TD12 - Fonctions vectorielles

1 Généralités

Exercice 1.

1. La fonction $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable en 0 ? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
2. Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 2. Soit f et $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$, montrer que $\varphi = \det(f, g) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et calculer φ'.

Exercice 3. On considère la fonction vectorielle $A : t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ avec

$$a(0) = 0 \text{ et } a(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \text{ si } t \neq 0 \qquad \text{et} \qquad b(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \text{ si } t \neq 0 \text{ et } b(0) = 0.$$

1. Montrer que A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est diagonalisable. On note $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ ses valeurs propres avec $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t)$. Montrer que λ_1 et λ_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soient $a < b$ deux réels. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (avec $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel), continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. En considérant $\phi : t \in [a, b] \mapsto (f(b) - f(a), f(t))$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a)\|f'(c)\|$$

où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire usuel.

2 Systèmes différentiels

Exercice 5. Résoudre les systèmes linéaires différentiels suivants :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} (1+t^2)x' & = & tx + y \\ (1+t^2)y' & = & -x + ty \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad (T) \left\{ \begin{array}{l} x' = x - 2y + t \\ y' = 2x - y + e^t \end{array} \right.$$

Indication : pour le premier système, poser $z = x + iy$, pour le deuxième on peut poser $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 6. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -3x + 5y - 5z \\ y' = -4x + 6y - 5z \\ z' = -4x + 4y - 3z \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = 3 \end{array} \right.$$

Exercice 7. Soit x, y, z des fonctions dépendant de t. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = x + y \\ y' = 3y - z \\ z' = y + z \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{c} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = 1 \end{array} \right.$$

Indication : on pourra montrer que la matrice du système est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. On considère le système différentiel $(E) : \begin{cases} x' = (e^t + t)x + (e^t - t)y - t \\ y' = (e^t - t)x + (e^t + t)y + t \end{cases}$.

1. Écrire ce système sous la forme $X' = AX + B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}, \mathrm{M}_2(\mathbb{R})\big)$ et $B \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\big)$.
2. Diagonaliser $A(t)$ avec une matrice de passage P qui ne dépend pas de t.
3. En déduire les solutions du système différentiel.

Exercice 9. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y''' - y'' - 4y' + 4y = 12 + e^{-t}$.

Exercice 10. On considère le système différentiel $(E) : \begin{cases} x'(t) = -tx(t) + y(t) + 1 \\ y'(t) = (1 - t^2)x(t) + ty(t) + t. \end{cases}$

1. Écrire ce système sous forme matricielle et vérifier que $X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$ sont solutions du système homogène (H) associé à (E).
2. Rechercher une solution particulière de (E) de la forme $X = aX_1 + bX_2$, où a et b sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la solution générale de (E) (*indication : on utilisera le théorème de Cauchy*).

Exercice 11. On considère le système différentiel $(E) : \begin{cases} x'(t) = 2tx(t) - y(t) + t\cos(t) \\ y'(t) = x(t) + 2ty(t) + t\sin(t) \end{cases}$.

1. Déterminer le plan vectoriel des solutions de l'équation homogène (H) associé à (E) en changeant de fonctions inconnues pour $u(t) = x(t)\exp(-t^2)$ et $v(t) = y(t)\exp(-t^2)$. On notera (X_1, X_2) une base de ce plan.
2. Rechercher une solution particulière de (E) de la forme $X = aX_1 + bX_2$, où a et b sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la solution générale de (E) (*indication : on utilisera le théorème de Cauchy*).

Solutions

Exercice 1. **1)** La fonction cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)-1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}{x} = -\frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2},$$

donc la fonction f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} = f'(0),$$

donc la fonction f' est continue en 0. Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Remarque. Et cela, bien que la fonction

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

ne soit pas dérivable en 0 !

Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2) On sait, pour tout réel $u \in \mathbb{R}$,

$$\cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n}.$$

Donc, pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, en prenant $u = \sqrt{x}$ (qui est bien un réel),

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\sqrt{x}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n.$$

Or, la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$$

a son rayon R qui vérifie

$$R \geq x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, puisque la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc

$$R = +\infty.$$

Le cours sur les séries entières donne alors que la fonction

$$g : x \in]-R, R[= \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n \in \mathbb{R}$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[= \mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x) = g(x).$$

Et, pour $x = 0$,

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad g(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}0^n = \frac{(-1)^0}{(2\cdot 0)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot 0 = 1$$

(car $0^k = 0$ si $k \in \mathbb{N}^*$, et $0^0 = 1$). Donc
$$f(0) = g(0).$$
Donc la fonction f est la restriction de la fonction g à $\mathbb{R}_+$. Or, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2. L'application $\det(.,.)$ est bilinéaire, les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, donc (application directe du cours) la fonction
$$t \mapsto \det\big(f(t), g(t)\big)$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et : pour tout $t \in I$,
$$\boxed{\det(f,g)'(t) = \det\big(f'(t), g(t)\big) + \det\big(f(t), g'(t)\big)}$$

Exercice 3.

1. L'application
$$t \mapsto A(t)$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si ses fonctions coordonnées (dans la base canonique) sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On va donc étudier le caractère $\mathcal{C}^1$ des applications
$$t \mapsto a(t) \qquad \text{et} \qquad t \mapsto b(t).$$
La fonction
$$t \mapsto a(t)$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Il reste à étudier en 0.
Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$|a(t)| \leq e^{-\frac{1}{t^2}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$
donc par le théorème des gendarmes,
$$a(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 = a(0).$$
Donc la fonction a est continue en 0.
Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$a'(t) = \frac{1}{t^2}\sin\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t^2}} + \frac{2}{t^3}\cos\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t^2}}.$$
Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, par inégalité triangulaire (puis car $|\cos| \leq 1$ et $|\sin| \leq 1$), on a
$$|a'(t)| \leq \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^2} + \frac{2e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^3} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$
(par croissance comparée, faire le changement de variable $x = \dfrac{1}{t^2}$ pour s'en convaincre).

Donc, par le théorème des gendarmes,
$$\lim_{t\to 0} a'(t) = 0.$$

Donc la fonction a est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, avec
$$\lim_{t\to 0} a'(t) = 0.$$
Le théorème de la limite de la dérivée s'applique alors, et donne que la fonction a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et de plus
$$a'(0) = 0.$$
En faisant le même raisonnement sur b, on obtient que la fonction b est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (avec, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,
$$b'(t) = -\frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t^2}} + \frac{2}{t^3}\sin\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t^2}},$$

donc on a les mêmes majorations pour $|b|$ et $|b'|$ que pour $|a|$ et $|a'|$ respectivement).
Enfin, les fonctions a et b étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donc la fonction $-a$ aussi, on en déduit que la fonction A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\chi_{A(t)}(\lambda) = \begin{vmatrix} -a(t)+\lambda & -b(t) \\ -b(t) & \lambda + a(t) \end{vmatrix} = \big(-a(t)+\lambda\big)\big(a(t)+\lambda\big) - b^2(t),$$

donc

$$\chi_{A(t)} = \big(-a(t)+X\big)\big(a(t)+X\big) - b^2(t) = X^2 - a^2(t) - b^2(t).$$

Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\chi_{A(t)}(X) = X^2 - (a^2(t)+b^2(t)) = X^2 - e^{-\frac{2}{t^2}} = \left(X - e^{-\frac{1}{t^2}}\right)\left(X + e^{-\frac{1}{t^2}}\right).$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, la matrice $A(t)$ a deux valeurs propres réelles distinctes et est de taille 2, donc la matrice $A(t)$ est diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque. Ce n'est pas surprenant : la matrice $A(t)$ est symétrique réelle...

On a

$$\lambda_1(t) = \sqrt{a^2(t)+b^2(t)} = e^{-\frac{1}{t^2}} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2(t) = -\sqrt{a^2(t)+b^2(t)} = -e^{-\frac{1}{t^2}} = -\lambda_1(t).$$

Si $t=0$, on a

$$A(0) = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})},$$

donc la matrice $A(0)$ est la matrice nulle, donc diagonalisable. Et on a

$$\lambda_1(0) = 0 = \sqrt{a^2(0)+b^2(0)} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2(0) = 0 = -\lambda_1(0).$$

Donc $\lambda_2 = -\lambda_1$. Il suffit de montrer que la fonction

$$\lambda_1 = \sqrt{a^2+b^2}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction λ_1 est continue sur $\mathbb{R}$, par composition, car

$$\lambda_1 = \sqrt{a^2+b^2},$$

avec la fonction a^2+b^2 continue (par opérations usuelles) et positive sur $\mathbb{R}$, et la fonction $\sqrt{\cdot}$ continue sur $\mathbb{R}_+$.
Toujours par composition, on a que la fonction λ_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, car la fonction $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction a^2+b^2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et car $a^2(t)+b^2(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.
Puis, pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\lambda_1(t) = e^{-\frac{1}{t^2}},$$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\lambda_1'(t) = \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

(par croissance comparée, pour s'en convaincre, poser $u = \dfrac{1}{t^2}$).
Donc la fonction λ_1 est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \lambda_1'(t) = 0$: le théorème de la limite de la dérivée s'applique et donne bien que la fonction λ_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, donc sur $\mathbb{R}$ (et $\lambda_1'(0) = 0$).

Exercice 4. Les fonctions

$$t \mapsto f(t) \qquad \text{et} \qquad t \mapsto f(b) - f(a)$$

sont continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ (de dérivées respectives $t \mapsto f'(t)$ et $t \mapsto \vec{0}$), donc la fonction

$$t \mapsto \big(f(b)-f(a), f(t)\big)$$

aussi.
Puis, la fonction

$$(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto (x,y)$$

est bilinéaire, $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, donc :

- l'application
$$(x,y) \mapsto (x,y)$$
est continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, puis par composition, la fonction ϕ est continue sur $[a,b]$,
- par composition, la fonction ϕ est dérivable sur $]a,b[$, et pour tout $t \in]a,b[$,
$$\phi'(t) = \left(\vec{0}, f(t)\right) + \big(f(b)-f(a), f'(t)\big) = \big(f(b)-f(a), f'(t)\big)\,.$$

Puis, par linéarité à droite du produit scalaire,
$$\phi(b)-\phi(a) = (f(b)-f(a), f(b)-f(a)) = \|f(b)-f(a)\|^2$$
(donc est positif), et le théorème des accroissements finis donne qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\phi(b)-\phi(a) = (b-a)\phi'(c).$$
Puis, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne
$$|\phi'(c)| = \big|\,\big(f(b)-f(a), f'(c)\big)\,\big| \leq \|f(b)-f(a)\| \cdot \|f'(c)\|,$$
et donc
$$\|f(b)-f(a)\|^2 = |\phi(b)-\phi(a)| = (b-a)\|\phi'(c)\| \leq (b-a)\|f(b)-f(a)\| \cdot \|f'(c)\|.$$
Si $f(b)-f(a) = \vec{0}$, alors $\|f(b)-f(a)\| = 0$, et donc
$$\|f(b)-f(a)\| \leq (b-a)\|f'(c)\|$$
est vraie (car $b-a \geq 0$ et qu'une norme est positive).
Et si $f(b)-f(a) \neq \vec{0}$, on a $\|f(b)-f(a)\| > 0$, et on peut donc diviser l'inégalité obtenue par $\|f(b)-f(a)\|$, ce qui donne
$$\|f(b)-f(a)\| \leq (b-a)\|f'(c)\|.$$
Dans tous les cas, on a bien l'inégalité voulue.

Exercice 5. **1)** Soit x et y dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose $z = x+iy$, c'est à dire
$$z : t \in \mathbb{R} \mapsto x(t)+iy(t).$$
Comme les fonctions x et y sont dérivables, la fonction z est dérivable, et on a : pour tout réel $t \in \mathbb{R}$,
$$z'(t) = x'(t)+iy'(t).$$
Comme deux complexes sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires, en notant L_1 et L_2 les lignes du système (S), on a
$$(S) \quad\Leftrightarrow\quad (1)+i(2) \quad\Leftrightarrow\quad (1+t^2)z' = t(x+iy)+(y-ix) = tz-iz = (t-i)z \quad\Leftrightarrow\quad (t+i)z' = z$$
(en divisant par $t-i$, qui est non nul, et car $1+t^2 = (t-i)(t+i)$).
Cette dernière équation différentielle se résout directement, ainsi
$$(S) \quad\Leftrightarrow\quad \exists\lambda \in \mathbb{C},\ z : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda(t+i).$$
Comme $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ et si on note $\lambda = a+ib$, on a alors : les fonctions x et y sont solutions de (S) si et seulement s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec
$$\boxed{x : t \in \mathbb{R} \mapsto at-b} \quad \text{et} \quad \boxed{y : t \in \mathbb{R} \mapsto a+bt}.$$

2) Soit x et y dérivables sur $\mathbb{R}$. (x,y) est solution du système (T) si et seulement si (u,v) vérifie
$$\begin{cases} u' = 3v+t+e^t \\ v' = -u+t-e^t \end{cases}$$

(c'est un calcul direct, pour la réciproque on utilise que $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$).
Analyse : supposons donc que (u,v) vérifie

$$\begin{cases} u' = 3v + t + e^t \\ v' = -u + t - e^t \end{cases}.$$

Alors u' est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$u'' = 3v' + 1 + e^t = -3u + 3t + 1 - 2e^t.$$

Donc u est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique

$$r^2 = -3,$$

donc les racines sont $\pm i\sqrt{3}$. Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha \cos\left(\sqrt{3}t\right) + \beta \sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle

$$u'' = -3u + 3t + 1$$

de la forme $u : t \mapsto at + b$: on veut donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 = -3at - 3b + 3t + 1 = 3(1-a)t + 1 - 3b,$$

ce qui est vrai si

$$a = 1 \qquad \text{et} \qquad b = \frac{1}{3}.$$

Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle

$$u'' = -3u - 2e^t$$

de la forme $u : t \mapsto ae^t$: on veut donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$ae^t = -3ae^t - 2e^t, \qquad \text{soit} \qquad a = -3a - 2,$$

donc

$$a = -\frac{1}{2}$$

convient.
Donc par principe de superposition, on obtient que les solutions de l'équation différentielle

$$u'' = -3u + 3t + 1 - 2e^t$$

sont les fonctions

$$t \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}e^t + t + \frac{1}{3} + \alpha \cos\left(\sqrt{3}t\right) + \beta \sin\left(\sqrt{3}t\right)$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Alors la première équation du système donne

$$v = \frac{u' - t - e^t}{3} = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3} - \frac{t}{3} - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \sin\left(\sqrt{3}t\right) + \frac{\beta}{\sqrt{3}} \cos\left(\sqrt{3}t\right).$$

Synthèse : il faut maintenant vérifier la deuxième ligne du système pour savoir parmi ces fonctions lesquelles sont effectivement solutions.
Or,

$$v' = -u + t - e^t \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{3} - \alpha \cos\left(\sqrt{3}t\right) - \beta \sin\left(\sqrt{3}t\right) = \frac{1}{2}e^t - t - \frac{1}{3} - \alpha \cos\left(\sqrt{3}t\right) - \beta \sin\left(\sqrt{3}t\right) + t - e^t,$$

ce qui est toujours vrai, donc toutes les fonctions trouvées conviennent.

Conclusion : on en déduit alors que les solutions de (T) sont les fonctions (x,y) avec

$$x = \frac{u+v}{2} : t \in \mathbb{R} \mapsto \boxed{-\frac{1}{2}e^t + \frac{t}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\sqrt{3}t\right) + \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)\sin\left(\sqrt{3}t\right)}$$

et

$$y = \frac{u-v}{2} : t \in \mathbb{R} \mapsto \boxed{\frac{2t}{3} + \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\beta}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\sqrt{3}t\right) + \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)\sin\left(\sqrt{3}t\right)}$$

pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ quelconques.

Exercice 6. • Le problème est équivalent à

$$X' = AX \qquad \text{où} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -4 & 6 & -5 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

avec $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Or, un calcul donne

$$\chi_A = (X-1)(X-2)(X+3), \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, -3\}.$$

Donc A a trois valeurs propres différentes (et simples), est de taille 3, donc est diagonalisable.
On a

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc (puisque la matrice A est diagonalisable et qu'on a trouvé une base de chaque espace propre), la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} =: D.$$

• Soit $X : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On pose

$$Y = P^{-1}X, \qquad \text{soit} \qquad X = PY.$$

Alors X est dérivable si et seulement si Y l'est (car les applications

$$Z \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mapsto PZ \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad Z \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}Z \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

sont linéaires), et dans ce cas

$$Y' = (P^{-1}X)' = P^{-1}X'$$

car P^{-1} est à coefficients constants. Notons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} X' = AX \quad &\Leftrightarrow \quad PY' = PDP^{-1}PY \\ &\Leftrightarrow \quad Y' = DY \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = u \\ v' = 2v \\ w' = -3w \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left\{ \begin{array}{l} u(t) = \lambda e^t \\ v(t) = \mu e^{2t} \\ w(t) = \gamma e^{-3t} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi avec $X = PY = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+w \\ u+v+w \\ u+w \end{pmatrix}$, on obtient :

$$X' = AX \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \mu e^{2t} + \gamma e^{-3t} \\ y(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t} + \gamma e^{-3t} \\ z(t) = \lambda e^t + \gamma e^{-3t} \end{array} \right.}$$

On veut $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ et $z(0) = 3$, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(0) = \mu + \gamma = 1 & (1) \\ y(0) = \lambda + \mu + \gamma = 2 & (2) \\ z(0) = \lambda + \gamma = 3 & (3) \end{array} \right. .$$

Or, $(2) - (1)$ donne

$$\boxed{\lambda = 1}.$$

Donc

$$\gamma = 3 - 1 = \boxed{2} \qquad \text{et} \qquad \mu = 1 - \gamma = \boxed{-1}.$$

D'où le problème a une unique solution, à savoir

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x : t \mapsto -2e^{2t} + 2e^{-3t} \\ y : t \mapsto e^t - e^{2t} + 2e^{-3t} \\ z : t \mapsto e^t + 2e^{-3t} \end{array} \right.}$$

Exercice 7. • Le problème est équivalent à

$$X' = AX \qquad \text{où} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un calcul donne alors

$$\chi_A = (X-1)(X-2)^2,$$

donc 2 est valeur propre de multiplicité 2. Or

$$\dim\big(E_2(A)\big) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 2,$$

donc A n'est pas diagonalisable.

- Montrons que A est semblable à T.

On cherche donc $(U,V,W) \in \left(\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)^3$ tel que la matrice par blocs $P = \left(\begin{array}{c|c|c} U & V & W \end{array}\right)$ soit inversible et vérifie

$$P^{-1}AP = T.$$

Or, avec P sous cette forme,

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP = T \quad &\Leftrightarrow \quad AP = PT \text{ et } P \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c|c} AU & AV & AW \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} U & 2V & V+2W \end{array}\right) \text{ (par calcul matriciel par blocs) et } P \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} AU = U \\ AV = 2V \\ AW = V + 2W \end{cases} \quad \text{et } P \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (A - I_3)U = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ (A-2I_3)^2 W = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ V = (A-2I_3)W \end{cases} \quad \text{et } P \text{ est inversible}
\end{aligned}$$

On veut donc

$$U \in \mathrm{Ker}(A - I_3) = E_1(A), \qquad W \in \mathrm{Ker}\big((A-2I_3)^2\big),$$

et on posera

$$V = (A - 2I_3)W.$$

On fera attention : comme on veut $P = \left(\begin{array}{c|c|c} U & V & W \end{array}\right)$ inversible, il faut $V \neq 0_{3,1}$, donc $W \notin \mathrm{Ker}(A-2I_3) = E_2(A)$.

Il restera à vérifier que P est bien inversible.

On obtient :

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on pose

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Recherche de W : on a

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

convient, et alors

$$V = (A - 2I_3)W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie $AP = PT$. Et comme

$$\det(P) = -1 \neq 0,$$

la matrice P est bien inversible, donc

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Soit $X : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On pose

$$Y = P^{-1}X, \qquad \text{soit} \qquad X = PY.$$

Alors X est dérivable si et seulement si Y l'est (car les applications

$$Z \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mapsto PZ \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad Z \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}Z \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

sont linéaires), et dans ce cas

$$Y' = (P^{-1}X)' = P^{-1}X'$$

car P^{-1} est à coefficients constants. Notons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} X' = AX \quad & \Leftrightarrow \quad PY' = PTP^{-1}PY \\ & \Leftrightarrow \quad Y' = TY \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u' = u \\ v' = 2v + w \\ w' = 2w \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists (\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u(t) = \lambda e^t \\ w(t) = \alpha e^{2t} \\ v'(t) = 2v(t) + \alpha e^{2t} \qquad (E) \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \beta e^{2t}$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$.
La recherche d'une solution particulière de (E) par la méthode de variation de la constante donne, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\beta'(t) = \alpha,$$

donc la fonction $\beta : t \mapsto \alpha t$ convient. Ainsi la fonction

$$t \mapsto \alpha t e^{2t}$$

est solution particulière de (E). Ainsi,

$$v \text{ est solution de } E \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{il existe } \beta \in \mathbb{R} \text{ tel que } v : t \in \mathbb{R} \mapsto (\alpha t + \beta)e^{2t}.$$

Comme

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + v \\ v + w \\ v \end{pmatrix},$$

on a :

$$X' = AX \quad \Leftrightarrow \quad \exists(\alpha,\beta,\lambda)\in\mathbb{R}^3,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} u(t) = \lambda e^t \\ w(t) = \alpha e^{2t} \\ v(t) = (\alpha t+\beta)e^{2t} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists(\alpha,\beta,\lambda)\in\mathbb{R}^3,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \boxed{\begin{cases} x(t) = \lambda e^t + (\alpha t+\beta)e^{2t} \\ y(t) = (\alpha t+\beta)e^{2t} + \alpha e^{2t} \\ z(t) = (\alpha t+\beta)e^{2t} \end{cases}}$$

Puis,

$$\begin{cases} 1 = x(0) = \lambda+\beta \\ 2 = y(0) = \beta+\alpha \\ 1 = z(0) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}.$$

Ainsi le problème a une unique solution, à savoir

$$\boxed{\begin{cases} x : t\mapsto (t+1)e^{2t} \\ y : t\mapsto (t+2)e^{2t} \\ z : t\mapsto (t+1)e^{2t} \end{cases}}$$

Exercice 8. 1) Il est direct que

$$A : t\mapsto \begin{pmatrix} e^t+t & e^t-t \\ e^t-t & e^t+t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B : t\mapsto \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}.$$

2) On cherche les valeurs propres de A, puis les espaces propres associés. On obtient :

$$\chi_A = \big(X-2e^t\big)(X-2t), \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{2t, 2e^t\}.$$

Puis, on sait, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$t < 1+t \le e^t,$$

donc $2t \neq 2e^t$, donc A a deux valeurs propres différentes, est de taille 2, donc A est diagonalisable. De plus, ses valeurs propres sont simples, donc ses espaces propres sont de dimension 1.
On obtient

$$E_{2t}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad E_{2e^t}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

donc (puisque A est diagonalisable et qu'on a trouvé une base de chaque espace propre), la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et vérifie

$$P^{-1}A(t)P = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix} =: D(t)$$

pour tout réel $t\in\mathbb{R}$.
3) Soit $X : \mathbb{R}\to \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Notons

$$Y = PX, \qquad \text{soit} \qquad X = PY.$$

Alors X est dérivable si et seulement si Y l'est (car les applications

$$Z\in\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\mapsto PZ\in\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad Z\in\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})\mapsto P^{-1}Z\in\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

sont linéaires), et dans ce cas

$$Y' = (P^{-1}X)' = P^{-1}X'$$

car P^{-1} est à coefficients constants. Notons

$$Y = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix},$$

et calculons
$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$
Alors
$$\begin{aligned}
X' = A(t)X + B(t) \quad &\Leftrightarrow \quad PY' = PD(t)P^{-1}PY + B(t)\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}z'\\ w'\end{pmatrix} = Y' = D(t)Y + P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix}2t & 0\\ 0 & 2e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-t\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} z'(t) = 2tz(t) - t\\ w'(t) = 2e^t w(t)\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} z(t) = \dfrac{1}{2} + \lambda e^{t^2}\\ w(t) = \mu e^{2e^t}\end{cases}
\end{aligned}$$
(en résolvant les deux équations différentielles linéaires d'ordre 1). Puis
$$X = PY = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z + w\\ -z + w\end{pmatrix},$$
donc
$$X' = A(t)X + b(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \boxed{\begin{cases} x : t \mapsto \dfrac{1}{2} + \lambda e^{t^2} + \mu e^{2e^t}\\ y : t \mapsto -\dfrac{1}{2} - \lambda e^{t^2} + \mu e^{2e^t}\end{cases}}$$

Exercice 9. ★ Cherchons les solutions de l'équation homogène en passant sous forme matricielle : soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, si on note
$$X = \begin{pmatrix}y\\ y'\\ y''\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & 4 & 1\end{pmatrix},$$
alors
$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad X' = AX.$$
Puis,
$$\chi_A = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X-2)(X+2), \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, -2\}.$$
A a alors 3 valeurs propres deux à deux différentes, est de taille 3, donc A est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
On diagonalise A : on a
$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right), \qquad E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}\right), \qquad E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}\right),$$
et comme on sait que A est diagonalisable et qu'on a trouvé une base de chaque espace propre, la matrice
$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$$
est inversible, et
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} =: D.$$
Puis, si on note
$$Y = P^{-1}X, \qquad \text{soit} \qquad X = PY,$$

alors X est dérivable si et seulement si Y l'est (car les applications

$$Z \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mapsto PZ \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad Z \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}Z \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

sont linéaires), et dans ce cas

$$X' = (PY)' = PY'$$

(car P est à coefficients constants). Notons

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

alors

$$AX = PDP^{-1}X = PDY,$$

donc (car P est inversible)

$$\begin{aligned} X' = AX \quad &\Leftrightarrow \quad PY' = PDY \\ &\Leftrightarrow \quad Y' = DY \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = -2y_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (\alpha, \beta\gamma) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{2t} \\ y_2(t) = \beta e^{t} \\ y_3(t) = \gamma e^{-2t} \end{cases} \end{aligned}$$

et alors

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ 4y_1 + y_2 + 4y_3 \end{pmatrix}$$

donne

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0 \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta\gamma) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y : t \in \mathbb{R} \mapsto \alpha e^{2t} + \beta e^{t} + \gamma e^{-2t}$$

(on ne prend que la première coordonnée de X, la seule qui nous intéresse, et qui donne $y = y_1 + y_2 + y_3$).

★ Enfin, il faut trouver une solution particulière. Utilisons le principe de superposition : l'équation différentielle

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 12$$

a comme solution particulière $y = 3$ (comme le second membre est de la forme $P(t)e^{at}$ avec $a = 0$ qui n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de la forme $Q(t)e^{at}$ avec Q polynôme de même degré que P, donc de la forme $t \mapsto$ constante). Enfin, cherchons une solution particulière de l'équation différentielle

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = e^{-t}$$

sous la forme

$$t \mapsto ae^{-t},$$

ce qui donne : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(-1)^3 ae^{-t} - (-1)^2 ae^{-t} - 4a(-1)e^{-t} + 4ae^{-t} = e^{-t},$$

soit $a = \dfrac{1}{6}$.

★ Donc les solutions de l'équation initiale sont les fonctions

$$\boxed{t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{6}e^{-t} + 3 + \alpha e^{2t} + \beta e^{t} + \gamma e^{-2t}}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 10. 1) Ce système s'écrit $X' = AX + B$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1-t^2 & t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Les fonctions X_1 et X_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car leurs fonctions coordonnées dans la base canonique de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (à savoir $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t$ pour X_1, $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^2+1$ pour X_2) sont polynomiales, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Puis, pour tout réel $t \in \mathbb{R}$,

$$X_1'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A(t)X_1(t) \qquad \text{et} \qquad X_2'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = A(t)X_2(t),$$

donc les fonctions X_1 et X_2 sont bien solutions du système homogène associé.
2) Soit a et b deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $X = aX_1 + bX_2$.
Par produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Et :

$$X' = a'X_1 + b'X_2 + aX_1' + bX_2',$$

donc

$$X' = AX + B \qquad \Leftrightarrow \qquad a'X_1 + b'X_2 + aX_1' + bX_2' = aAX_1 + bAX_2 + B \qquad \Leftrightarrow \qquad a'X_1 + b'X_2 = B$$

(car $AX_1 = X_1'$ et $AX_2 = X_2'$). En reportant la définition de X_1 et X_2, on a alors

$$X' = AX + B \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} a' + tb' = 1 \\ ta' + (t^2+1)b' = t \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} b' = 0 \\ a' = 1 \end{cases}$$

donc

$$X : t \in \mathbb{R} \mapsto tX_1(t) + 0X_2(t) = \boxed{tX_1(t)}$$

est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ (on a pris $a : t \mapsto t$ et $b : t \mapsto 0$, qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).
3) On sait que les solutions générales s'écrivent sous la forme de la somme de la solution particulière que l'on a trouvé à la question précédente, et d'une solution quelconque du système différentiel homogène correspondant (car le système est linéaire).
Notons $\mathcal{E}_0$ l'espace vectoriel des solutions du système différentiel homogène

$$X' = AX.$$

On sait

$$X_1 \in \mathcal{E}_0 \qquad \text{et} \qquad X_2 \in \mathcal{E}_0.$$

On a (X_1, X_2) qui est une famille libre. En effet, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $aX_1 + bX_2 = 0$ (ici le 0 est la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$aX_1(t) + bX_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a + bt = 0 \\ at + b(t^2+1) = 0 \end{cases}.$$

Comme c'est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est en particulier vrai pour $t = 0$ et $t = 1$, alors la première ligne donne $a = 0$ et $a + b = 0$, soit

$$a = b = 0.$$

Enfin, A est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ (car ses fonctions coefficients (à savoir, $t \mapsto -t$, $t \mapsto t$, $t \mapsto 1-t^2$ et $t \mapsto 1$), qui sont les fonctions coordonnées dans la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, sont polynomiales donc continues), et B est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (car ses fonctions coefficients (à savoir $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t$), qui sont les fonctions coordonnées dans la base canonique de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, sont polynomiales donc continues), et $\mathbb{R}$ est un intervalle. Donc le (corollaire du) théorème de Cauchy donne que $\mathcal{E}_0$ est un espace vectoriel de dimension 2.
Comme (X_1, X_2) est une famille libre de deux vecteurs de $\mathcal{E}_0$, qui est un espace vectoriel de dimension 2, on en déduit que (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{E}_0$. Donc les solutions du système différentiel homogène $X' = AX$ sont les fonctions $aX_1 + bX_2$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.
On en déduit que les solutions générales de $X' = AX + B$ sont les fonctions du type

$$\boxed{X : t \in \mathbb{R} \mapsto (t + \alpha)X_1(t) + \beta X_2(t)}$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.

Exercice 11. Commençons par remarquer que $\mathbb{R}$ est un intervalle, la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$$

est continue (car les fonctions coordonnées dans la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sont les fonctions

$$t \mapsto 2t, \qquad t \mapsto -1, \qquad t \mapsto 1,$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}$ car polynomiales), donc par le théorème de Cauchy, les solutions du système différentiel $(H) : X' = A(t)X$ forment un espace vectoriel $\mathcal{H}$ de dimension 2. Donc, pour la question 1, on cherche bien un plan.
1) Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ si et seulement si u et v le sont (par produit avec $t \mapsto \exp(\pm t^2)$ qui est dérivable). Si c'est le cas, dérivons comme produit : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u'(t) = x'(t)e^{-t^2} - 2tx(t)e^{-t^2} = \big(x'(t) - 2tx(t) + y(t)\big)e^{-t^2} - y(t)e^{-t^2} = \big(x'(t) - 2tx(t) + y(t)\big)e^{-t^2} - v(t)$$

et

$$v'(t) = y'(t)e^{-t^2} - 2ty(t)e^{-t^2} = \big(y'(t) - x(t) - 2ty(t)\big)e^{-t^2} + x(t)e^{-t^2} = \big(y'(t) - x(t) - 2ty(t)\big)e^{-t^2} + u(t)$$

Donc

$$(x, y) \text{ est solution de } (H) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u' = -v \\ v' = u \end{cases},$$

ce qui donne (*donc là, on ne fait qu'une implication, il faudra faire la réciproque plus loin*)

$$u'' = -u \qquad \text{puis} \qquad v = -u',$$

donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec

$$u : t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t), \qquad \text{puis} \qquad v : t \mapsto a\sin(t) - b\cos(t).$$

Réciproquement, pour un tel u et un tel v, on a bien $v' = -u$ (c'est ainsi qu'a été construit v), et on vérifie directement que $v' = u$.
Donc

$$(x, y) \text{ est solution de } (H) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{il existe } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \mapsto a\,\underbrace{e^{t^2}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}_{=X_1} + b\,\underbrace{e^{t^2}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}}_{=X_2}.$$

On a donc

$$\boxed{X_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t^2}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{X_2 : t \mapsto e^{t^2}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}},$$

et (X_1, X_2) engendrent les solutions de (H). De plus, c'est une famille libre car (par exemple), $X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une famille libre de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Donc (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{H}$.
On peut sinon utiliser le théorème de Cauchy pour dire

$$\dim\left(\mathcal{H}\right) = 2,$$

et comme la famille (X_1, X_2) engendre $\mathcal{H}$, on a bien que la famille (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{H}$.
2) Notons

$$A : t \mapsto \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B : t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Alors le couple de fonctions (x, y) est solution du système si et seulement si $X' = AX + B$, en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Or, si on prend

$$X = aX_1 + bX_2$$

avec a et b de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et en dérivant un produit, on a

$$X' = a'X_1 + b'X_2 + aX_1' + bX_2',$$

donc

$$X' = AX + B \quad \Leftrightarrow \quad a'X_1 + b'X_2 + aX_1' + bX_2' = aAX_1 + bAX_2 + B \quad \Leftrightarrow \quad a'X_1 + b'X_2 = B$$

(car $AX_1 = X_1'$ et $AX_2 = X_2'$ puisque X_1 et X_2 sont solutions de (H)).
En reportant la définition de X_1 et X_2, on a alors

$$X' = AX+B \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} a'(t)\cos(t)e^{t^2} + b'(t)\sin(t)e^{t^2} = t\cos(t) \\ a'(t)\sin(t)e^{t^2} - b'(t)\cos(t)e^{t^2} = t\sin(t) \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} b'(t)e^{t^2} = 0 \\ a'(t)e^{t^2} = t \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} b'(t) = 0 \\ a'(t) = te^{-t^2} \end{cases}$$

donc

$$X : t \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}X_1(t) + 0X_2(t) = \boxed{-\frac{1}{2}e^{-t^2}X_1(t)}$$

est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ (on a pris $a : t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $b : t \mapsto 0$, qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).
3) Les solutions générales sont donc du type

$$\boxed{X : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + a\right)X_1(t) + bX_2(t)}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ quelconque.
Une démonstration directe : dérivons comme produit : pour tout réel $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u'(t) &= x'(t)e^{-t^2} - 2tx(t)e^{-t^2} \\ &= \big(x'(t) - 2tx(t) + y(t) - t\cos(t)\big)e^{-t^2} - y(t)e^{-t^2} + t\cos(t)e^{-t^2} \\ &= \big(x'(t) - 2tx(t) + y(t) - t\cos(t)\big)e^{-t^2} - v(t) + t\cos(t)e^{-t^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v'(t) &= y'(t)e^{-t^2} - 2ty(t)e^{-t^2} \\ &= \big(y'(t) - x(t) - 2ty(t) - t\sin(t)\big)e^{-t^2} + x(t)e^{-t^2} + t\sin(t)e^{-t^2} \\ &= \big(y'(t) - x(t) - 2ty(t) - t\sin(t)\big)e^{-t^2} + u(t) + t\sin(t)e^{-t^2} \end{aligned}$$

Donc

$$(x,y) \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \text{pour tout réel } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) = -v(t) + t\cos(t)e^{-t^2} \\ v'(t) = u(t) + t\sin(t)e^{-t^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{pour tout réel } t \in \mathbb{R}, \ (u+iv)'(t) = i(u+iv)(t) + te^{it-t^2}.$$

Notons alors

$$\lambda : t \in \mathbb{R} \mapsto (u+iv)(t)e^{-it}$$

(pour faire la méthode de la variation de la constante). Par produit, la fonction λ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, on a

$$(u+iv)(t) = \lambda(t)e^{it}, \qquad \text{puis} \qquad (u+iv)'(t) = \lambda'(t)e^{it} + i\lambda(t)e^{it}.$$

Alors en reportant dans l'équation,

$$(x,y) \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \text{pour tout réel } t \in \mathbb{R}, \ \lambda'(t) = te^{-t^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{il existe } K \in \mathbb{C} \text{ avec } \lambda : t \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2} + K.$$

En notant $K = \alpha + i\beta$, on a alors

$$(x,y) \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } u + iv : t \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}e^{it-t^2} + Ke^{it}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \begin{cases} u : t \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}\cos(t)e^{-t^2} + \alpha\cos(t) - \beta\sin(t) \\ v : t \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}\sin(t)e^{-t^2} + \beta\cos(t) + \alpha\sin(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{il existe } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \boxed{\begin{cases} x : t \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}\cos(t) + \alpha\cos(t)e^{t^2} - \beta\sin(t)e^{t^2} \\ y : t \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2}\sin(t) + \beta\cos(t)e^{t^2} + \alpha\sin(t)e^{t^2} \end{cases}}$$

(par rapport à la formule précédente, on a $\alpha = a$ et $\beta = -b$).