.

Démonstration : ***À faire rapidement.*** □

Remarques : Cette propriété a une conséquence intéressante : *la loi géométrique n'a pas de mémoire*. Qu'entend-t-on par là ?
Calculons la probalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X>k}(X > k+n) &= \frac{P((X > k) \cap (X > k+n))}{P(X > k)} = \frac{P(X > k+n)}{P(X > k)} \\ &= \frac{(1-p)^{k+n}}{(1-p)^k} = (1-p)^n = P(X > n). \end{aligned}$$

c'est-à-dire la probabilité d'attendre n itérations *supplémentaires* est la même que d'attendre n itérations au début. Dit autrement, si au bout de k itérations, je n'ai toujours pas eu de succès, c'est comme si ces itérations n'avaient jamais eu lieu et que je recommençais depuis le début. Le système a *oublié* ces itérations échouées.
C'est en fait un comportement assez naturel lorsqu'on réfléchit à l'hypothèse d'indépendance qu'on a faite mais ça continue tout de même de choquer notre intuition, sans doute parce que la plupart des phénomènes ne sont pas sans mémoire dans la vie courante.
Exemple : On peut tout de même modéliser des choses très réelles avec ces hypothèses. Les composants électroniques, par exemple, sont *peu* sujets au veillissement. Si un composant n'est pas défectueux, pendant un nombre assez important d'années (de l'ordre de 10 à 20 ans), la probabilité de panne suit essentiellement une loi géométrique.

Définition : Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi de Poisson de paramètre λ si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Dans ce cas, on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarques :

- Cela définit bien une loi de probabilité puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = 1$.
- L'interprétation de la loi de Poisson est un peu plus compliquée. X représente un nombre d'événements rares indépendants ayant lieu pendant un temps donné, avec un nombre moyen de tels événements de λ sur la période en question.

  L'exemple typique est un centre d'appel téléphonique, par exemple de support technique. Hors événements exceptionnels (mise à jour du système, rush à cause d'une annonce aux informations, etc), les gens appellent plutôt de manière indépendante. Combien peut-on attendre d'appels dans le centre téléphonique lundi prochain entre 9h et 10h ? Et bien cela suit (plus ou moins suivant la justesse de l'hypothèse d'indépendance) une loi de Poisson.
- Si, on prend un point de vue spatial plutôt que temporel, on peut imaginer une ligne de n cases qui peuvent ou non avoir un point de manière indépendante. Le nombre de cases occupées suit alors une loi... binomiale.

  En revanche, si on fait tendre n vers l'infinie, en réduisant la taille des cases pour occuper le même, et en gardant np constant (de façon à garder le ratio de cases occupées constant), alors cette loi s'approche par une loi de Poisson.

Proposition : caractérisation de la loi de Poisson (HP)

Soit une famille (X_I) de variables aléatoires indexée par les sous-intervalles de $[0, 1]$. Soit $\lambda > 0$.
Si :

- Pour tout intervalle I, X_I est à valeurs entières,
- Pour tout intervalle réduit à un point $X_{\{x\}}$ suit une loi certaine égale à 0.
- Si I et J sont disjoints, X_I et X_J sont indépendantes,
- Si I et J sont disjoints, alors $X_{I \cup J} = X_I + X_J$,
- Si $I = [a, a+\ell[$, alors $P(X_I = 1) \underset{\ell \to 0}{\sim} \lambda\ell$ et $P(X_I > 1) = \mathrm{o}(\ell)$

Alors :

$$X_{[0,1]} \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

Démonstration : ***Exercice pour ceux qui veulent.*** □

Remarques :

- cette proposition est hors-programme, mais je l'évoque car c'est un exercice intéressant, que l'on peut faire au niveau PC et qui représente formellement l'intuition derrière l'interprétation de la loi de Poisson.
- La dernière hypothèse souligne la rareté : pour de petits intervalles de temps, on peut essentiellement considéré qu'il se passe 0 ou 1 événements.

1.3 Couples de variables aléatoires

Définition : Couple de variables aléatoires

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes de sur $(\Omega, \mathcal{A})$ alors (X, Y) application de Ω dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Remarque : un couple de variable aléatoire est en fait une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble de couples. Mais il est souvent pratique de se ramener aux composantes.

Exemples :

- On lance deux dés, (X, Y) où X est le résultat du premier dé et Y le résultat du second est un couple de variable aléatoire.
- Un restaurant accueille des clients chaque soir. (X, Y) est un couple de variables aléatoires où X est le nombre de clients un soir donné et Y le nombre de clients qui commandent de la viande le même soir.

Définition : Lois marginales, loi conjointe

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.
La loi conjointe est la loi qui associe une probabilité à toute partie de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, dit autrement c'est la loi de (X, Y) considérée comme une unique variable à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales** de (X, Y).

Exemple : lancé de deux dés avec (X, Y), X résultat du premier dé, Y somme des deux dés.

Définition : Loi conditionnelle

Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. La loi de Y conditionnellement à A est la loi de Y en tant que variable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$. Dit autrement :

$$\forall y \in Y(\Omega),\ P_{Y/A}(\{y\}) = P_A(Y = y) = \frac{P(A \cap (Y = y))}{P(A)}.$$

Remarque : lien avec l'exemple précédent et les lois conditionnels pour $[X = x]$.

2 Indépendance de variables aléatoires

2.1 Généralités

Définition : Indépendance de 2 variables

Soient X et Y deux variables aléatoires.
On dit que X et Y sont indépendantes lorsque pour tout $A \subset X(\Omega)$ et pour tout $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
Dans ce cas, on note $X \perp Y$.

Remarque : cela signifie donc qu'apprendre une quelconque information sur le résultat de X ne nous apprends rien sur le résultat de Y.

Proposition

X et Y sont indépendantes si et seulement si les distributions de probabilités vérifient :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Définition : Indépendance mutuelle de n variables

Soient (X_i) n variables aléatoires.
On dit que les X_i sont mutuellement indépendantes lorsque pour tout famille (A_i) telle que $A_i \subset X_i(\Omega)$, les événements $((X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n))$ sont mutuellement indépendants.

Remarques :

- Pour étendre la définition à un nombre infini de variables aléatoires, on demande l'indépendance de toute sous-famille finie.
- Si une suite (X_i) de variables sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi, on dit que les variables sont indépendantes et identiquement distribuées (on note parfois i.i.d.).

2.2 Fonctions de variables aléatoires indépendantes

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Soient f et g deux fonctions définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement.
Si $X \perp Y$ alors $f(X) \perp f(Y)$.
De même si $(X_1, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes, alors $(f(X_1), \ldots, f(X_n))$ le sont également.

Proposition : Lemme des coalitions

Si X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes alors $f(X_1, \ldots, X_p)$, $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque : Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes alors
$f_1(X_1, \ldots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \ldots, X_{n_1+n_2}, \ldots, f_p(X_n - n_p + 1, \ldots, X_n))$ sont indépendantes.
Exemples :

- Exemple bête à partir de cas "de la vraie vie"
- Cas de sommes de binomiales.